2012 北京高考数学理科试题分析

北京新东方 孟祥飞 刘珅

2012 年的北京数学高考是高中新课改后的第三次高考，试卷延续了近几年高考数学命题的风格，题干大气，内容丰富，难度客观讲适中，和以往一样，其中 8,14,20 三个题技巧性较高，侧重考查学生的数学思维和探索精神。

一、第一感觉

拿到试卷的第一感觉是亲切，大部分试题均注重考查基础知识、基本技能和基本方法，考查数学传统的主干知识，较好把握了传统知识的继承点和新增知识的起步点，但是有几个试题还是非常具有心意，难度不小，重点考察能力，给笔者留下了较深的印象：

例如选择第 2 题，在不等式背景下考查了一个概率问题，还是非常具有综合性的。选择第 7 题，常见的三视图问题，但是计算几何体的表面积，对空间想象力要求还是很高的。填空题第 13 小题，难度虽然不大，但是综合性以及对于函数思想的要求都很高。第 16 题，立体几何考查了一个折纸的问题，难度虽然不大，但是形式还是比较有亮点的，第三问考查利用空间向量列方程求解参数的问题. 再比如 17 题以生活背景为模型考查了一个概率统计的知识，题目难度仍然不大，但是第三问非常有创新思维的让学生大胆猜想方差最大的情况，还是非常考查能力的，另外，从生活的角度命题，让学生体验数学的建模思想和应用价值，激发学生学习数学的兴趣，拓展视野，开展研究性学习，实现数学的人文教育功能.

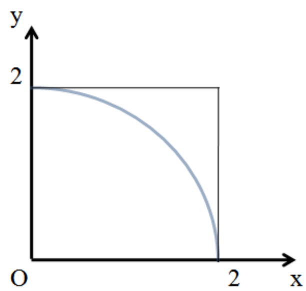
二、试题解析

（一）、选择题：

【解析】第（1）题和往年一样，依然是集合（交集）运算，本次考察的是一次和二次不等式的解法。因为 $A=\{x\in R\,|\,3x+2>0\}\Rightarrow x>-\dfrac{2}{3}$，利用二次不等式的解法可得

$B=\{x\,|\,x<-1\text{或}x>3\}$，画出数轴图易得：$A\cap B=\{x\,|\,x>3\}$，答案：D

【解析】第（2）题是一道微综合题，它涉及到的知识包括：线性规划，圆的概念和面积公式，概率。



题目中 $\begin{cases}0\le x\le 2\\0\le y\le 2\end{cases}$ 表示的区域如右图正方形所示，而动点 D 可以存在的位置为正方型面积减去四分之一圆的面积部分，因此

$P=\dfrac{2\times2-\dfrac{1}{4}\pi\cdot2^2}{2\times2}=\dfrac{4-\pi}{4}$，答案：D

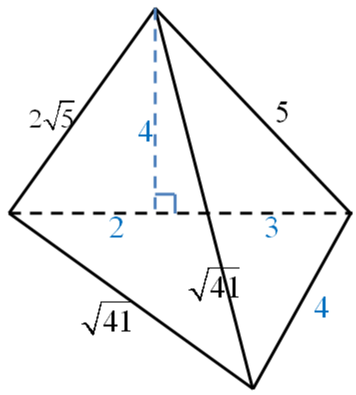
【解析】第（3）题所考查的知识为依托于简易逻辑的复数问题的考查，复数部分本题所考查的是纯虚数的定义。当 $a=0$ 时，如果 $b=0$ 同时等于零，此时 $a+bi=0$ 是实数，不是纯虚数，因此不是充分条件；而如果 $a+bi$ 已经为纯虚数，由定义实部为零，虚部不为零可以得到 $a=0$，因此是必要条件。答案：B

【解析】第（4）题考查程序框图，涉及到判断循环结束的时刻，以及简单整数指数幂的计算。$k=0,s=1\Rightarrow k=1,s=1\Rightarrow k=2,s=2\Rightarrow k=3,s=8$，循环结束，输出的 s 为 8，答案：C

【解析】第（5）题考查的是平面几何的知识，具体到本题主要就是射影定理的各种情况，需要学生对于垂直的变化有比较深入的了解。答案：A

【解析】第（6）题式排列组合的问题，属于传统的奇偶数排列的问题，解法不唯一，如果能先进行良好的分类之后再分步计算，该问题可迎刃而解。由于题目要求是奇数，那么对于此三位数可以分成两种情况：奇偶奇；偶奇奇。如果是第一种奇偶奇的情况，可以从个位开始分析（3 种选择），之后十位（2 种选择），最后百位（2 种选择），共 12 种；如果是第二种情况偶奇奇，分析同理：个位（3 种情况），十位（2 种情况），百位（不能是 0，一种情况），共 6 种，因此总共 12+6=18 种情况。答案：B

