静安区 2012 学年高三年级第一学期期末教学质量检测

数学试卷（理科）

（试卷满分 150 分　考试时间 120 分钟）　　2013. 1

一、填空题（本大题满分 56 分）本大题共有 14 题，考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得 4 分，否则一律得零分.

1．已知函数 $f(x)=\frac{1}{2}\sin(2ax+\frac{2\pi}{7})$ 的最小正周期为 4π，则正实数 $a=$_____.

2. 等比数列 $\{a_n\}$（$n\in N^*$）中，若 $a_2=\frac{1}{16}$，$a_5=\frac{1}{2}$，则 $a_{12}=$_____.

3．两条直线 $l_1:3x-4y+9=0$ 和 $l_2:5x+12y-3=0$ 的夹角大小为_____.

4. 设圆过双曲线 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的一个顶点和一个焦点，圆心在此双曲线上，则圆心到双曲线中心的距离是_____.

5. 某旅游团要从 8 个风景点中选两个风景点作为当天上午的游览地，在甲和乙两个风景点中至少需选一个，不考虑游览顺序，共有_____种游览选择.

6. 求和：$C_n^1+2C_n^2+3C_n^3+\cdots+nC_n^n=$_____.（$n\in N^*$）

7. 设数列 $\{a_n\}$ 满足当 $a_n>n^2$（$n\in N^*$）成立时，总可以推出 $a_{n+1}>(n+1)^2$ 成立．下列四个命题：

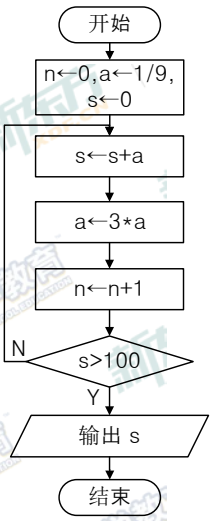
（1）若 $a_3\le 9$，则 $a_4\le 16$.

（2）若 $a_3=10$，则 $a_5>25$．

（3）若 $a_5\le 25$，则 $a_4\le 16$．

（4）若 $a_n\ge (n+1)^2$，则 $a_{n+1}>n^2$．

其中正确的命题是_____．（填写你认为正确的所有命题序号）

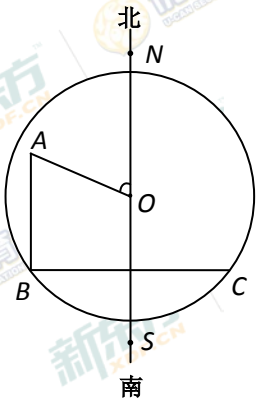


理第 9 题

8．已知曲线 C 的极坐标方程为 $\rho=4\sin\theta$．若以极点为原点，极轴为 x 轴的正半轴建立平面直角坐标系，直线 l 的参数方程为 $\begin{cases}x=2\cdot t,\\ y=\sqrt{3}\cdot t+2\end{cases}$（$t$ 为参数），则此直线 l 被曲线 C 截得的线段长度为_____．

9．请写出如图的算法流程图输出的 S 值_____．

10．已知 α、β 为锐角，且 $\dfrac{1+\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{1+\sin\beta-\cos\beta}{\sin\beta}=2$，则 $\tan\alpha\tan\beta=$_____．



理第 11 题

11．机器人“海宝”在某圆形区域表演“按指令行走”．如图所示，“海宝”从圆心 O 出发，先沿北偏西 $\arcsin\dfrac{12}{13}$ 方向行走 13 米至点 A 处，再沿正南方向行走 14 米至点 B 处，最后沿正东方向行走至点 C 处，点 B、C 都在圆 O 上．则在以圆心 O 为坐标原点，正东方向为 x 轴正方向，正北方向为 y 轴正

方向的直角坐标系中圆O的方程为_____.

12．过定点$F(4,0)$作直线l交y轴于Q点，过Q点作$QT\perp FQ$交x轴于T点，延长TQ至P点，使$|QP|=|TQ|$，则P点的轨迹方程是_____.

13．已知直线$(1-a)x+(a+1)y-4(a+1)=0$（其中a为实数）过定点P，点Q在函数$y=x+\frac{1}{x}$的图像上，则PQ连线的斜率的取值范围是_____.

14．在复平面内，设点A、P所对应的复数分别为πi、$\cos(2t-\frac{\pi}{3})+i\sin(2t-\frac{\pi}{3})$（$i$为虚数单位），则当$t$由$\frac{\pi}{12}$连续变到$\frac{\pi}{4}$时，向量$\overline{AP}$所扫过的图形区域的面积是_____.

