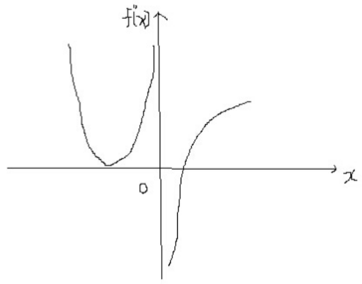
新东方版 2015 年考研数学（一）答案解析

一、选择题

（1）设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续，其 2 阶导函数 $f''(x)$ 的图形如下图所示，则曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为（ ）

（A）0 （B）1 （C）2 （D）3



【答案】C

【解析】 拐点为 $f''(x)$ 正负发生变化的点

（2）设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+\left(x-\frac{1}{3}\right)e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解，则：

(A) $a=-3,b=-1,c=-1.$
(B) $a=3,b=2,c=-1.$
(C) $a=-3,b=2,c=1.$
(D) $a=3,b=2,c=1.$

【答案】（A）

【解析】

$\frac{1}{2}e^{2x},-\frac{1}{3}e^{x}$ 为齐次方程的解，所以2、1为特征方程 $\lambda^2+a\lambda+b=0$ 的根，
从而 $a=-(1+2)=-3,b=1\times2=2,$ 再将特解 $y=xe^{x}$ 代入方程 $y''-3y'+2y=ce^{x}$ 得：
$c=-1.$

(3)若级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，则$x=\sqrt{3}$与$x=3$依次为幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$的：

(A)收敛点，收敛点.

(B)收敛点，发散点.

(C)发散点，收敛点.

(D)发散点，发散点.

【答案】B

【解析】

因为$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$条件收敛，故$x=2$为幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$的条件收敛点，进而得$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$的收敛半径为1，收敛区间为$(0,2)$；又由于幂级数逐项求导不改变收敛区间，故$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$的收敛区间仍为$(0,2)$，因而$x=\sqrt{3}$与$x=3$依次为幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} na_n(x-1)^n$的收敛点，发散点.

$\sqrt{\ }$

（4）设 D 是第一象限中曲线$2xy=1, 4xy=1$与直线$y=x, y=\sqrt{3}x$围成的平面区域，函数$f(x,y)$在 D 上连续，则$\iint_D f(x,y)dxdy=$

（A）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$ （B）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr$ （D）$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr$

【答案】B

【解析】由$y=x$得，$\theta=\frac{\pi}{4}$

由$y=\sqrt{3}x$得，$\theta=\frac{\pi}{3}$

由$2xy=1$得，$2r^2\cos\theta\sin\theta=1, r=\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}$

由$4xy=1$得，$4r^2\cos\theta\sin\theta=1, r=\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}$

所以$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta\int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$

（5）设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$，若集合$\Omega=\{1,2\}$，则线性方程组$Ax=b$有无穷多个解的充分必要条件为

（A）$a\notin\Omega,d\notin\Omega$ （B）$a\notin\Omega,d\in\Omega$（C）$a\in\Omega,d\notin\Omega$（D）$a\in\Omega,d\in\Omega$

【答案】D

【解析】$[A,b]=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&2&a&d\\1&4&a^2&d^2\end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&a-1&d-1\\0&0&(a-1)(a-2)&(d-1)(d-2)\end{bmatrix}$

$Ax=b$有无穷多解$\leftrightarrow R(A)=R(A,b)<3$

$\leftrightarrow a=1$或$a=2$且$d=1$或$d=2$

（6）设二次型$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$x=Py$下的标准形为$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$，其中$P=(e_1,e_2,e_3)$，若$Q=(e_1,-e_3,e_2)$，则$f(x_1,x_2,x_3)$在正交变换$x=Qy$下的标准形为

（A）$2y_1^2-y_2^2+y_3^2$ （B）$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$ （C）$2y_1^2-y_2^2-y_3^2$（D）$2y_1^2+y_2^2+y_3^2$

【答案】A

【解析】设二次型对应的矩阵为A, $P=(e_1,e_2,e_3)$,二次型在正交变换$x=Py$下的标准行为$2y_1^2+y_2^2-y_3^2$,则$P^{-1}AP=\begin{bmatrix}2&&\\&1&\\&&-1\end{bmatrix}$,若$Q=(e_1,-e_3,e_2)$,则

$Q^{-1}AQ=\begin{bmatrix}2&&\\&-1&\\&&1\end{bmatrix}$,故在正交变换$x=Qy$下的标准型是：$2y_1^2$-$y_2^2$+$y_3^2$,故选$A$。

