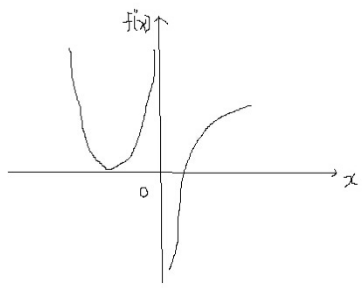
一、选择题

（1）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如下图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为（　　）

（A）0　（B）1　(C) 2　(D) 3



（2）设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解，则：

(A) $a=-3, b=-1, c=-1.$

(B) $a=3, b=2, c=-1.$

(C) $a=-3, b=2, c=1.$

(D) $a=3, b=2, c=1.$

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$ 的：

(A) 收敛点，收敛点.

(B) 收敛点，发散点.

(C) 发散点，收敛点.

(D) 发散点，发散点.

（4）设 D 是第一象限中曲线 $2xy=1, 4xy=1$ 与直线 $y=x, y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=$

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$ (B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$ (D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta) dr$

(5)设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$，若集合 $\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多个解的充分必要条件为

(A) $a\notin\Omega, d\notin\Omega$ (B) $a\notin\Omega, d\in\Omega$ (C) $a\in\Omega, d\notin\Omega$ (D) $a\in\Omega, d\in\Omega$

(6)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Py$ 下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中 $P=(e_1,e_2,e_3)$，若 $Q=(e_1,-e_3,e_2)$，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为

(A) $2y_1^2-y_2^2+y_3^2$ (B) $2y_1^2+y_2^2-y_3^2$ (C) $2y_1^2-y_2^2-y_3^2$ (D) $2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

(7)若 A,B 为任意两个随机事件，则

(A) $P(AB)\le P(A)P(B)$ (B) $P(AB)\ge P(A)P(B)$

(C) $P(AB)\le \frac{P(A)+P(B)}{2}$ (D) $P(AB)\ge \frac{P(A)+P(B)}{2}$

(8)设随机变量X, Y不相关，且 $EX=2, EY=1, DX=3$，则 $E\left[X\left(X+Y-2\right)\right]=$

(A) -3 (B)3 (C) -5 (D)5

二、填空题

(9) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=$ ______

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)dx=$ ______

(11)若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^x+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $dz|_{(0,1)}=$ ______.

(12) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域，则

$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz$ = ______

(13) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}$ = ______

(14) 设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1;0)$，则

$P(XY-Y<0)=$ ______.

三、解答题

(15)设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\cdot\sin x$，$g(x)=kx^3$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 是等价无穷小，求 a，b，k 值。

(16) 设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成的区域的面积为 4，且 $f(0)=2$，**求** $f(x)$ **的表达式。**

(17) 已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 $C:x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

(18) **(本题满分 10 分)**

(Ⅰ) 设函数 $u(x),v(x)$ 可导，利用导数定义证明

$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v(x)'$

(Ⅱ) 设函数 $u_1(x),u_2(x)\ldots u_n(x)$ 可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\ldots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式.

(19) **(本题满分 10 分)**

已知曲线L的方程为$\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases}$起点为$A(0,\sqrt{2},0)$，终点为$B(0,-\sqrt{2},0)$，

计算曲线积分$I=\int_L (y+z)dx+(z^2-x^2+y)dy+(x^2+y^2)dz$

（20）（本题满分 11 分）

设向量组$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$是 3 维向量空间$\mathbb{R}^3$的一个基，$\beta_1=2\alpha_1+2k\alpha_3$，$\beta_2=2\alpha_2$，$\beta_3=\alpha_1+(k+1)\alpha_3$。

（Ⅰ）证明向量组β_1,β_2,β_3是$\mathbb{R}^3$的一个基；

（Ⅱ）当 k 为何值时，存在非零向量ξ在基$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$与基$\beta_1,\beta_2,\beta_3$下的坐标相同，并求出所有的$\xi$。

（21）（本题满分 11 分）

设矩阵$A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$相似于矩阵$B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求a,b的值.

（Ⅱ）求可逆矩阵P，使得$P^{-1}AP$为对角阵.

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} 2^{-x}\ln 2 & x>0 \\ 0 & x\le 0 \end{cases}$$

对X进行独立重复的观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止，记Y为观测次数.

（Ⅰ）求Y的概率分布；

（Ⅱ）求 EY .

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta} & \theta\le x\le 1\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，$X_1, X_2 .....X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

（Ⅰ）求 θ 的矩估计.

（Ⅱ）求 θ 的最大似然估计.