二、选择题（本大题满分 20 分）本大题共有 4 题，每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，填上正确的答案，选对得 5 分，否则一律得零分.

15．若复数$z_1z_2\neq 0$，则$z_1z_2=|z_1z_2|$是$z_2=\overline{z_1}$成立的（　　）

(A) 充要条件　(B) 既不充分又不必要条件　(C) 充分不必要条件　(D) 必要不充分条件

16．等差数列$\{a_n\}$中，已知$3a_5=7a_{10}$，且$a_1<0$，则数列$\{a_n\}$前n项和S_n（$n\in N^*$）中最小的是（　　）

(A) S_7 或 S_8　(B) S_{12}　(C) S_{13}　(D) S_{14}

17．函数 $f(x)=\dfrac{x^2-6x+12}{x-2}(x\in[3,5])$ 的值域为（　　）

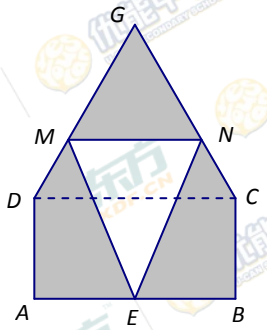
(A) $[2,3]$　　(B) $[2,5]$　　(C) $[\frac{7}{3},3]$　　(D) $[\frac{7}{3},4]$

18．已知 O 是△ ABC 外接圆的圆心，A、B、C 为△ ABC 的内角，若 $\dfrac{\cos B}{\sin C}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\cos C}{\sin B}\overrightarrow{AC}=2m\cdot\overrightarrow{AO}$，则 m 的值为（　　）

(A) 1　　(B) $\sin A$　　(C) $\cos A$　　(D) $\tan A$

三、解答题（本大题满分 74 分）本大题共 5 题，解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤．

19．（本题满分 12 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 7 分，第 2 小题满分 5 分．



（理 19 题）

某仓库为了保持库内的湿度和温度，四周墙上均装有如图所示的自动通风设施．该设施的下部 $ABCD$ 是矩形，其中 AB=2 米，BC=1 米；上部 CDG 是等边三角形，固定点 E 为 AB 的中点．△EMN 是由电脑控制其形状变化的三角通风窗（阴影部分均不通风），MN 是可以沿设施边框上下滑动且始终保持和 AB 平行的伸缩横杆．

（1）设 MN 与 AB 之间的距离为 x 米，试将△EMN 的面积 S（平方米）表示成关于 x 的函数；

（2）求△EMN 的面积 S（平方米）的最大值．

20.（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 7 分，第 2 小题满分 7 分.

已知 a，b，c 分别为△ABC 三个内角 A、B、C 所对的边长，a，b，c 成等比数列.

（1）求 B 的取值范围；

（2）若 $x=B$，关于 x 的不等式 $\cos 2x-4\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})+m>0$ 恒成立，求实数 m 的取值范围.

21.（本题满分 14 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 8 分.

已知数列 $\{a_n\}$ 的各项均为非零实数，且对于任意的正整数 n，都有

$(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2=a_1^{\ 3}+a_2^{\ 3}+\cdots+a_n^{\ 3}$.

（1）当$n=3$时，求所有满足条件的三项组成的数列a_1、a_2、a_3；

（2）试求出数列$\{a_n\}$的任一项a_n与它的前一项a_{n-1}间的递推关系. 是否存在满足条件的无穷数列$\{a_n\}$，使得$a_{2013}=-2012$？若存在，求出这样的无穷数列$\{a_n\}$的一个通项公式；若不存在，说明理由.

22.（本题满分 16 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 5 分，第 3 小题满分 7 分.

已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的两个焦点为$F_1(-c,0)$、$F_2(c,0)$，$c^2$是$a^2$与$b^2$的等差中项，其中$a$、$b$、$c$都是正数，过点$A(0,-b)$和$B(a,0)$的直线与原点的距离为$\frac{\sqrt{3}}{2}$.

