

2015 年海淀区高三年级第二学期期中练习 (海淀一模) 权威解析

北京新东方优能中学高中数学组

试卷宏观点评分析:

2015 年海淀区高三年级第二学期期中练习(海淀一模)与大家见面了,北京新东方优能中学教育高中数学教研组第一时间为大家奉上完整权威的解读与分析。

我们欣喜地看到历来以难度超越高考作为主要训练和指标价值的海淀一模今次“放下了身段”,不管理科还是文科试题,都在内容、难度和具体设计上与高考保持了高度的一致性,而在一些具体的考点和题目上,又体现出了相当的创新性。我们认为,在今年北京地区高考志愿填报时间和方式做出调整的情况下,这样的一模考试对于同学们其实有更重要的模拟和训练高考的价值和意义。

紧贴高考,重视基础。我们在这两套试题中发现了众多高考真题的影子,如理科选择 4、8, 填空 12、13、14, 解答 19, 文科选择 6, 填空 13, 解答 20, 都是基本直接使用了前几年北京地区高考真题中的出题背景和模式,只在部分表述和数字上做了调整。这几道题目的题号和位置我们也能看出来大部分都属于传统意义上的较难题目,如果考生之前按照我们的规划和布置将北京地区近年的高考真题仔细梳理过几遍,那么这次考试一定会有很好的表现。与此同时,除了理科的 20 题大部分同学可能依然没有太多时间和精力解决之外,完全没有传统意义上很多同学或老师认为的“怪题”“新题”,所有题目考查的都是学生对于基本数学知识的认知和基本数学能力的掌握。如一般被认为考创新题的 8, 14, 理科考的是 2012 年北京高考第 8 题考过的几乎一样的图形的几何意义—斜率,而 14 考的则是几乎每年每套卷子里一定会出现的分段函数+零点的考法。如果同学们在平时对于这些基本问题和重要题型做了专门的强化训练,则考试再碰到的时候就会有很好的感觉。

多题把关,小点创新。在保持整体与高考趋同的基础上,我们也看到了命题人在许多题目上的精致设计和良苦用心,而这些题目都会体现出良好的区分度,会提示同学们不要陷入固定的模式之中,而是要综合运用所学知识灵活处理问题。如在文理两套试题的立体几何部分,选择题的三视图不再是传统的计算面积或体积,而是根据条件判断三视图可能的形状,这种对于空间想象能力或者画图能力的考验也是我们在教学过程中一直强调的;而立体几何解答题则是考到了平时大家训练较少的翻折问题,强调立体几何和平面几何的结合与转化能力,非常重要。再如导数大题(理科第二问、文科第三问)以集合的形式叙述了不等式的解的情况,利用函数性质求含有三个参数的范围问题,其实是在更进一步的考察考生对于导数的工具性(而非对象性)和过程性(而非结果性)的认识,检验考生对于题目的翻译和转化能力。正如我们之前一直强调的,在当下北京卷的导数大题越来越向全国接轨,导数大题会适当增加难度和区分度(文科已确定成为第 20 题)的背景下,同学们考前对于导数的复习也不应该只主要停留在“求导+讨论”这样一个层面上,而是要真正学会在各种复杂情形下利用导数工具来研究和解决问题。

总之,海淀一模的文理两套数学试卷能够更具体而明确的为大家提供许多关于接下来高考数学复习的方向,也能在相当程度上反映同学们自身现存而需要解决的问题。接下来,让我们一起努力,将后续的高考复习做得更高效,更提分。

理科重点题目分析:

6. 若 x, y 满足 $\begin{cases} x+y \geq 0, \\ x \geq 1, \\ x-y \geq 0, \end{cases}$ 则下列不等式恒成立的是

