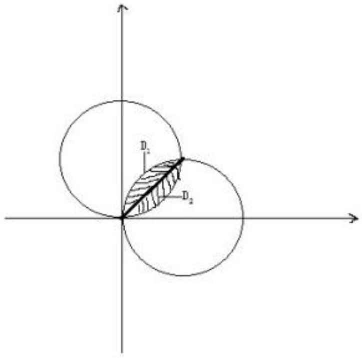
2015 年新东方版考研数学（三）答案解析

（1）D　举反例：$x_n = \begin{cases} a & n=3t \\ a & n=3t+1 \\ 0 & n=3t+2 \end{cases}$

（2）C　拐点为 $f''(x)$ 正负发生变化的点



（3）B　$\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\,dxdy + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\,dxdy$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{2\sin\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdr + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2\cos\theta} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\, rdr$$

（4）C　$\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n+1}{\ln n} = 2\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln 2n}$，

$\lim\limits_{n\to\infty} n\frac{(-1)^n+1}{\ln n} = \lim\limits_{n\to\infty} n[(-1)^n+1] = 0$ 或 ∞

（5）解析：

$$[A,b] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a & d \\ 1 & 4 & a^2 & d^2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a-1 & d-1 \\ 0 & 0 & (a-1)(a-2) & (d-1)(d-2) \end{bmatrix}$$

$Ax=b$ 有无穷多解 $\leftrightarrow$ R(A)=R(A, b)<3

$\leftrightarrow a=1$ 或 $a=2$ 且 $d=1$ 或 $d=2$，故选（D）

（6）解析：

设二次型对应的矩阵为 A, $P=(e_1,e_2,e_3)$，二次型在正交变换 $x=Py$ 下的标准型为

$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，则 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$，若 $Q=(e_1,-e_3,e_2)$，则

$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix} 2 & & \\ & -1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}$，

故在正交变换 $x=Qy$ 下的标准型为：$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$，故选（A）。

7.

$\because P(A)\geq P(AB),P(B)\geq P(AB)$

$\therefore P(A)+P(B)\geq 2P(AB)$

$\therefore P(AB)\leq \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

选C

8.

$\because X\sim B(\mathrm{m},\ \theta)\therefore EX=\mathrm{m}\theta,\ DX=\mathrm{m}\theta(1-\theta)$

$$E(\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)^2)=(n-1)E(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-X)^2)=(n-1)E(s^2)=(n-1)DX=(n-1)\mathrm{m}\theta(1-\theta)$$

选 B

9，解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

10.

$$\varphi'(x)=x\int_0^{x^2}f(t)dt$$

$$\varphi'(x)=\int_0^{x^2}f(t)dt+x\cdot 2x\cdot f(x^2)$$

$$\varphi'(1)=\int_0^1 f(t)dt+2f(1)=5$$

$$\varphi(1)=\int_0^1 f(t)dt=1$$

$$\Rightarrow f(1)=2$$

11、$dz=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy, x=0 \quad y=0 \quad z=0$

两边对 x 求导

$$e^{x+2y+3z}\cdot(3\frac{\partial z}{\partial x}+1)+yz+xy\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

代入 $x=0, y=0$

$$\frac{\partial z}{\partial x}|_{x=0}=-\frac{1}{3}$$

两边对 y 求导

$$e^{x+2y+3z}\cdot(3\frac{\partial z}{\partial y}+2)+xz+xy\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

代入 $x=0, y=0$

$$\Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y}|_{y=0}=-\frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow dz|_{(0,0)}=-\frac{1}{3}dx-\frac{2}{3}dy$$

12、通解是 $y=c_1e^{-2x}+c_2e^x$

$y(0)=3=c_1+c_2=3$
$y'(0)=0=-2c_1+c_2=0$
$\Rightarrow c_1=1, c_2=2$
$\Rightarrow y=e^{-2x}+2e^{x}$

13、

A的特征值为2,-2,1，又由于$B=A^2-A+E$,
所以B的特征值为3,7,1，故$|B|=21$。

14.