【解析】第（7）题考查的是三棱锥的三视图问题，只不过与往年不同的是这题所求不是棱锥或棱柱的体积而是表面积，因此对于学生计算基本功以及空间想象的双能力都存在着综合性的考查。从所给的三视图可以得到该几何体为三棱锥，如右图所示。图中蓝色数字所表示的为直接从题目所给三视图中读出的长度，黑色数字代表通过勾股定理的计算得到的边长。本题所求表面积应为三棱锥四个面的面积之和。利用垂直关系和三角型面积公式，可得：$S_{底}=10$，$S_{后}=10$，$S_{右}=10$，$S_{左}=6\sqrt{5}$。因此该几何体表面积 $S=S_{底}+S_{后}+S_{右}+S_{左}=30+6\sqrt{5}$，答案：B

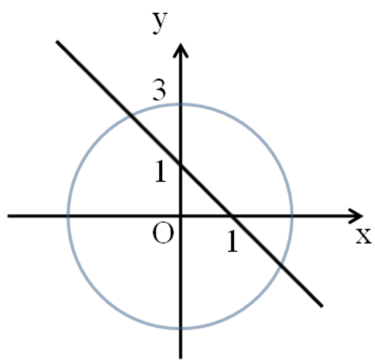


【解析】第（8）题知识点考查很灵活，要根据图像识别看出变化趋势，利用变化速度可以用导数来解，但图像不连续，所以只能是广义上的，因此对数学的理解很大程度上限制了考生的分数。当然此题若利用数学估计过于复杂，最好从感觉出发。由于目的是使平均产量最

高，就需要随着 n 增大，S_n 变化超过平均值的加入，随着 n 增大，S_n 变化不足平均值的舍去。由图可知 6，7，8，9 这几年增长最快，超过平均值，所以应该加入，因此，答案：C

（二）、填空题：

【解析】第（9）题涉及到的是直线和圆的知识，本题主要考查的是直线和圆的位置关系，而且直线和圆都是以参数方程的形式给出的，学生如果平时对消参并不陌生的话，此题应也非难题。直线转化为 $x+y=1$，曲线转化为圆 $x^2+y^2=9$。将题目所给的直线和圆图形化得到如右图所示的情况，易得两个交点。答案：2。



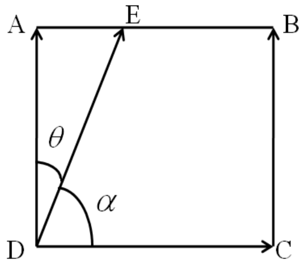
【解析】第（10）题考查的是等差数列的基本计算，技术难度并不高，通项公式和前 n 项和的常规考法。因为 $S_2=a_3 \Rightarrow a_1+a_2=a_3 \Rightarrow a_1+a_1+d=a_1+2d \Rightarrow d=a_1=\frac{1}{2}$，所以 $a_2=a_1+d=1$，$S_n=na_1+n(n-1)d=\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{4}n$。答案：$a_2=1, S_n=\frac{1}{4}n^2+\frac{1}{4}n$

【解析】第（11）题考查的是解三角形，本题主要涉及余弦定理的应用。题目所给的边的条件不想常规的单边条件，而是符合多边条件，也成为了这道题目的难点之所在。在 ΔABC 中，利用余弦定理 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} \Rightarrow -\frac{1}{4}=\frac{4+(c+b)(c-b)}{4c}=\frac{4+7(c-b)}{4c}$，化简得：$8c-7b+4=0$，与题目条件 $b+c=7$ 联立，可解得 $\begin{cases} c=3 \\ b=4 \\ a=2 \end{cases}$。答案：4。

【解析】第（12）题是解析几何中抛物线的问题，根据交点弦问题求围成面积的题目。把握住抛物线的基本概念，熟练的观察出标准方程中的焦点和准线坐标和方程是成功的关键，当然还要知道三角型面积公式。由 $y^2=4x$ 可求得焦点坐标 $F(1,0)$，因为倾角 60 度，所以直线的斜率为 $k=\tan 60°=\sqrt{3}$，利用点斜式，直线方程为 $y=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$，将直线和曲线联立 $\begin{cases} y=\sqrt{3}x-\sqrt{3} \\ y^2=4x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A(3,2\sqrt{3}) \\ B(\frac{1}{3},-\frac{2\sqrt{3}}{3}) \end{cases}$。因此 $S_{\Delta OAF}=\frac{1}{2}\times OF\times y_A=\frac{1}{2}\times 1\times 2\sqrt{3}=\sqrt{3}$。