A. $y^3 \geq 1$

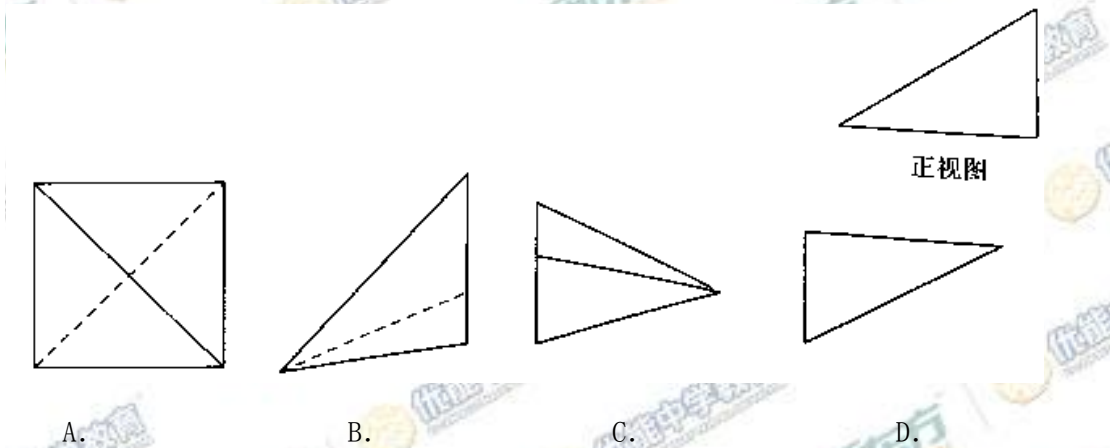
B. $x \geq 2$

C. $x + 2y + 2 \geq 0$

D. $2x - y + 1 \geq 0$

点评: 此题难度不大, 题干也很简洁, 但是蕴含了深刻的数形结合思维, 如果对于不等式的几何意义有熟悉了解的同学, 一定能轻松应对, 相对复杂的线性规划常规类型题目而言, 化简了运算难度, 提升了思维要求, 很难使用技巧解答。答案: D

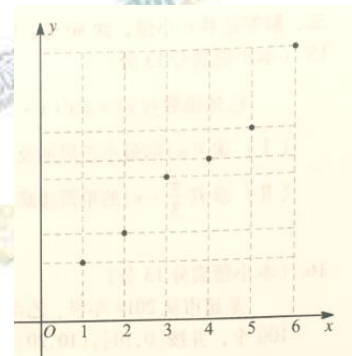
7. 某三棱锥的正视图如图所示, 则这个三棱锥的俯视图不可能是



点评: 三视图重点考查的是学生的空间想象力, 此题同样类似6题, 淡化了技巧和运算, 增加空间想象力的考查, 棱锥和棱柱都是考查的重点, 此题要求对斜棱锥有一定熟悉度, 否则A、B较难排除, 而对于C选项比较常规的考查了俯视图和正视图对椎体的影响。答案: C

8. 某地区在六年内第 x 年的生产总值 y (单位: 亿元) 与 x 之间的关系如图所示, 则下列四个时段中, 生产总值的年平均增长率最高的是

- A. 第一年到第三年
- B. 第二年到第四年
- C. 第三年到第五年
- D. 第四年到第六年



点评: 此题类似 2012 年高考题目选择 8，主要考查了实际应用题的理解与数形结合思维的应用，将题目由高考题目的点到 $(0, 0)$ 的斜率，而此题目的几何意义难度更大，考查了三年的年平均增长几何意义，比较 y 值比例的大小。答案：A

13. 社区主任要为小红等 4 名志愿者和他们帮助的 2 位老人拍照，要求排成一排，小红必须与 2 位老人都相邻，且两位老人不排在两端，则不同的排法种数是。（用数字作答）

点评: 排列组合作为分类讨论思想之一的重要考查形式，其实很多同学并不重视分类思想的学习，而是追求排组技巧，此题只需对小红和两位老人的位置进行枚举，只有两类，即 234 号位和 345 号位，之后用分步原理即可，答案 24

14. 设 $f(x) = \begin{cases} x^3, & x < a, \\ x^2, & x \geq a, \end{cases}$ 若存在实数 b ，使得函数 $g(x) = f(x) - b$ 有两个零点，则 a 的取值范围是。

点评: 14 与 13 题目同属于分类思想，但是希望朋友用心体会，两种分类的区别，我们常常将 14 题目的分类叫做“不得不分类”需要讨论参数型的分类是由于不定因数导致的分类，同时需要有一定数形结合能力，理解参数意义，此题需要从二次幂函数和三次幂的函数两个交点出发进行 a 的分类讨论，答案： $a < 0$ 或 $a > 1$

18. (本小题共 13 分)

已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{x} (a \neq 0)$ 。

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间；

(II) 若 $\{x | f(x) \leq 0\} = [b, c]$ (其中 $b < c$)，求 a 的取值范围，并说明 $[b, c] \subseteq (0, 1)$

点评: 此题 (I) 问简单分类相对比较常规。(II) 方法较多，从转化思维角度，朋友可以使用分类为 $a \ln x$ 与反比例函数之间关系来解答和说明，很容易分析清晰结论，在研究导数题目时候，希望各位能掌握多种思维方式，包含分类讨论，数形结合，转化化归等，导数题目常见难度在于思维的灵活性，另外此题的形式和问法也相对创新。答案： $a > e$

19. (本小题共 13 分)

已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 经过点 $(0, -1)$ ，且离心率 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 。

