2015 年新东方版考研数学二答案

（1）选 D

（A）$\int_2^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\Big|_2^{+\infty}=+\infty$，发散

（B）$\int_2^{+\infty}\frac{\ln x}{x}dx=\frac{1}{2}(\ln x)^2\Big|_2^{+\infty}=+\infty$，发散

（C）$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\ln x}dx=\ln\ln x\Big|_2^{+\infty}=+\infty$，发散

（D）当 x 足够大时，$\frac{x}{e^x}<\frac{1}{x^2}$，$\int_2^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx$ 收敛，$\int_2^{+\infty}\frac{x}{e^x}dx$ 收敛

（2）选 B

当 $x\neq 0$ 时，$f(x)=\lim\limits_{t\to 0}(1+\frac{\sin t}{x})^{\frac{x^2}{t}}=\lim\limits_{t\to 0}(1+\frac{\sin t}{x})^{\frac{x}{\sin t}\frac{\sin t}{x}\frac{x^2}{t}}=e^x$

（3）选 A

$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}$ 存在

所以 $\alpha-1>0$，且 $f'(0)=0$

$f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}\cos\frac{1}{x^\beta}+\beta x^{\alpha-\beta-1}\sin\frac{1}{x^\beta}$

由 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)=f'(0)=0$，得 $\alpha-\beta-1>0$，$\alpha-\beta>1$

（4）选 C

由图易知，拐点为原点和与 x 正半轴的交点，所以拐点数为 2

（5）选 D

法一：$u=x+y,v=\frac{y}{x}$

所以 $x=\frac{u}{v+1},y=\frac{uv}{v+1}$

所以 $f(u,v)=\frac{u^2}{(v+1)^2}-\frac{u^2v^2}{(v+1)^2}=\frac{u^2(1-v)}{v+1}$

$\frac{\partial f}{\partial u}=\frac{2u(1-v)}{v+1}$，$\frac{\partial f}{\partial v}=u^2\frac{-2}{(v+1)^2}$

$\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=0$，$\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=-\frac{1}{2}$

法二：$f(x+y,\frac{x}{y})=x^2-y^2$ （1）

（1）式对 x 求导得，$\frac{\partial f}{\partial u}-\frac{y}{x^2}\frac{\partial f}{\partial v}=2x$ （2）

（1）式对 y 求导得，$\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{1}{x}\frac{\partial f}{\partial v}=-2y$ （3）

由 $u=1,v=1$，得 $x=y=\frac{1}{2}$，代入（2）（3）

解得 $\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=0$，$\left.\frac{\partial f}{\partial v}\right|_{\substack{u=1\\v=1}}=-\frac{1}{2}$

（6）选 B

由 $y=x$ 得，$\theta=\frac{\pi}{4}$

由 $y=\sqrt{3}x$ 得，$\theta=\frac{\pi}{3}$

由 $2xy=1$ 得，$2r^2\cos\theta\sin\theta=1,\ r=\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}$

由 $4xy=1$ 得，$4r^2\cos\theta\sin\theta=1,\ r=\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}$

所以 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}}f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

（7）解析：

$$[A,b]=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{bmatrix}$$

$Ax=b$有无穷多解 $\leftrightarrow$ R(A)=R(A, b)<3

$\leftrightarrow a=1$或$a=2$且$d=1$或$d=2$，故选（D）

（8）

设二次型对应的矩阵为A，$P=(e_1,e_2,e_3)$，二次型在正交变换$x=Py$下的标准型为

$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，则$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}$，若$Q=(e_1,-e_3,e_2)$，则

$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}2&&\\&-1&\\&&1\end{bmatrix}$，

故在正交变换$x=Qy$下的标准型为：$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$，故选（A）。

（9）答案： 48.

解： $\frac{dy}{dx}=\frac{dy/dt}{dx/dt}=\frac{3+3t^2}{\frac{1}{1+t^2}}=3(1+t^2)^2$，

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx/dt}=\frac{12t(1+t^2)}{\frac{1}{1+t^2}}=12t(1+t^2)^2，$$

新东方 XDF.CN 考研 kaoyan.xdf.cn

因此，$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{t=1}=12\cdot1\cdot4=48$.

（10）答案： $n(n-1)(\ln 2)^{n-2}$.

