太原市 2015 年高三年级模拟试题（一）

数学试卷（理工类）

一、选择题

1、已知$(1+i)z=2i$，则复数$z=$（）

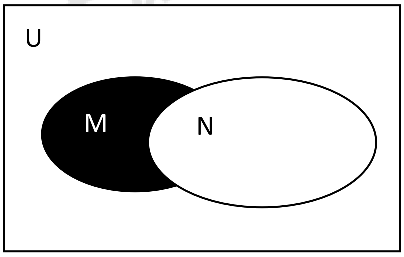
A.$1+i$　　B.$1-i$　　C.$-1+i$　　D.$-1-i$

考点：复数的运算

答案：A

2、已知全集$U=R$，集合$M=\{x|(x-1)(x+3)<0\}, N=\{x||x|\le 1\}$,则下图阴影部分表示的集合是（）

A.[-1,1）　B.(-3,1]　C.$(-\infty,3)\cup[-1,+\infty)$



考点：集合之间的简单运算

答案：D

3、在单调递减等比数列$\{a_n\}$中，若$a_3=1, a_2+a_4=\frac{5}{2}$，则$a_1=$（）

A.2　B.4　C.$\sqrt{2}$　D.$2\sqrt{2}$

考点：数列的运算

答案：B

4、已知函数$f(x)=\log_2 x$，若在$[1,8]$上任取一个实数x_0，则不等式$1\le f(x_0)\le 2$成立的概率是（　）

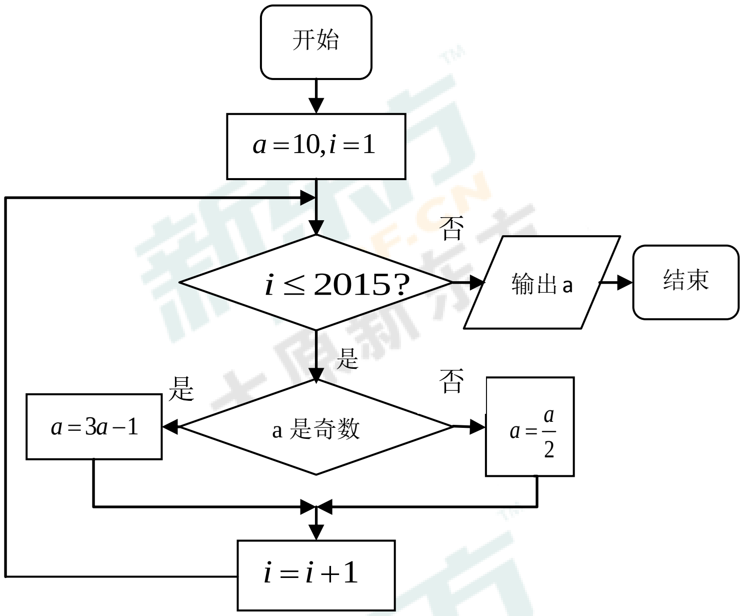
A、$\frac{1}{4}$　B、$\frac{1}{2}$　C、$\frac{2}{7}$　D、$\frac{1}{2}$

考点：几何概型

答案：C

5、执行如右图所示程序框图，则输出$a=$　（　）

A、20　B、14　C、10　D、7



考点：读程序框图

答案：C

6、已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)$ $(\omega>0,|\varphi|<\frac{\pi}{2})$ 的最小正周期是 π，若将其图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后得到的图像关于原点对称，则函数 $f(x)$ 的图像（　　）

A、关于直线 $x=\frac{\pi}{12}$ 对称　　　　B、关于直线 $x=\frac{5\pi}{12}$ 对称

C、关于点 $(\frac{\pi}{12},0)$ 对称　　　　D、关于直线 $(\frac{5\pi}{12},0)$ 对称

考点：三角函数图像及性质

答案：B

7、已知在圆 $x^2+y^2-4y+2y=0$ 内，过点 E（1,0）的最长弦和最短弦分别是 AC 和 BD，则四边形 ABCD 的面积为

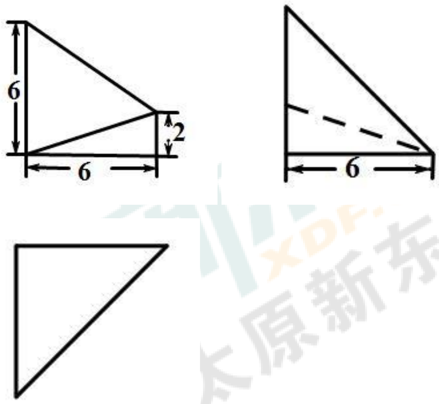
A、$3\sqrt{5}$　　　B、$6\sqrt{5}$　　　C、$4\sqrt{15}$　　　D、$2\sqrt{15}$

