新东方 2015 考研数学二真题

一、选择题

(1) 下列反常积分中收敛的是（ ）

（A）$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx$ （B）$\int_2^{+\infty}\frac{\ln^x}{\sqrt{x}}dx$ (C) $\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln^x}dx$ （D) $\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx$

（2）函数 $f(x)=\lim\limits_{t\to0}(1+\frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

（A）连续 （B）有可去间断点 (C)有跳跃间断点 （D)有无穷间断点

（3）设函数 $f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\cos\frac{1}{x^{\beta}}, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$ $(\alpha>0,\beta>0)$ 若 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则

（A）$\alpha-\beta>1$ （B）$0<\alpha-\beta\le1$ (C) $\alpha-\beta>2$ （D) $0<\alpha-\beta\le2$

（4）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如右图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为：

（A）0 （B）1 (C) 2 （D) 3

（5）设函数 $f(u,v)$ 满足 $f(x+y,\frac{y}{x})=x^2-y^2$，则 $\frac{\partial f}{\partial u}\Big|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial v}\Big|_{\substack{u=1\\v=1}}$ 依次是

（A）$\frac{1}{2}$，0 （B）0，$\frac{1}{2}$ (C) $-\frac{1}{2},0$ （D) $0,-\frac{1}{2}$

(6)设 D 是第一象限中曲线 $2xy=1$,□$xy=1$ 与直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$

（A）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ （B）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$ （D）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$

（7）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$，若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多个解的充分必要条件为

（A）$a\notin\Omega, d\notin\Omega$ （B）$a\notin\Omega, d\in\Omega$ （C）$a\in\Omega, d\notin\Omega$ （D）$a\in\Omega, d\in\Omega$

（8）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Py$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $P=(e_1,e_2,e_3)$，若 $Q=(e_1,-e_3,e_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为

（A）$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$ （B）$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$ （C）$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$ （D）$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

二、填空题

（9）设$\begin{cases} x=\arctan t \\ y=3t+t^3 \end{cases}$，则$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=$

（10）函数$f(x)=x^2\cdot 2^x$在$x=0$处的n阶导数$f^{(n)}(0)=$

（11）设函数$f(x)$连续，$\varphi(x)=\int_0^{x^2} xf(t)dt$，若$\varphi(1)=1$，$\varphi'(1)=5$，则$f(1)=$

（12）设函数$y=f(x)$是微分方程$y''+y'-2y=0$的解，且在$x=0$处$y(x)$取得极值3，则$y(x)=$

（13）若函数$z=z(x,y)$由方程$e^{x+2y+3z}+xyz=1$确定，则$dz\big|_{(0,0)}=$

（14）设3阶矩阵A的特征值为2，-2，1，$B=A^2-A+E$，其中E为3阶单位矩阵，则行列式$|B|=$

三、解答题

（15）设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\cdot\sin x$，$g(x)=kx^2$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 是等价无穷小，求 a，b，k 值。

（16）设 $A>0$，D 是由曲线段 $y=A\sin x(0\le x\le \frac{\pi}{2})$ 及直线 $y=0$，$x=\frac{\pi}{2}$ 所围成的平面区域，V_1，V_2 分别表示 D 绕 x 轴与绕 y 轴旋转所成旋转体的体积，若 $V_1=V_2$，求 A 的值。

（17）已知函数 $f(x,y)$ 满足 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x$，$f'_x(x,0)=(x+1)e^x$，$f(0,y)=\quad +2y$，求 $f(x,y)$ 的极值。

（18）计算二重积分 $\iint\limits_D x(x+y)dxdy$，其中 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 2, y\ge x^2\}$。

（19）已知函数 $f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}\,dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}\,dt$，求 $f(x)$ 零点的个数。

（20）已知高温物体置于低温介质中，任一时刻物体温度对时间的变化　　　。该时刻物体和介质的温差成正比。现将一初始温度为 $120^\circ C$ 物体在 $20^\circ C$ 恒温介质中冷却，30min 后该物体温度降至 $30^\circ C$，若要将物体的温度继续降至 $21^\circ C$，还需冷却多长时间？

（21）已知函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上具有 2 阶导数，$f(a)=0$，$f'(x)>0$，　　，设 $b>a$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(b,\mathrm{f(b)})$ 处的切线与 x 轴的交点是 $(x_0,\quad)$。证明 $a<x_0<b$。

（22）设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$，且 $A^3=0$。

(I) 求 a 的值

(II) 若矩阵 X 满足 $X-XA^2-AX+AXA^2=E$，其中 E 为　阶单位矩阵，求 X。

（23）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & -3\\ -1 & 3 & -3\\ 1 & -2 & a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix}1 & -2 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 3 & 1\end{pmatrix}$

（I）求 a、b 的值

(II) 求可逆矩阵 P ，使 $P^{-1}AP$ 为对角矩阵。