

一、选择题

(1) 设 $\{x_n\}$ 是数列。下列命题中不正确的是

(A) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$ 。

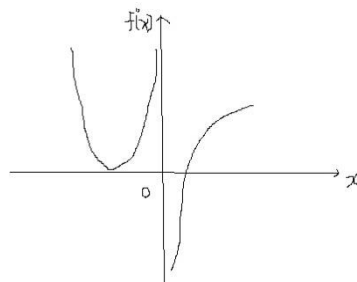
(B) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{2n+1} = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

(C) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$

(D) 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_{3n+1} = a$ 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$

(2) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如下图所示, 则曲线 $y = f(x)$ 的拐点个数为 :

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3



(3) 设 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 2x, x^2 + y^2 \leq 2y\}$, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续, 则

$$\iint_D f(x, y) dx dy =$$

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

(C) $2 \int_0^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^x f(x, y) dy$

(D) $2 \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y) dy$

(4) 下列级数中发散的是

(A) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ (B) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \ln(1 + \frac{1}{n})$

(C) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{\ln n}$ (D) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

(5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$, 若集合 $\Omega = \{1, 2\}$, 则线性方程组 $Ax = b$

有无穷多个解的充分必要条件为

(A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$ (B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$ (C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$ (D) $a \in \Omega, d \in \Omega$

(6) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Py$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$, 其中

$P = (e_1, e_2, e_3)$, 若 $Q = (e_1, e_3, e_2)$, 则 $f(x_1, x_2, x_3)$ 在正交变换 $x = Qy$ 下的标准形为

(A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$ (B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ (C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$ (D) $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

(7) 若 A, B 为任意两个随机事件, 则

(A) $P(AB) \leq P(A)P(B)$

(B) $P(AB) \geq P(A)P(B)$

(C) $P(AB) \leq \frac{P(A)+P(B)}{2}$

(D) $P(AB) \geq \frac{P(A)+P(B)}{2}$

(8) 设总体 $X \sim B(m, \theta)$, x_1, x_2, \dots, x_n 为来自该总体的简单随机样本, \bar{X} 为样本

均值, 则

$E[\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2] =$

(A) $(m-1)n\theta(1-\theta)$

(B) $m(n-1)\theta(1-\theta)$

(C) $(m-1)(n-1)\theta(1-\theta)$

(D) $mn\theta(1-\theta)$

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分

(9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(10) 设函数 $f(x)$ 连续, $\varphi(x) = \int_0^{x^2} xf(t)dt$, 若 $\varphi(1) = 5$, 则 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(11) 若函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $e^{x+2y+3z} + xyz = 1$ 确定, 则 $dz|_{(0,0)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(12) 设函数 $y = y(x)$ 是微分方程 $y'' + y' - 2y = 0$ 的解, 且在 $x = 0$ 处 $y(x)$ 取得极值 3, 则 $y(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

(13) 设 3 阶矩阵 A 的特征值为 2, -2, 1, $B = A^2 + A + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 则行列式 $|B| = \underline{\hspace{2cm}}$.

(14) 设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(1, 0; 1, 1; 0)$, 则 $P(X \neq Y) = \underline{\hspace{2cm}}$.

三、解答题：15-23 小题，共 94 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。（15）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x) = x + a \ln(1+x) + bx \sin x$ ， $g(x) = kx^3$ 。若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时是等价无穷小，求 a, b, k 的值。

（16）（本题满分 10 分）

计算二重积分 $\iint_D x(x+y) dx dy$ ，其中 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1, y \geq x^2\}$ 。

（17）（本题满分 10 分）

为了实现利润最大化，厂商需要对某商品确定其定价模型，设 Q 为该商品的需求量， P 为价格， MC 为边际成本， η 为需求弹性（ $\eta > 0$ ）。

（I）证明定价模型为 $P = \frac{MC}{1 - \frac{1}{\eta}}$ 。

（II）若该商品的成本函数为 $C(Q) = 1600 + Q^2$ ，需求函数为 $Q = 40 - P$ ，试由（I）中的定价模型确定此商品的价格。

（18）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0 \in I$ ，曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0))$ 处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成的区域的面积为 4，且 $f'(x_0) = 2$ 。

求 $f(x)$ 的表达式。

（19）（本题满分 10 分）

（I）设函数 $u(x), v(x)$ 可导，利用导数定义证明

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

（II）设函数 $u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)$ 可导， $f(x) = u_1(x)u_2(x)\dots u_n(x)$ ，写出 $f(x)$ 的求导公式。

(20)(本题满分11分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, 且 $A^3 = 0$.

(I) 求 a 的值.

(II) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, 其中 E 为三阶单位矩阵, 求 X .

(21)(本题满分11分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

(I) 求 a, b 的值.

(II) 求可逆矩阵 P , 使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

(22)(本题满分11分)

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x} \ln 2 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数.

(I) 求 Y 的概率分布;

(II) 求 EY .

(23)(本题满分11分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases} \frac{1}{1-\theta} & \theta \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

其中 θ 为未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自该总体的简单随机样本.

(I) 求 θ 的矩估计.

(II) 求 θ 的最大似然估计.