答案：$\sqrt{3}$

【解析】第（13）题是平面向量问题，考查学生对于平面向量点乘知识的理解，其中包含动点问题，考查学生对于最值时刻的图形感官。根据平面向量的点乘公式



$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DA}=|\overrightarrow{DE}|\cdot|\overrightarrow{DA}|\cos\theta$，由图可知，

$|\overrightarrow{DE}|\cos\theta=|\overrightarrow{DA}|$，因此原式$=|\overrightarrow{DA}|^2=1$；

同理$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}=|\overrightarrow{DE}|\cdot|\overrightarrow{DC}|\cos\alpha=|\overrightarrow{DE}|\cdot\cos\alpha$，而$|\overrightarrow{DE}|\cdot\cos\alpha$就是向量$\overrightarrow{DE}$在$\overrightarrow{DC}$边上的射影，要想让$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{DC}$最大，即让射影最大，此时 E 点与 B 点重合，射影为$|\overrightarrow{DC}|$，所以长度为 1。答案：1；1

【解析】第（14）题考查学生函数的综合能力，涉及到二次函数的图像开口，根大小，涉及到指数型函数的平移的单调性，还涉及到简易逻辑中的“或”连接，形式上是小型题，考的确是大思路，分类讨论是这个题的重点。根据$g(x)=2^x-2<0$，可解得$x<1$。由于题目中第一个条件的限制$\forall x\in R$，$f(x)<0$或$g(x)<0$成立的限制，导致$f(x)$在$x\geq1$时必须是$f(x)<0$的。当$m=0$时，$f(x)=0$不能做到$f(x)$在$x\geq1$时$f(x)<0$，所以舍掉。因此，$f(x)$作为二次函数开口只能向下，故$m<0$，且此时两个根为$x_1=2m, x_2=-m-3$。

为保证条件成立，需要$\begin{cases}x_1=2m<1\\x_2=-m-3<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m<\frac{1}{2}\\m>-4\end{cases}$，和大前提$m<0$取交集结果为

$-4<m<0$；又由于条件 2:要求$\exists x\in(-\infty,-4), f(x)g(x)<0$的限制，可分析得出在$x\in(-\infty,-4)$时，$f(x)$恒负，因此就需要在这个范围内$g(x)$有得正数的可能，即$-4$应该比$x_1,x_2$两根中小的那个来的大，当$m\in(-1,0)$时，$-m-3<-4$，解得，交集为空，舍。当$m=-1$时，两个根同为$-2>-4$，舍。当$m\in(-4,-1)$时，$2m<-4$，解得：$m<-2$，综上所述$m\in(-4,-2)$。答案：$m\in(-4,-2)$

（三）、解答题

【解析】15（1）：定义域$\sin x\neq0$，$\therefore x\neq k\pi$

$f(x)=\dfrac{(\sin x-\cos x)2\sin x\cos}{\sin x}=\sin 2x-\cos 2x-1$

$=\sqrt{2}\sin(2x-\dfrac{\pi}{4})-1$

所以$T=\pi$

（2）：单调增区间为：$\begin{aligned}&-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\le 2x-\dfrac{\pi}{4}\le\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\\&\therefore -\dfrac{\pi}{8}+k\pi\le x\le\dfrac{3\pi}{8}+k\pi\end{aligned}$

【点评】：三角函数难度较低，此类型题无论是一模考试，二模考试，还是平时练习，甚至去年的高考题都有考查，考生应该觉得非常容易入手。

16（1）：由$DE\perp A_1D$且$DE\perp DC$，$\therefore DE\perp$平面A_1DC，

$\therefore DE\perp A_1C$，又$\because A_1C\perp CD$，$\therefore A_1C\perp$平面$BCDE$

（2）$M(0,1,\sqrt{3}),\overrightarrow{CM}=(0,1,\sqrt{3})$

$\overrightarrow{BE}=(-1,2,0),\overrightarrow{A_1B}=(3,0,-2\sqrt{3})$，设平面$A_1BE$的法向量为$\vec{n}=(x_1,y_1,z_1)$

解得$\vec{n}=(1,\dfrac{1}{2},\dfrac{\sqrt{3}}{2})$，设所求线面角为$\alpha,\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\therefore\alpha=\dfrac{\pi}{4}$