（1）求椭圆的方程；

（2）点P是椭圆上一动点，定点$A_1(0,2)$，求△F_1PA_1面积的最大值；

（3）已知定点$E(-1,0)$，直线$y=kx+t$与椭圆交于C、D相异两点．证明：对任意的$t>0$，都存在实数k，使得以线段CD为直径的圆过E点．

23．**（本题满分 18 分）本题共有 3 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分，第 3 小题满分 8 分．**

函数$y=f(x)$，$x\in D$，其中$D\neq\varnothing$．若对任意$x\in D$，$f(|x|)=|f(x)|$，则称$y=f(x)$在D内为对等函数．

（1）指出函数$y=\sqrt{x}$，$y=x^3$，$y=2^x$在其定义域内哪些为对等函数；

（2）试研究对数函数$y=\log_a x$（$a>0$且$a\neq1$）在其定义域内是否是对等函数？若是，请说明理由；若不是，试给出其定义域的一个非空子集，使$y=\log_a x$在所给集合内成为对等函数；

（3）若$\{0\}\subseteq D$，$y=f(x)$在D内为对等函数，试研究$y=f(x)$（$x\in D$）的奇偶性

上海市静安区2013届高三一模数学试题（理科）

参考答案

说明

1. 本解答列出试题的一种解法，如果考生的解法与所列解法不同，可参照解答中评分标准的精神进行评分.

2. 评阅试卷，应坚持每题评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅，当考生的解答在某一步出现错误，影响了后继部分，但该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时，可视影响程度决定后面部分的给分，这时原则上不应超过后面部分应给分数之半，如果有较严重的概念性错误，就不给分.

3. 第19题至第23题中右端所注的分数，表示考生正确做到这一步应得的该题的累加分数.

4. 给分或扣分均以1分为单位.

答案及评分标准

1．$a=\frac{1}{4}$；　　2．64；　　3．$\arccos\frac{33}{65}$；

4．$\frac{16}{3}$；　　5．13；　　6．$n\cdot 2^{n-1}$；

7．（2）（3）（4）；　　8．4；　　9．$\frac{1093}{9}$；

10．1；　　11．$x^2+y^2=225$；　　12．$y^2=16x$；

13．$[-3,+\infty)$；　　14．$\frac{\pi}{6}$；.

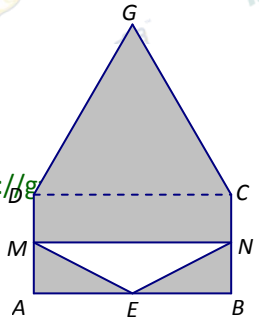


图 1

15. D； 16. C；； 17. A ；18. B

19 解：（1）

①如图 1 所示，当 MN 在矩形区域滑动，

即 $0<x\leqslant 1$ 时，

△EMN 的面积 $S=\frac{1}{2}\times 2\times x=x$； • • 1 分

②如图 2 所示，当 MN 在三角形区域滑动，

即 $1<x<1+\sqrt{3}$ 时，

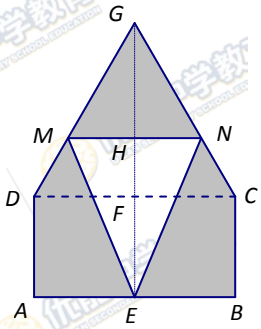


图 2

如图，连接 EG，交 CD 于点 F，交 MN 于点 H，

∵ E 为 AB 中点，

∴ F 为 CD 中点，$GF\perp CD$，且 $FG=\sqrt{3}$.

又∵ $MN//CD$，

∴ △MNG∽△DCG.

∴ $\frac{MN}{DC}=\frac{GH}{GF}$，即 $MN=\frac{2[\sqrt{3}+1-x]}{\sqrt{3}}$. • • 4 分

故△EMN 的面积 $S=\frac{1}{2}\times\frac{2[\sqrt{3}+1-x]}{\sqrt{3}}\times x$

$=-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2+(1+\frac{\sqrt{3}}{3})x$； • • • • • • • 6 分

综合可得：

$$S=\begin{cases}x, & (0<x\leqslant 1)\\ -\frac{\sqrt{3}}{3}x^2+\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)x. & \left(1<x<1+\sqrt{3}\right)\end{cases}$$ • • • • • • • • • • • • • 7 分

（2）①当 MN 在矩形区域滑动时，$S=x$，所以有 $0<S\leq 1$； • • 8 分

②当 MN 在三角形区域滑动时，$S=-\frac{\sqrt{3}}{3}x^2+(1+\frac{\sqrt{3}}{3})x$.

因而，当 $x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$（米）时，S 得到最大值，最大值 $S=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$（平方米）.