解： $f^{(n)}(x)=\left(2^x\cdot x^2\right)^{(n)}$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0)=C_n^2\left(x^2\right)''\left(2^x\right)^{(n-2)}\Big|_{x=0}=\frac{n(n-1)}{2}\cdot2\cdot2^x\cdot(\ln 2)^{n-2}\Big|_{x=0}$$

新东方 XDF.CN 考研 kaoyan.xdf.cn

$$=n(n-1)(\ln 2)^{n-2}.$$

11.

新东方 XDF.CN 考研 kaoyan.xdf.cn

$\varphi'(x)=x\int_0^{x^2}f(t)dt$

$\varphi'(x)=\int_0^{x^2}f(t)dt+x\cdot2x\cdot f(x^2)$

$\varphi'(1)=\int_0^1 f(t)dt+2f(1)=5$

$\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt=1$

新东方 XDF.CN 考研 kaoyan.xdf.cn

$\Rightarrow f(1)=2$

12.

通解是 $y=c_1e^{-2x}+c_2e^x$

$y(0)=3=c_1+c_2=3$

$y'(0)=0=-2c_1+c_2=0$

$\Rightarrow c_1=1,c_2=2$

$\Rightarrow y=e^{-2x}+2e^x$

13.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy, x=0 \quad y=0 \quad z=0$$

两边对 x 求导

$$e^{x+2y+3z}\cdot(3\frac{\partial z}{\partial x}+1)+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

代入 $x=0, y=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}|_{x=0}=-\frac{1}{3}$$

两边对 y 求导

$$e^{x+2y+3z}\cdot(3\frac{\partial z}{\partial y}+2)+xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

代入 $x=0, y=0$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}|_{y=0}=-\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow dz|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy$$

(14)

A的特征值为2,-2,1，又由于$B=A^2-A+E$,
所以B的特征值为3,7,1，故$|B|=21$。

(15)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= x + a\ln(1+x) + bx\cdot\sin x \\
&= x + a\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right]+bx\left[x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right] \\
&= (1+a)x+\left(-\frac{a}{2}+b\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o\left(x^3\right)
\end{aligned}
$$

$\therefore f(x)$与$g(x)=kx^3$是等价无穷小

$$
\therefore \begin{cases} 1+a=0 \\ -\dfrac{a}{2}+b=0 \\ \dfrac{a}{3}=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=-\dfrac{1}{2} \\ k=-\dfrac{1}{3} \end{cases}
$$

16．解：

由题意得：

$$V_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\cdot\left(A\sin x\right)^2dx$$

$$V_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi\cdot x\cdot\left(A\cdot\sin x\right)dx$$

$$\because V_1=V_2$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}\pi\cdot\left(A\sin x\right)^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\pi\cdot x\cdot\left(A\cdot\sin x\right)dx$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}}A\sin^2 xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2x\cdot\sin xdx$$

得

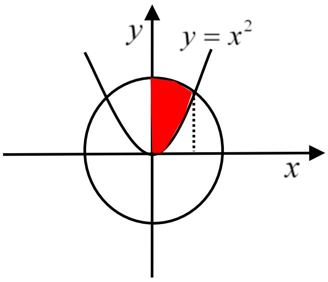
$$A\cdot\left(\frac{x-\frac{1}{2}\sin 2x}{2}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=2\cdot\left(-x\cos x+\sin x\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

得：$A=\dfrac{8}{\pi}$

（17）已知函数 $f(x,y)$满足 $f''_{xy}(x,y)=2(y+1)e^x$，$f'_x(x,0)=(x+1)e^x$，$f(0,y)=\quad +2y$，求 $f(x,y)$的极值。题干缺条件，无正解。

18. $\because D$关于 y 轴对称，xy 关于 x 为奇函数，

$\therefore \iint\limits_{D}(x^2+xy)d\sigma=\iint\limits_{D}x^2d\sigma=2\iint\limits_{D^+}x^2d\sigma$（ D^+ 为 D 在第 1 象限的部分）



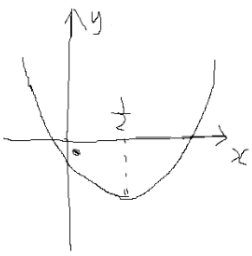
$$=2\int_0^1 x^2dx\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}}dy=2\int_0^1 x^2(\sqrt{1-x^2}-x^2)d$$

$$=2\left[\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}-\int_0^1 x^4dx\right]=2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx-\frac{2}{5}$$

$$\overset{x=\sin t}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos^2 tdt-\frac{2}{5}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot(1-\sin^2 t)dt-\frac{2}{5}$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{2}{5}.$$

