

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题

一、选择题:1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合

题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1、当 $x \rightarrow 0^+$ 时, 若 $\ln^\alpha(1+2x)$, $(1-\cos x)^\frac{1}{\alpha}$ 均是比 x 高阶的无穷小, 则 α 的取值范围是 ()

- (A) $(2, +\infty)$ (B) $(1, 2)$ (C) $(\frac{1}{2}, 1)$ (D) $(0, \frac{1}{2})$

2、下列曲线中有渐近线的是 ()

- (A) $y = x + \sin x$ (B) $y = x^2 + \sin x$
(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$ (D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

3、设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0,1]$ 内 ()

- (A) 当 $f'(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$
(B) 当 $f'(x) \leq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$
(C) 当 $f''(x) \leq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$
(D) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

4、曲线 $\begin{cases} x = t^2 + 7, \\ y = t^2 + 4t + 1 \end{cases}$ 上对应于 $t=1$ 的点处的曲率半径是 ()

- (A) $\frac{\sqrt{10}}{50}$ (B) $\frac{\sqrt{10}}{100}$ (C) $10\sqrt{10}$ (D) $5\sqrt{10}$

5、设函数 $f(x) = \arctan x$, 若 $f(x) = xf'(\xi)$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\xi^2}{x^2} =$ ()

- (A) 1 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D) $\frac{1}{3}$

6、设函数 $u(x, y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 在 D 的内部具有 2 阶连续偏导数, 且满足

$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \neq 0$ 及 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, 则 ()

- (A) $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的边界上取得
- (B) $u(x, y)$ 的最大值和最小值都在 D 的内部取得
- (C) $u(x, y)$ 的最大值在 D 的内部取得, $u(x, y)$ 的最小值在 D 的边界上取得
- (D) $u(x, y)$ 的最小值在 D 的内部取得, $u(x, y)$ 的最大值在 D 的边界上取得

7、行列式
$$\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$$
 ()

- (A) $(ad - bc)^2$ (B) $-(ad - bc)^2$
- (C) $a^2d^2 - b^2c^2$ (D) $b^2c^2 - a^2d^2$

8、设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为 3 维向量, 则对任意常数 k, l , 向量组 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的 ()

- (A) 必要非充分条件
- (B) 充分非必要条件
- (C) 充分必要条件
- (D) 既非充分也非必要条件

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

9、 $\int_{-\infty}^1 \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx =$ _____.

10、设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x) = 2(x-1), x \in [0, 2]$, 则 $f(7) =$ _____.

11、设 $z = z(x, y)$ 是由方程 $e^{2yz} + x^2 + y^2 + z = \frac{7}{4}$ 确定的函数, 则 $dz|_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})} =$ _____.

12、曲线 L 的极坐标方程是 $r = \theta$, 则 L 在点 $(r, \theta) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 处的切线的直角坐标方程是 _____.

13、一根长为 1 的细棒位于 x 轴的区间 $[0, 1]$ 上, 若其线密度 $\rho(x) = -x^2 + 2x + 1$, 则该细棒的质心坐标 $\bar{x} =$ _____.

14、设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数为 1, 则 a 的取值范围是 _____.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15、（本题满分 10 分）

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x [t^2(e^{\frac{1}{t}} - 1) - t] dt}{x^2 \ln(1 + \frac{1}{x})}$$

16、（本题满分 10 分）

已知函数 $y = y(x)$ 满足微分方程 $x^2 + y^2 y' = 1 - y'$ ，且 $y(2) = 0$ ，求 $y(x)$ 的极大值与极小值。

17、（本题满分 10 分）

设平面区域 $D = \{(x, y) | 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ ，计算 $\iint_D \frac{x \sin(\pi \sqrt{x^2 + y^2})}{x + y} dx dy$ 。

18、（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数， $z = f(e^x \cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = (4z + e^x \cos y)e^{2x}$ 。

若 $f(0) = 0$ ， $f'(0) = 0$ ，求 $f(u)$ 的表达式。

19、（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ ， $g(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(x)$ 单调增加， $0 \leq g(x) \leq 1$ 。

证明：(I) $0 \leq \int_a^x g(t) dt \leq x - a$ ， $x \in [a, b]$ ；

$$(II) \int_a^{a+\int_a^b g(t) dt} f(x) dx \leq \int_a^b f(x) g(x) dx$$

20、（本题满分 11 分）

设函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ ， $x \in [0, 1]$ 。定义数列

$$f_1(x) = f(x), f_2(x) = f(f_1(x)), \dots, f_n(x) = f(f_{n-1}(x)), \dots$$

记 S_n 是由曲线 $y = f_n(x)$ ，直线 $x = 1$ 及 x 轴所围平面图形的面积，求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n S_n$ 。

21、（本题满分 11 分）

已知函数 $f(x, y)$ 满足 $\frac{\partial f}{\partial y} = 2(y+1)$ ，且 $f(y, y) = y + \frac{2}{3}y^3$ 。求曲线 $f(x, y) = 0$ 所

围图形绕直线 $y = -1$ 旋转所成旋转体的体积。

22、（本题满分 11 分）

设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系;

(II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B .

23、(本题满分 11 分)

证明: n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.