$\because (X,Y)\sim N(1,0,1,1,0)$
$\therefore X\sim N(1,1), Y\sim N(0,1)$,且$X,Y$独立
$\therefore X-1\sim N(0,1)$

$$P\{XY-Y<0\}=P\{(X-1)Y<0\}=P\{X-1<0,Y>0\}+P\{X-1>0，Y<0\}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

15、

$$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\cdot\sin x$$

$$=x+a\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right]+bx\left[x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right]$$

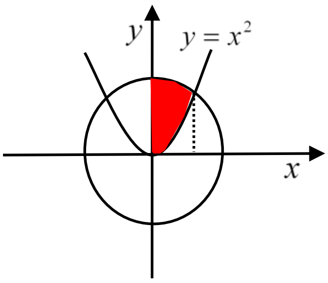
$$=(1+a)x+\left(-\frac{a}{2}+b\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o\left(x^3\right)$$

$\therefore f(x)$与$g(x)=kx^3$是等价无穷小

$$\therefore\begin{cases}1+a=0\\ -\dfrac{a}{2}+b=0\\ \dfrac{a}{3}=k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\ b=-\dfrac{1}{2}\\ k=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

16、$\because D$关于y轴对称，xy关于x为奇函数，

$\therefore \iint\limits_D (x^2+xy)d\sigma=\iint\limits_D x^2 d\sigma=2\iint\limits_{D^+} x^2 d\sigma$（$D^+$为$D$在第1象限的部分）



$$=2\int_0^1 x^2dx\int_{x^2}^{\sqrt{1-x^2}}dy=2\int_0^1 x^2\left(\sqrt{1-x^2}-x^2\right)d$$

$$=2\left[\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}-\int_0^1 x^4dx\right]=2\int_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}dx-\frac{2}{5}$$

$$\overset{x=\sin t}{=}2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot\cos^2 tdt-\frac{2}{5}=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 t\cdot(1-\sin^2 t)dt-\frac{2}{5}$$

$$=\frac{\pi}{8}-\frac{2}{5}.$$

17．

（1）L(Q) = R(Q) − C(Q)，∴利润最大时，L'(Q) = 0 ，∴ R'(Q)=C'(Q) ,即 $R'(Q)=MC$

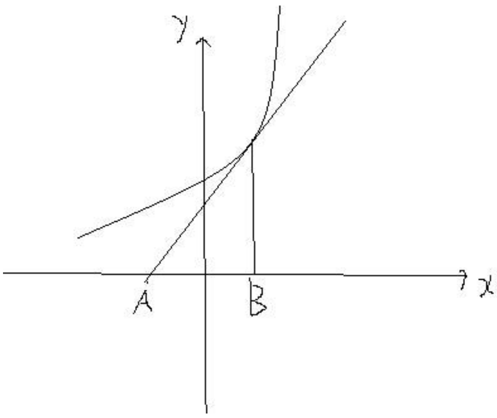
$\because R=PQ$，$\therefore R'(Q)=\dfrac{d(PQ)}{dP}\dfrac{dP}{dQ}=(Q+PQ')\cdot\dfrac{1}{Q'}=\dfrac{Q}{Q'}+P$

又∵ $\eta = -\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}$ ，∴ $\frac{Q}{Q'} = -\frac{P}{\eta}$ ，代入上式有：$-\frac{P}{\eta}+P=MC$ ，∴ $P=\frac{MC}{1-\frac{1}{\eta}}$

（2）∵ $C(Q)=1600+Q^2$ ，∴ $C'(Q)=2Q$ ，∴ $MC=2(40-P)$ ，代入（1）问结论有：$P=\frac{MC}{1-\frac{1}{\eta}}=\frac{2(40-P)}{1-\frac{1}{\eta}}$ ，又 $|\eta|=\frac{P}{Q}\frac{dQ}{dP}=\frac{P}{40-P}$ ∴ $P=\frac{2(40-P)}{1-\frac{40-P}{P}}$ ，

∴ $1=\frac{40-P}{P-20}$ ，∴ $P=30$

18 如下图：



$x=x_0$ 处的切线方程为 l ：$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

l 与 x 轴的交点为：$y=0$ 时，$x=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ ，

则 $|AB|=\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=x-x_0$ ，

因此，$S=\frac{1}{2}|AB|\cdot f(x_0)=\frac{1}{2}\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}f(x_0)=4$.