（3）设点P的坐标为$(m,0,0)$，$\overrightarrow{A_1P}=(m,0,-2\sqrt{3}).\overrightarrow{A_1P}=(0,2,-2\sqrt{3})$

设$\overrightarrow{n_2}$为平面A_1DP的法向量，求得$\overrightarrow{n_2}$

又平面A_1DP与平面A_1BE面面垂直，$\therefore\vec{n}\bullet\overrightarrow{n_2}$=0, 求解m值即可，$m=-2$，所以不存在

点评：此题的难度主要在于第三问的创新式问法，难度客观讲非常大，其次第二问对于基本功的考查十分到位，对于知识掌握不牢靠的学生可能不能顺利解答

【解析】17（1）：$P=\dfrac{400}{450}=\dfrac{8}{9}$

（2）：$P=\dfrac{300}{1000}=\dfrac{3}{10}$

（3）：$a=600,b=0,c=0$，方差8万

【点评】：此题的难度基本和上题一样都集中在第三问，其他两问难度确实不大，第三问的设计确实很有能力考查的味道，不要求证明，即不要求说明理由，但是要求学生对方差意义的理解非常深刻。

【解析】18（1）：

$\because f'(1)=g'(1)\therefore 2a=3+b$

$\because f(1)=g(1)=c\therefore a=b$

$\therefore a=b=3$

（2）令 $F(x)=f(x)+g(x)=x^3+ax^2+\frac{a^2}{4}x+1$

$F'(x)=3x^2+2ax+\frac{a^2}{4}=0$，化简得，$F'(x)=12x^2+8ax+a^2=0$ 解得

$x_1=-\frac{a}{2},x_2=-\frac{a}{6}$，由于 $a>0$，$\therefore -\frac{a}{2}<-\frac{a}{6}$

$\therefore (-\infty,-\frac{\pi}{2})$和（$-\frac{\pi}{6},+\infty$）为单调递增区间，（$-\frac{\pi}{2},-\frac{\pi}{6}$）为单调递减区间

$F(-1)=a-\frac{a^2}{4},F(-\frac{a}{2})=1$，且 $F(-1)\le F(-\frac{a}{2})$

（1）当 $-\frac{a}{2}>-1,a<2$ 最大值为 $F(-1)=a-\frac{a^2}{4}$

（2）当 $-\frac{a}{2}\le -1,a\le 2$ 最大值为 $F(-\frac{a}{2})=1$ 或 $F(-1)=a-\frac{a^2}{4}$，又因为

$F(-1)=a-\frac{a^2}{4}=-(\frac{a}{2}-1)^2+1\le 1$，所以最大值为 1

【点评】：此题应该说是导数题目中较为常规的类型题目，考查的切线，单调性，极值以及最值问题都是课本中要求的重点内容，也是学生掌握比较好的知识点，而题目的难点在于后面第二问中，两个极值点的求解最值，对学生的概念要求很高，数学思维也给很清楚。

【解析】19（1）：易得 $\frac{7}{2}<m<5$

（2）$\begin{cases} y=kx+4 \\ x^2+2y^2=8 \end{cases}\Rightarrow (2k^2+1)x^2+16kx+24=0$

$\therefore x_1+x_2=-\frac{16k}{2k^2+1},x_1x_2=\frac{24}{2k^2+1}$

BM 的直线方程：$y+2=\frac{y_1+2}{x_1}x\Rightarrow G(\frac{3x_1}{y_1+2},1)$

三点共线可以用$k_{AG}=k_{AN}\Rightarrow\frac{3x_1}{y_1+2}=\frac{y_2-2}{x_2}$化简后将韦达定理代入即可化简得出结论

【点评】：此题难度集中在运算，但是整体题目难度确实不大，从形式到条件的设计都是非常非常熟悉的，对比 2012 北京新东方模考班文科试题：

（20）一贯的北京风格，难度较大，区分度不高

三、写在未来

通过今年的高考题，我们再次看到，试题绝对难度其实并不大，但是相对难度却很大，对于只研究数学表面的学生来说，虽然下了很大的功夫，可能却发现很多题还是不会，高考一定是侧重能力的考查，我们更应该关注是数学的本质，在学习数学的过程中注意理解，不要把数学变成一种机械的形式主义，一味死板的操作，注意数学的逻辑性，目的性，善于观察题目，分析题目，反思题目。对于未来新高三的学生，笔者希望同学们可以戒骄戒躁，脚踏实地的学数学，真正把数学一点一滴的学明白，理解透彻，在学习过程中多问自己为什么，从根本上理解数学，善于用数学的思维去分析和解决问题，只有这样才能真正的掌握数学，才是得分的王道！