2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题:1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合

题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1、当 $x\to 0^+$ 时，若 $\ln^\alpha(1+2x)$，$(1-\cos x)^{\frac{1}{\alpha}}$ 均是比 x 高阶的无穷小，则 α 的取值范围是（ ）

（A） $(2,+\infty)$ （B） $(1,2)$ （C） $(\frac{1}{2},1)$ （D） $(0,\frac{1}{2})$

2、下列曲线中有渐近线的是（ ）

（A） $y=x+\sin x$ （B） $y=x^2+\sin x$

（C） $y=x+\sin\frac{1}{x}$ （D） $y=x^2+\sin\frac{1}{x}$

3、设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，$g(x)=f(0)(1-x)+f(1)x$，则在区间 $[0,1]$ 内（ ）

（A）当 $f'(x)\ge 0$ 时， $f(x)\ge g(x)$

（B）当 $f'(x)\le 0$ 时， $f(x)\le g(x)$

（C）当 $f''(x)\ge 0$ 时， $f(x)\ge g(x)$

（D）当 $f''(x)\le 0$ 时， $f(x)\le g(x)$

4、曲线 $\begin{cases} x=t^2+7, \\ y=t^2+4t+1 \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是（ ）

（A） $\frac{\sqrt{10}}{50}$ （B） $\frac{\sqrt{10}}{100}$ （C） $10\sqrt{10}$ （D） $5\sqrt{10}$

5、设函数 $f(x)=\arctan x$，若 $f(x)=xf'(\xi)$，则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=$（ ）

（A）1 （B） $\frac{2}{3}$ （C） $\frac{1}{2}$ （D） $\frac{1}{3}$

6、设函数 $u(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数，且满足

$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\ne 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$，则（ ）

（A）$u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得

（B）$u(x,y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得

（C）$u(x,y)$ 的最大值在 D 的内部取得，$u(x,y)$ 的最小值在 D 的边界上取得

（D）$u(x,y)$ 的最小值在 D 的内部取得，$u(x,y)$ 的最大值在 D 的边界上取得

7、行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ （ ）

（A）$(ad-bc)^2$ （B）$-(ad-bc)^2$

（C）$a^2d^2-b^2c^2$ （D）$b^2c^2-a^2d^2$

8、设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 为 3 维向量，则对任意常数 k,l，向量组 $\alpha_1+k\alpha_3,\alpha_2+l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关的（ ）

（A）必要非充分条件

（B）充分非必要条件

（C）充分必要条件

（D）既非充分也非必要条件

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

9、$\int_{-\infty}^{1}\frac{1}{x^2+2x+5}dx=$__________.

10、设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1),x\in[0,2]$，则 $f(7)=$________

11、设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^{2yz}+x+y^2+z=\frac{7}{4}$ 确定的函数，则 $dz\big|_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}=$__________.

12、曲线 L 的极坐标方程是 $r=\theta$，则 L 在点 $(r,\theta)=(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程是__________.

13、一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0,1]$ 上，若其线密度 $\rho(x)=-x^2+2x+1$，则该细棒的质心坐标 $\bar{x}=$__________.

14、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1，则 a 的取值范围是__________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15、（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$

16、（本题满分 10 分）

已知函数 $y=y(x)$ 满足微分方程 $x^2+y^2y'=1-y'$，且 $y(2)=0$，求 $y(x)$ 的极大值与极小值.

17、（本题满分 10 分）

设平面区域 $D=\left\{(x,y)\middle|1\le x^2+y^2\le 4, x\ge 0, y\ge 0\right\}$，计算 $\iint\limits_D \dfrac{x\sin(\pi\sqrt{x^2+y^2})}{x+y}dxdy$.

18、（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数，$z=f(e^x\cos y)$ 满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x}$.

若 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式.

19、（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加，$0\le g(x)\le 1$.

证明：（Ⅰ）(I) $0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a$，$x\in[a,b]$；

(II) $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$

20、（本题满分 11 分）

设函数 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，$x\in[0,1]$. 定义数列

$f_1(x)=f(x)$，$f_2(x)=f(f_1(x))$，$\cdots$，$f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$，$\cdots$

记 S_n 是由曲线 $y=f_n(x)$，直线 $x=1$ 及 x 轴所围平面图形的面积，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}nS_n$.

21、（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=2(y+1)$，且 $f(y,y)=(y+1)^2-(2-y)y$. 求曲线 $f(x,y)=0$ 所围图形绕直线 $y=-1$ 旋转所成旋转体的体积.

22、（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 3 & -4\\ 0 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 0 & -3\end{pmatrix}$, E 为3阶单位矩阵.

（I）求方程组 $Ax=0$ 的一个基础解系；

（II）求满足 $AB=E$ 的所有矩阵 B .

23、（本题满分 11 分）

证明：n 阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ 1 & 1 & \cdots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \cdots & 1\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}0 & \cdots & 0 & 1\\ 0 & \cdots & 0 & 2\\ \vdots & & \vdots & \vdots\\ 0 & \cdots & 0 & n\end{pmatrix}$ 相似.