19．解：



新东方 XDF.CN 考研 kaoyan.xdf.cn

$\because f(x)=\int_x^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{x^2}\sqrt{1+t}dt$

$\therefore f'(x)=-\sqrt{1+x^2}+2x\cdot\sqrt{1+x^2}=\sqrt{1+x^2}(2x-1)$

令$f'(x)=0$

$\therefore x=\dfrac{1}{2}$

$$\begin{cases} x>\dfrac{1}{2}\text{时}, & f'(x)>0 \\ x<\dfrac{1}{2}\text{时}, & f'(x)<0 \end{cases}$$

$\therefore f(\frac{1}{2})$为极小值

$f(\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+t}dt$

$\because \int_1^{\frac{1}{4}}\sqrt{1+t}dt=-\int_{\frac{1}{4}}^1\sqrt{1+t}dt\overset{t=u^2}{=}-\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{1+u^2}\cdot 2udu$

$\therefore f(\frac{1}{2})=\int_{\frac{1}{2}}^2(1-2u)\sqrt{1+u^2}du<0$

$\because f(+\infty)=\int_{+\infty}^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{+\infty}\sqrt{1+t^2}dt=-\int_1^{+\infty}\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{+\infty}\sqrt{1+u^2}\cdot 2udu$

$\qquad =\int_1^{+\infty}(2u-1)\sqrt{1+u^2}du>0$

$f(-\infty)=\int_{-\infty}^1\sqrt{1+t^2}dt+\int_1^{+\infty}\sqrt{1+t}dt>0$

$\therefore$由图知$f(x)=0$有2个根

新东方 XDF.CN 考研 kaoyan.xdf.cn

20.解：令物体在 t 时刻温度为 $f(t)$,

依题意知，$f'(t)=k[f(t)-20]$

$f'(t)-kf(t)=-20t$,

所以，$e^{-kt}f(t)=\int -20ke^{-kt}dt\ \ 20e^{-kt}+$

故$f(t)=20+ce^{kt}$

而$f(0)=120, f(30)=30\Rightarrow c=100, k=-\dfrac{\ln 10}{30}$

所以$f(t)=20+100\cdot 10^{-\frac{t}{30}}$

令$f(t)=21$,解得 $t=60$

所以物体温度继续降至21°C，还需冷却30分钟。

(21)

$\because$ $y=f(x)$ 在 $(b,f(b))$ 处的切线方程为： $y-f(b)=f'(b)(x-b)$

$\therefore$ 交点 $(x_0,0)=(b-\dfrac{f(b)}{f'(b)},0)$

$\because$ $f'(x)>0$ ， $f(a)=0$ $\therefore$ $f(b)>f(a)=0$ ，即 $f(b)>0$

又 $f'(x)>0$ $\therefore$ $f'(b)>0$ ，

$\therefore$ $\dfrac{f(b)}{f'(b)}>0$ $\therefore$ $x_0=b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}<b$.

下证： $x_0>a$ ，即证明： $b-\dfrac{f(b)}{f'(b)}>a$ 成立.

$\because$ $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导， $\therefore$ $f(b)-f(a)\overset{L}{=}f'(\xi)(b-a)$ $\xi\in(a,b)$

$\therefore$ $f(b)=f'(\xi)(b-a)$.

$\because$ $f''(x)>0$ ， $\therefore$ $f'(x)$ 单调递增， $\therefore$ $f'(\xi)<f'(b)$

$\therefore$ $f(b)=f'(\xi)(b-a)<f'(b)(b-a)$ ， $\therefore$ $b-a>\dfrac{f(b)}{f'(b)}$ ，

$\therefore$ $a<x_0<b$.

22

解:(1) $A^3=0,|A|=0.$ 则 $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}=0,$ 解得 $a=0$

(2) $(E-A)X(E-A^2)=E,$ 故 $X=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}$

$$E-A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(E-A^2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix},(E-A^2)^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

23.

$$\text{解:由}A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}\text{相似于}B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$$

$$\text{则}\begin{cases}0+3+a=1+b+1\\ \begin{vmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{vmatrix},\end{cases}\quad\text{解得,}\ a=4,b=5$$

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&3\\1&\lambda-3&3\\-1&2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-5)=0$$

当$\lambda_1=\lambda_2=1$,

$$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\text{特征向量}\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$\text{当}\lambda_3=5,(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}5&-2&3\\1&2&3\\-1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&1\\5&-2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$\text{则特征向量}\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$\text{所以}P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix},\text{得}P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$