考点：圆与直线位置关系

答案：D

8、已知某空间几何体的三视图如右图所示，则该几何体的体积是

A、16　　　B、32　　　C、32　　　D、48



考点：由三视图求体积

答案：C

9、已知实数 a,b 满足 $2^a=3,3^b=2$，则函数 $f\left(x\right)=a^x+x-b$ 的零点所在的区间是

A. $\left(-2,-1\right)$　B. $\left(-1,0\right)$　C. $\left(0,1\right)$　D. $\left(1,2\right)$

考点：指数函数，函数的零点问题

答案：B

10、已知实数 x,y 满足条件 $\begin{cases} x\geq 2 \\ x+y\leq 4 \\ -2x+y+c\geq 0 \end{cases}$ 若目标函数 $z=3x+y$ 的最小值为 5，其最大值为

A. 10　B. 12　C. 14　D. 15

考点：线性规划

答案：A

11、已知点 O 为双曲线 C 的对称中心，过点 O 的两条直线 l_1 与 l_2 的夹角为 60°，直线 l_1 与双曲线 C 相交于点 A_1,B_1，直线 l_2 与双曲线 C 相交于点 A_2,B_2，若使 $\left|A_1B_1\right|=\left|A_2B_2\right|$ 成立的直线 l_1 与 l_2 有且只有一对，则双曲线 C 离心率的取值范围是

A. $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},2\right]$　B. $\left[\dfrac{2\sqrt{3}}{3},2\right)$　C. $\left(\dfrac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$　D. $\left[\dfrac{2\sqrt{3}}{3},+\infty\right)$

考点：双曲线离心率的求解

答案：A

12、已知数列 $\left\{a_n\right\}$ 的通项公式为 $a_n=\left(-1\right)^n\left(2n-1\right)\cos\dfrac{n\pi}{2}+1\left(n\in N^*\right)$，其前 n 项和为 S_n，则 $S_n=$

A. -30　　B. -60　C. 90　D. 120

考点：数列前 n 项和的求解

答案：D

二、填空题

13.已知向量 $\vec{a},\vec{b}$ 满足 $\left(2\vec{a}-\vec{b}\right)\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=6$，且 $\left|\vec{a}\right|=2,\left|\vec{b}\right|=1$，则 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的夹角为______。

答案：120^{O}

14、已知 $\left(2x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{n}$ 展开式的二项式系数之和为 64，则其展开式中常数项是__________.考点：二项式定理

答案：60

15、已知在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD, CD\perp AD, AB=2AD=2CD=2$ 将已知在直角梯形沿 AC 折叠成三棱锥 $D-ABC$，当三棱锥 $D-ABC$ 体积取最大值时其外接球的体积为____________

考点：球的内切问题

答案：$\dfrac{4\pi}{3}$

16、已知定义在 R 上的奇函数 $f(x)$ 满足 $f(\frac{3}{2}-x)=f(x), f(-2)=-$，数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且 $a_1=-1, S_n=2a_n+n\ (n\in N^*)$，则 $f(a_5)+f(a_6)=$

考点：构造数列和函数的对称性及周期性。

答案：3

三、解答题

17、已知 a,b,c 分别是 ΔABC 的角 A,B,C 所对的边，且 $c=2, C=\dfrac{\pi}{3}$。

（Ⅰ）若 ΔABC 的面积等于 $\sqrt{3}$，求 a,b；

（Ⅱ）若 $\sin C+\sin(B-A)=2\sin 2A$, 求 A 的值。

解：（Ⅰ）$\because c=2, C=\dfrac{\pi}{3}$，由余弦定理得 $4=a^2+b^2-2ab\cos\dfrac{\pi}{3}=a^2+b^2-ab$。

$\because \Delta ABC$ 的面积等于 $\sqrt{3}$，$\therefore \dfrac{1}{2}ab\sin C=\sqrt{3}, \therefore ab=4$。…………………………4 分

联立 $\begin{cases} a^2+b^2-ab=4 \\ ab=4 \end{cases}$ 解得 $a=2, b=2$。…………………………………………6 分

（Ⅱ）$\because \sin C+\sin(B-A)=2\sin 2A,\therefore \sin(B+A)+\sin(B-A)=4\sin A\cos A,$

$\therefore \sin B\cos A=2\sin A\cos A$。……………………………………………………8 分

①当$\cos A=0$时，则$A=\dfrac{\pi}{2}$。……………………………………………………9 分

②当$\cos A\neq 0$时$,\sin B=2\sin A,$ 由正弦定理得$b=2a$，

联立$\begin{cases}a^2+b^2-ab=4\\ b=2a\end{cases}$解得$a=\dfrac{2\sqrt{3}}{3},b=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$，