∵ $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}>1$，

∴ S 有最大值，最大值为 $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}$ 平方米. ····· 12 分

20 解：（1）∵ a、b、c 成等比数列，∴ $b^2=ac$ ····· 1 分

则 $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}$ ····· 3 分

而 $a^2+c^2\geqslant 2ac$ ∴ $\cos B=\frac{a^2+c^2-ac}{2ac}\geqslant\frac{ac}{2ac}=\frac{1}{2}$，等号当且仅当 $a=c$ 时取得，

即 $\frac{1}{2}\leqslant\cos B<1$，得到 $0<B\leq\frac{\pi}{3}$. ····· 7 分

（2）$\cos 2x-4\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\sin(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})=\cos 2x-4\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})$

$=2\cos x^2-2\cos x-1=2(\cos x-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{2}$ ····· 11 分

∵ $x=B$ ∴ $\frac{1}{2}\leqslant\cos x<1$

∴ $2(\cos x-\frac{1}{2})^2-\frac{3}{2}\geqslant-\frac{3}{2}$

则由题意有：$-m<-\frac{3}{2}$ 即 $m>\frac{3}{2}$ ····· 14 分

（说明：这样分离变量 $m>2\cos x-\cos 2x=-2\cos^2 x+2\cos x+1$ 参照评分）

21 解：（1）当 $n=1$ 时，$a_1^{\ 2}=a_1^{\ 3}$，由 $a_1\neq 0$ 得 $a_1=1$. ····· 1 分

当 $n=2$ 时，$(1+a_2)^2=1+a_2^{\ 3}$，由 $a_2\neq 0$ 得 $a_2=2$ 或 $a_2=-1$. 当 $n=3$ 时，$(1+a_2+a_3)^2=1+a_2^{\ 3}+a_3^{\ 3}$，若 $a_2=2$ 得 $a_3=3$ 或 $a_3=-2$；若 $a_2=-1$ 得 $a_3=1$；

····· 5 分

综上讨论，满足条件的数列有三个：

1，2，3 或 1，2，−2 或 1，−1，1. ····· 6 分

（2）令 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则 $S_n{}^2=a_1{}^3+a_2{}^3+\cdots+a_n{}^3$（$n\in N^*$）.

从而 $(S_n+a_{n+1})^2=a_1{}^3+a_2{}^3+\cdots+a_n{}^3+a_{n+1}{}^3$. ····· 7 分

两式相减，结合 $a_{n+1}\neq 0$，得 $2S_n=a_{n+1}{}^2-a_{n+1}$. ····· 8 分

当 $n=1$ 时，由（1）知 $a_1=1$；当 $n\geq 2$ 时，$2a_n=2(S_n-S_{n-1})=(a_{n+1}{}^2-a_{n+1})-(a_n{}^2-a_n)$，即 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-1)=0$，所以 $a_{n+1}=-a_n$ 或 $a_{n+1}=a_n+1$. ····· 12 分

又 $a_1=1$，$a_{2013}=-2012$，所以无穷数列 $\{a_n\}$ 的前 2012 项组成首项和公差均为 1 的等差数列，从第 2013 项开始组成首项为 -2012，公比为 -1 的等比数列．故

$$a_n=\begin{cases} n & (1\leq n\leq 2012) \\ 2012\cdot(-1)^n & (n>2012) \end{cases}.$$ ····· 14 分

（说明：本题用余弦定理，或者正弦定理余弦定理共同使用也可解得，请参照评分）

22．解：（1）在椭圆中，由已知得 $c^2=a^2-b^2=\dfrac{a^2+b^2}{2}$ ····· 1 分

过点 $A(0,-b)$ 和 $B(a,0)$ 的直线方程为 $\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{-b}=1$，即 $bx-ay-ab=0$，该直线与原点的距离为 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，由点到直线的距离公式得：$\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 3 分

解得：$a^2=3,b^2=1$；所以椭圆方程为 $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{1}=1$ ····· 4 分

（2）$F_1(-\sqrt{2},0)$，直线 F_1A_1 的方程为 $y=\sqrt{2}x+2$，$|F_1A_1|=\sqrt{6}$，当椭圆上的点 P 到直线 F_1A_1 距离最大时，$\triangle F_1PA_1$ 面积取得最大值 ··· 6 分

设与直线 F_1A_1 平行的直线方程为 $y=\sqrt{2}x+d$，将其代入椭圆方程

$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{1}=1$ 得：$\frac{7}{3}x^2+2d\sqrt{2}x+d^2-1=0$，$\Delta=0$，即 $8d^2-\frac{28}{3}d^2+\frac{28}{3}=0$，

解得 $d^2=7$，当 $d=-\sqrt{7}$ 时，椭圆上的点 P 到直线 F_1A_1 距离最大为 $\frac{2+\sqrt{7}}{\sqrt{3}}$，

此时△F_1PA_1 面积为 $\frac{1}{2}\sqrt{6}\frac{2+\sqrt{7}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{14}}{2}$ ····· 9 分