（7）若A,B为任意两个随机事件，则

（A）$P(AB)\le P(A)P(B)$ （B）$P(AB)\ge P(A)P(B)$

（C） $P(AB) \le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$ （D） $P(AB) \ge \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

【答案】C

【解析】$\because P(A) \ge P(AB), P(B) \ge P(AB)$

$\therefore P(A)+P(B) \ge 2P(AB)$

$\therefore P(AB) \le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$

故选（C）

(8)设随机变量X, Y不相关，且$EX=2, EY=1, DX=3$,则$E\left[X\left(X+Y-2\right)\right]=$

(A)-3 (B)3 (C)-5 (D)5

【答案】D

【解析】

$$E\left[X\left(X+Y-2\right)\right]=E\left[X^2+XY-2X\right]=E\left(X^2\right)+E\left(XY\right)-2E\left(X\right)$$
$$=D\left(X\right)+E^2\left(X\right)+E\left(X\right)E\left(Y\right)-2E\left(X\right)=5$$

二、填空题

（9）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$ ______

【答案】$-\dfrac{1}{2}$

【解析】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\dfrac{1}{2}$

（10）$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+|x|)dx=$ ______

【答案】$\dfrac{\pi^2}{4}$

【分析】此题考查定积分的计算，需要用奇偶函数在对称区间上的性质化简.

【解析】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\,dx=\frac{\pi^2}{4}$

（11）若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^x+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $dz\big|_{(0,1)}=$ ________ .

【答案】 -dx

（12）设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面所围成的空间区域，则

$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=$ ________

【答案】 $\frac{1}{4}$

【分析】此题考查三重积分的计算，可直接计算，也可以利用轮换对称性化简后再计算

【解析】由轮换对称性，得

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\,dx\,dy\,dz=6\iiint\limits_{\Omega}z\,dx\,dy\,dz=6\int_0^1 z\,dz\iint\limits_{D_z}dx\,dy$$

其中 D_z 为平面 $z=z$ 截空间区域 Ω 所得的截面，其面积为 $\frac{1}{2}(1-z)^2$.所以

$$\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)\,dx\,dy\,dz=6\iiint\limits_{\Omega}z\,dx\,dy\,dz=6\int_0^1 z\cdot\frac{1}{2}(1-z)^2\,dz=3\int_0^1\left(z^3-2z^2+z\right)dz=\frac{1}{4}$$

（13）n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}=$ ________

【答案】 $2^{n+1}-2$

【解析】按第一行展开得

$$D_n=\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ & & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}=2D_{n-1}+(-1)^{n-1}=2D_{n-1}+2$$

$$=2(2D_{n-2}+2)+2=2^2D_{n-2}+2^2+2=2^n+2^{n-1}+\cdots+2$$

$=2^{n+1}-2$

（14）设二维随机变量(X,Y)服从正态分布$N(1,0;1,1;0)$，则$P(XY-Y<0)=$______.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】

$\because (X,Y)\sim N(1,0,1,1,0)$

$\therefore X\sim N(1,1), Y\sim N(0,1)$, 且$X,Y$独立

$\therefore X-1\sim N(0,1)$

$$P\{XY-Y<0\}=P\{(X-1)Y<0\}$$

$$=P\{X-1<0,Y>0\}+P\{X-1>0,\ Y<0\}$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

三、解答题

（15）设函数$f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\cdot\sin x$，$g(x)=kx^3$，若$f(x)$与$g(x)$在$x\to 0$是等价无穷小，求$a$，$b$，$k$值。

【解析】 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\cdot\sin x$

$$=x+a\left[x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)\right]+bx\left[x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right]$$

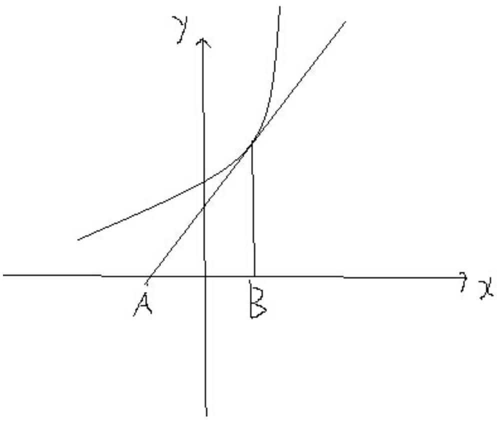
$$=(1+a)x+\left(-\frac{a}{2}+b\right)x^2+\frac{a}{3}x^3+o\left(x^3\right)$$

$\therefore f(x)$与$g(x)=kx^3$是等价无穷小

$$\therefore\begin{cases}1+a=0\\-\dfrac{a}{2}+b=0\\\dfrac{a}{3}=k\end{cases}\quad\Rightarrow\begin{cases}a=-1\\b=-\dfrac{1}{2}\\k=-\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