(I) 求椭圆 M 的方程；

(II) 是否存在菱形 $ABCD$ ，同时满足下列三个条件：

- ①点 A 在直线 $y = 2$ 上；
- ②点 B, C, D 在椭圆 M 上；
- ③直线 BD 的斜率等于 1

如果存在，求出 A 点坐标；如果不存在，说明理由。

点评：圆锥曲线的解答题难度一般认为有两个，一是几何情景需要转化再用代数思维运算，类似一模西城的圆锥曲线题目，二是情景相对复杂的几何条件使用代数思维运算时候的多变量之间关系的处理，而海淀的此题明显属于后者，此题目的动点有四个，未知数众多，需要由 BD 直线系数，表示 BD 变量，由 BD 变量表示中点，由中点和垂直求出点 A ，由点 A 和中点表示 C ，将 C 代入椭圆即可，此类型近似 2013 和 2014 高考题目的综合改写，提醒学生朋友对多动点题目进行总结分析整理。

文科重点题目分析：

17. (本小题共 13 分)

在 $\triangle ABC$ 中， $\sin^2 A = \sin B \sin C$.

- (I) 若 $\angle A = \frac{\pi}{3}$ ，求 $\angle B$ 的大小；
- (II) 若 $bc = 1$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积的最大值。

点评：三角函数作为 17 题目考查此题可以说是模考试题中极为罕见的第一次见到，从这个角度讲已经是非常大的创新了，所以此题是值得肯定变化，降低学生对题目模式化的理解。此题 1, 2 问都非常棒，角度可以分为两种，从角出发和从边出发。第一问从角出发，需要将角 C 消掉，包含了方程的思维，从边出发需要进行转化变形，利用正弦将条件化为边，然后将角 A 条件转为余弦定理的边条件。第二问，需要先从边出发，将条件化为边，与 $bc=1$ 结合，得出 $a=1$ ，然后从角出发求角 A 余弦，利用均值求角 A 的最大值。答案：(1) $\angle B = \frac{\pi}{3}$

(2) $\frac{\sqrt{3}}{4}$

19. (本小题共 13 分)

已知椭圆 M ： $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(0, -1)$ ，且离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 。

- (I) 求椭圆 M 的方程；

(II) 若椭圆 M 上存在点 B, C 关于直线 $y = kx - 1$ 对称, 求 k 的所有取值构成的集合 S :

并证明对于 $\forall k \in S$, BC 的中点恒在一条定直线上.

点评: 此题的形式其实在之前考试中出现过, 并不能叫完全的创新, BC 双动点对称已知斜率, 求出韦达, 然后中点条件代入对称直线, 化韦达得系数关系式. 在结尾的时候, 常规问法为求解 k 的取值范围, 也不算是完全创新, 需要利用相交德尔塔大于 0 求解, 但是此题非常创新的问出了 k 的取值集合, 以及求证中点为定值, 对于这种数学概念的掌握, 有一定的深刻考查. 另外此题如果用点差法解答, 将会非常简单. 答案: 直线为 $y = \frac{1}{3}$

20. (本小题共 13 分)

已知函数 $f(x) = a \ln x + \frac{1}{x} (a \neq 0)$.

(I) 求函数 $f(x)$ 的单调区间;

(II) 若存在两条直线 $y = ax + b_1, y = ax + b_2 (b_1 \neq b_2)$ 都是曲线的切线, 求实数 a 的取值范围;

(III) 若 $\{x | f(x) \leq 0\} \subseteq (0, 1)$, 求实数 a 的取值范围.

点评: 此题 (1) (3) 问同理科, (2) 类似于 2014 高考真题的文科数学 20, 区别在于高考真题是已知点, 此题是已知斜率, 同样转化为方程根个数问题, 此题作为位置切点型切线问题, 包含了设切点的方程思想, 已经方程根的数形结合思维, 即理解为新函数的交点问题, 思维的深度还是有的. 答案: $a > 4$

写在最后

近几年的高考真题也好, 模考真题也好, 突出数学能力和数学思维的考查, 比较淡化题型和模式化的考查, 笔者认为朋友在学习的过程中一定体会每一步的意义所在, 每一步的智慧所在. 新东方优能数学的教学理念是让我们一起来玩数学, 我们认为当我们真正玩起来数学的时候, 也是我们学好数学的关键, 数学不是枯燥的计算和繁琐的公式, 数学是充满智慧的思考和理性的分析. 当然我们更深刻的认为, 数学有时候甚至不是教会人以智慧, 而是让我们认知到我们是缺乏智慧的, 从而对智慧产生敬畏之心, 向往智慧和追求智慧.