即满足微分方程：$\frac{y'}{y^2}=\frac{1}{8}$ ，解得：$\frac{1}{y}=-\frac{1}{8}x+c$.

又因 $y(0)=2$ ，所以 $c=\frac{1}{2}$ ，故 $y=\frac{8}{4-x}$.

19.证明

（1）

$$\left[u(x)\cdot v(x)\right]' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]\cdot v(x+\Delta x)+u(x)\cdot\left[v(x+\Delta x)-v(x)\right]}{\Delta x}$$
$$=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

（2）

$$f'(x)=\left\{u_1(x)\cdot\left[u_2(x)\cdots u_n(x)\right]\right\}'$$
$$=u_1'(x)\cdot\left[u_2(x)\cdots u_n(x)\right]+u_1(x)\cdot\left[u_2(x)\cdots u_n(x)\right]'$$
$$=u_1'(x)\cdot u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)\cdot\left\{u_2(x)\cdot\left[u_3(x)\cdots u_n(x)\right]\right\}'$$
$$\cdots$$
$$=u_1'(x)\cdot u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)\cdot u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)\cdot u_2(x)\cdots u_n'(x)$$

20.

解:$(1)A^3=0,|A|=0.$则$\begin{vmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{vmatrix}=0$, 解得$a=0$

$(2)(E-A)X(E-A^2)=E$，故$X=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}$

$$E-A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&1&1\\0&-1&1\end{pmatrix},(E-A)^{-1}=\begin{pmatrix}2&1&-1\\1&1&-1\\1&1&0\end{pmatrix}$$

$$(E-A^2)=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\-1&0&2\end{pmatrix},(E-A^2)^{-1}=\begin{pmatrix}2&0&-1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$X=(E-A)^{-1}(E-A^2)^{-1}=\begin{pmatrix}3&1&-2\\1&1&-1\\2&1&-1\end{pmatrix}$$

21、

$$解:由A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}相似于B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$$

$$则\begin{cases}0+3+a=1+b+1\\ \begin{vmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{vmatrix}\end{cases},\quad 解得，a=4,b=5$$

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&3\\1&\lambda-3&3\\-1&2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-5)=0$$

$当\lambda_1=\lambda_2=1,$

$$(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$特征向量\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix},$$

$$当\lambda_3=5,(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}5&-2&3\\1&2&3\\-1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&1\\5&-2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$则特征向量\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix},$$

$$所以P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix},得P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$$

22.

解： $P\{x>3\}=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln^2 dx=\frac{1}{8}$

（Ⅰ） $P\{Y=k\}=C_{k-1}^1(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{k-2}=(k-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{k-2},k=2,3,4....$

（Ⅱ） $EY=\sum_{K=2}^{+\infty}k(k-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{k-2}=\frac{1}{64}\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)(\frac{7}{8})^{k-2}$

$$设级数S(x)=\frac{1}{64}\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)x^{k-2}=\left[\frac{1}{64}\sum_{k=2}^{+\infty}x^k\right]''=\frac{1}{64}\times\frac{2}{(1-x)^3}$$

$S(\frac{7}{8})=1$ 所以 $EY=S(\frac{7}{8})=16$

23.

解：由题可得

（1）

$$EX=\int_{\theta}^{1}\frac{x}{1-\theta}dx=\frac{1}{1-\theta}\cdot\frac{x^2}{2}|_{\theta}^{1}=\frac{1+\theta}{2}$$

$$\frac{1+\hat{\theta}}{2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i-1$$

（2）联合概率密度

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\frac{1}{(1-\theta)^n},\theta\le x_i\le 1$$

$\ln f=-n\ln^{(1-\theta)}$　　$\frac{d\ln f}{d\theta}=\frac{n}{1-\theta}>0$，故取

$$\hat{\theta}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$$