（16）设函数 $f(x)$ 在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0\in I$，曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 处的切线与直线 $x=x_0$ 及 x 轴所围成的区域的面积为 4，且 $f(0)=2$，**求** $f(x)$ **的表达式。**

【解析】如下图：



$x=x_0$ 处的切线方程为 l ：$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

l 与 x 轴的交点为：$y=0$ 时，$x=x_0-\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$，则 $|AB|=\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}=x-x_0$，

因此，$S=\dfrac{1}{2}|AB|\cdot f(x_0)=\dfrac{1}{2}\dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}f(x_0)=4$.即满足微分方程：$\dfrac{y'}{y^2}=\dfrac{1}{8}$，解得：

$\dfrac{1}{y}=-\dfrac{1}{8}x+c$.

又因 $y(0)=2$，所以 $c=\dfrac{1}{2}$，故 $y=\dfrac{8}{4-x}$.

（17）已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 $C:x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上

的最大方向导数.

【详解】

根据方向导数与梯度的关系可知，方向导数沿着梯度方向可取到最大值且为梯度的模.，故

$gradf(x,y)=(1+y,1+x)$

故 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数为 $\sqrt{(1+y)^2+(1+x)^2}$ ，其中 x,y 满足 $x^2+y^2+xy=3$，即就求函数 $z=(1+y)^2+(1+x)^2$ 在约束条件 $x^2+y^2+xy-3=0$ 下的最值.

构造拉格朗日函数 $F(x,y,\lambda)=(1+y)^2+(1+x)^2+\lambda(x^2+y^2+xy-3)$

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=2(1+x)+2\lambda x+\lambda y=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=2(1+y)+2\lambda y+\lambda x=0\\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda}=x^2+y^2+xy-3=0\end{cases}$ 可得 $(1,1),(-1,-1),(2,-2),(-1,2)$

其中 $z(1,1)=4, z(-1,-1)=0, z(2,-1)=9=z(-1,2)$

综上根据题意可知 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数为3.

（18）**（本题满分 10 分）**

（Ⅰ）设函数 $u(x),v(x)$ 可导，利用导数定义证明

$[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v(x)'$

（Ⅱ）设函数 $u_1(x),u_2(x)\ldots u_n(x)$ 可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\ldots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式.

【解析】

(I)

$$
\begin{aligned}
\left[u(x)\cdot v(x)\right]' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}\\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left[u(x+\Delta x)-u(x)\right]\cdot v(x+\Delta x)+u(x)\cdot\left[v(x+\Delta x)-v(x)\right]}{\Delta x}\\
&= u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)
\end{aligned}
$$

(Π)

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \{u_1(x)\cdot[u_2(x)\cdots u_n(x)]\}'\\
&= u_1'(x)\cdot[u_2(x)\cdots u_n(x)]+u_1(x)\cdot[u_2(x)\cdots u_n(x)]'\\
&= u_1'(x)\cdot u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)\cdot\{u_2(x)\cdot[u_3(x)\cdots u_n(x)]\}'\\
&\cdots\\
&= u_1'(x)\cdot u_2(x)\cdots u_n(x)+u_1(x)\cdot u_2'(x)\cdots u_n(x)+\cdots+u_1(x)\cdot u_2(x)\cdots u_n'(x)
\end{aligned}
$$

（19）（本题满分 10 分）

已知曲线 L 的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases}$ 起点为 $A(0,\sqrt{2},0)$，终点为 $B(0,-\sqrt{2},0)$，计算曲线积分 $I=\int_L (y+z)dx+(z^2-x^2+y)dy+(x^2+y^2)dz$

【详解】曲线 L 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\sqrt{2}\sin\theta, \\ z=\cos\theta, \end{cases}$ θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 到 $-\frac{\pi}{2}$

$$I=\int_L (y+z)dx+(z^2-x^2+y)dy+(x^2+y^2)dz$$

$$
\begin{aligned}
&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\left[-(\sqrt{2}\sin\theta+\cos\theta)\sin\theta+\sqrt{2}\sin\theta\sqrt{2}\cos\theta-(\cos^2\theta+2\sin^2\theta)\sin\theta\right]d\theta\\
&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{2}}\left(-\sqrt{2}\sin^2\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta-\sin\theta-\sin^3\theta\right)d\theta\\
&=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2}\sin^2\theta d\theta=2\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta=2\sqrt{2}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\pi
\end{aligned}
$$