（3）将 $y=kx+t$ 代入椭圆方程，得 $(1+3k^2)x^2+6ktx+3t^2-3=0$，由直线与椭圆有两个交点，所以 $\Delta=(6kt)^2-12(1+3k^2)(t^2-1)>0$，解得 $k^2>\frac{t^2-1}{3}$

····· 11 分

设 $C(x_1,y_1)$、$D(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=-\frac{6kt}{1+3k^2}$，$x_1\cdot x_2=\frac{3(t^2-1)}{1+3k^2}$，因为以 CD 为直径的圆过 E 点，所以 $\overrightarrow{EC}\cdot\overrightarrow{ED}=0$，即 $(x_1+1)(x_2+1)+y_1y_2=0$， · 13 分

而 $y_1y_2=(kx_1+t)(kx_2+t)=k^2x_1x_2+tk(x_1+x_2)+t^2$，所以

$(k^2+1)\frac{3(t^2-1)}{1+3k^2}-(tk+1)\frac{6kt}{1+3k^2}+t^2+1=0$，解得 $k=\frac{2t^2-1}{3t}$ ····· 14 分

如果 $k^2>\frac{t^2-1}{3}$ 对任意的 $t>0$ 都成立，则存在 k，使得以线段 CD 为直径的圆过 E 点.

$(\frac{2t^2-1}{3t})^2-\frac{t^2-1}{3}=\frac{(t^2-1)^2+t^2}{9t^2}>0$，即 $k^2>\frac{t^2-1}{3}$. 所以，对任意的 $t>0$，都存在 k，使得以线段 CD 为直径的圆过 E 点. ····· 16 分

23 解：（1）$y=\sqrt{x}$，$y=x^3$ 是对等函数； ····· 4 分

（2）研究对数函数 $y=\log_a x$，其定义域为 $(0,+\infty)$，所以 $\log_a|x|=\log_a x$，又 $|\log_a x|\ge 0$，所以当且仅当 $\log_a x\ge 0$ 时 $f(|x|)=|f(x)|$ 成立. 所以对数函

数 $y=\log_a x$ 在其定义域 $(0,+\infty)$ 内不是对等函数． ・・・・・・・・ 6 分

当 $0<a<1$ 时，若 $x\in(0,1]$，则 $\log_a x\geq 0$，此时 $y=\log_a x$ 是对等函数；

当 $a>1$ 时，若 $x\in[1,+\infty)$，则 $\log_a x\geq 0$，此时 $y=\log_a x$ 是对等函数；

总之，当 $0<a<1$ 时，在 $(0,1]$ 及其任意非空子集内 $y=\log_a x$ 是对等函数；

当 $a>1$ 时，在 $[1,+\infty)$ 及其任意非空子集内 $y=\log_a x$ 是对等函数． 10 分

（3）对任意 $x\in D$，讨论 $f(x)$ 与 $f(-x)$ 的关系．

1）若 D 不关于原点对称，如 $y=\sqrt{x}$ 虽是对等函数，但不是奇函数或偶函数； ・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・ 11 分

2）若 $D=\{0\}$，则 $f(0)=|f(0)|\geq 0$．当 $f(0)=0$ 时，$f(x)$ 既是奇函数又是偶函数；当 $f(0)>0$ 时，$f(x)$ 是偶函数． ・・・・・・・・・・・・ 13 分

3）以下均在 D 关于原点对称的假设下讨论．

当 $x>0$ 时，$f(|x|)=f(x)=|f(x)|\geq 0$；

当 $x<0$ 时，$f(|x|)=f(-x)=|f(x)|$，若 $|f(x)|=f(x)$，则有 $f(-x)=f(x)$；此时，当 $x>0$ 时，$-x<0$，令 $-x=t$，则 $x=-t$，且 $t<0$，由前面讨论知，$f(-t)=f(t)$，从而 $f(x)=f(-x)$；

综上讨论，当 $x<0$ 时，若 $f(x)\geq 0$，则 $f(x)$ 是偶函数． ・・・・ 15 分

若当 $x<0$ 时，$f(x)\leq 0$，则 $f(|x|)=f(-x)=|f(x)|=-f(x)$；此时，当 $x>0$ 时，$-x<0$，令 $-x=t$，则 $x=-t$，且 $t<0$，由前面讨论知，$f(-t)=-f(t)$，从而 $f(x)=-f(-x)$；

若 $f(0)=0$，则对任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$．

综上讨论，若当 $x<0$ 时，$f(x)\leq 0$，且 $f(0)=0$，则 $f(x)$ 是奇函数．若

$f(0)\neq 0$，则 $f(x)$ 不是奇函数也不是偶函数． ・・・・・・・・・18 分