（20）（本题满分 11 分）

设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 3 维向量空间 $\mathbb{R}^3$ 的一个基，$\beta_1=2\alpha_1+2k\alpha_3$，$\beta_2=2\alpha_2$，

$\beta_3=\alpha_1+(k+1)\alpha_3$。

（Ⅰ）证明向量组 β_1,β_2,β_3 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基；

（Ⅱ）当 k 为何值时，存在非零向量 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 与基 β_1,β_2,β_3 下的坐标相同，并求出所有的 ξ。

【解析】（Ⅰ）$(\beta_1,\beta_2,\beta_3)=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}$

因为 $\begin{vmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}2&1\\2k&k+1\end{vmatrix}=4\neq0$，

所以 β_1,β_2,β_3 线性无关，β_1,β_2,β_3 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个基。

（Ⅱ）设 $P=\begin{pmatrix}2&0&1\\0&2&0\\2k&0&k+1\end{pmatrix}$，$P$ 为从基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 到基 β_1,β_2,β_3 的过渡矩阵，又设 ξ 在基 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 下的坐标为 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$，则 ξ 在基 β_1,β_2,β_3 下的坐标为 $P^{-1}x$，

由 $x=P^{-1}x$，得 $Px=x$，即 $(P-E)x=0$

由 $|P-E|=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\2k&0&k\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1\\2k&k\end{vmatrix}=-k=0$，得 $k=0$，并解得 $x=c\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$，$c$ 为任意常数。

从而 $\xi=-c\alpha_1+c\alpha_3,c$ 为任意常数。

（21）（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$.

（Ⅰ）求 a,b 的值.

（Ⅱ）求可逆矩阵 P，使得 $P^{-1}AP$ 为对角阵.

【解析】

由 $A=\begin{pmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{pmatrix}$ 相似于 $B=\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{pmatrix}$

则 $\begin{cases}0+3+a=1+b+1\\ \begin{vmatrix}0&2&-3\\-1&3&-3\\1&-2&a\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&0\\0&b&0\\0&3&1\end{vmatrix}\end{cases}$，解得 $a=4,b=5$

$$f_A(\lambda)=|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&-2&3\\1&\lambda-3&3\\-1&2&\lambda-4\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda-5)=0$$

当 $\lambda_1=\lambda_2=1$, $(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}1&-2&3\\1&-2&3\\-1&2&-3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

特征向量 $\xi_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}$,

当 $\lambda_3=5,(\lambda E-A)=\begin{pmatrix}5&-2&3\\1&2&3\\-1&2&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&1\\5&-2&3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$

则特征向量 $\xi_3=\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$，所以 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}2&-3&-1\\1&0&-1\\0&1&1\end{pmatrix}$，得 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&5\end{pmatrix}$

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}2^{-x}\ln 2 & x>0\\ 0 & x\le 0\end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测，直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止，记 Y 为观测次数.

（Ⅰ）求 Y 的概率分布；

（Ⅱ）求 EY.

【解析】

$$P\{x>3\}=\int_3^{+\infty}2^{-x}\ln^2 dx=\frac{1}{8}$$

（Ⅰ）$P\{Y=k\}=C_{k-1}^1(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{k-2}=(k-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{k-2},k=2,3,4....$

（Π）$EY=\sum_{K=2}^{+\infty}k(k-1)(\frac{1}{8})^2(\frac{7}{8})^{k-2}=\frac{1}{64}\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)(\frac{7}{8})^{k-2}$

设级数 $S(x)=\frac{1}{64}\sum_{k=2}^{+\infty}k(k-1)x^{k-2}=\left[\frac{1}{64}\sum_{k=2}^{+\infty}x^k\right]''=\frac{1}{64}\times\frac{2}{(1-x)^3}$

$S(\frac{7}{8})=16$ 所以 $EY=S(\frac{7}{8})=16$

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{1}{1-\theta} & \theta\le x\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，X_1，$X_2.....X_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

（Ⅰ）求 θ 的矩估计.

（Ⅱ）求 θ 的最大似然估计.

【解析】由题可得

（Ⅰ）

$$EX=\int_\theta^1\frac{x}{1-\theta}dx=\frac{1}{1-\theta}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_\theta^1=\frac{1+\theta}{2}$$

$$\frac{1+\hat{\theta}}{2}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i\Rightarrow\hat{\theta}=\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n x_i-1$$

（Π）联合概率密度

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=\frac{1}{(1-\theta)^n},\theta\le x_i\le 1$$

$\ln f=-n\ln^{(1-\theta)}$　　$\frac{d\ln f}{d\theta}=\frac{n}{1-\theta}>0$，故取

$$\hat{\theta}=\min\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$$