$\therefore b^2=a^2+c^2,\because C=\dfrac{\pi}{3},\therefore A=\dfrac{\pi}{6},$

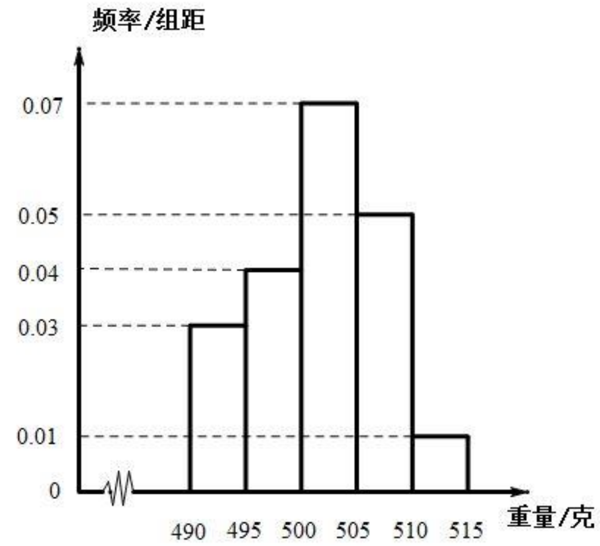
综上所述，$A=\dfrac{\pi}{2}$或$A=\dfrac{\pi}{6}$。……………………………………………………12 分

18、

某工厂为了检查一条流水线的生产情况，从该流水线上随机抽取 40 件产品，测量这些产品的重量（单位：克），整理后得到如下的频率分布直方图（其中重量的分组区间分别为$(490,495]$，$(495,500]$，$(500,505]$，$(505,510]$，$(510,515]$）

（I）若从这 40 件产品中任取两件，设 X 为重量超过 505 克的产品数量，求随机变量 X 的分布列；

（II）若将该样本分布近似看作总体分布，现从该流水线上任取 5 件产品，求恰有两件产品的重量超过 505 克的概率。



解：

（I）根据频率分布直方图可知，重量超过 505 克的产品数量为$\left[\left(0.01+0.05\right)\times 5\right]\times 40=12$

由题意得随机变量 X 的所有可能取值为 0,1,2

$P\left(X=0\right)=\dfrac{C_{28}^{2}}{C_{40}^{2}}=\dfrac{63}{130}$，$P\left(X=1\right)=\dfrac{C_{28}^{1}C_{12}^{1}}{C_{40}^{2}}=\dfrac{28}{65}$，$P\left(X=2\right)=\dfrac{C_{12}^{2}}{C_{40}^{2}}=\dfrac{11}{130}$

∴随机变量 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\dfrac{63}{130}$	$\dfrac{28}{65}$	$\dfrac{11}{130}$

（II）由题意得该流水线上产品的重量超过 505 克的概率为 0.3

设 Y 为该流水线上任取 5 件产品重量超过 505 克的产品数量，则$Y \sim B\left(5,0.3\right)$

故所求概率为$P\left(Y=2\right)=C_{5}^{2}\times 0.3^{2}\times 0.7^{3}=0.3087$

19、（本小题满分 12 分）

如图，在斜三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，侧面$AA_1B_1B\perp$底面 ABC，侧棱AA_1与底面 ABC 的所成角为$60°$，$AA_1=2$，底面 ABC 是边长为 2 的正三角形，点 G 为ΔABC的重心，点 E 在BC_1上，且 BE=$\dfrac{1}{3}$ BC_1.

（1）求证：GE ∥ 平面 AA_1B_1B；

（2）求平面B_1GE与底面 ABC 所成锐角二面角的余弦值；

解析：

（1）证明：连接B_1E，并延长交 BC 于点 F，连接AB_1, AF,

∵ $ABC-A_1B_1C_1$是三棱柱，∴ $BC\parallel B_1C_1$，∴ $\Delta EFB\sim\Delta EB_1C_1$，

又∵ $BE=\dfrac{1}{3}BC_1$，∴ $\dfrac{BE}{EC_1}=\dfrac{EF}{EB_1}=\dfrac{BF}{B_1C_1}=\dfrac{1}{2}$，

∴ $BF=\dfrac{1}{2}BC$，∴ F 是 BC 的中点。

∵点 G 是ΔABC 的重心，∴点 G 在 AF 上，且$\dfrac{GF}{AG}=\dfrac{BF}{EB_1}=\dfrac{1}{2}$，

$\therefore GE \parallel AB_1$， $\therefore GE \parallel$ 平面 AA_1B_1B；

（2）证明：过点A_1作$A_1O \perp AB$，垂足为 O，连接 OC,

$\because$ 侧面 $AA_1B_1B \perp$ 底面 ABC， $\therefore A_1O \perp$ 底面 ABC， $\therefore \angle A_1AB = 60°$

$\because AA_1 = 2$， $\therefore AO = 1$， $\because AB = 2$， $\therefore$点 O 是 AB 的中点

又 $\because$ 点 G 是正三角形 ABC 的重心

$\therefore$ 点 G 在 OC 上， $\therefore OC \perp AB$，

$\because A_1O \perp$ 底面 ABC，$\therefore A_1O \perp OB$，$A_1O \perp OC$

以 O 为圆心，分别以 OC，OB，OA 为 x，y，z 轴建立如图空间直角坐标系 O-xyz，由题意可得：A（0，-1,0），B（0,1,0），C（$\sqrt{3}$，0,0），A_1（0,0，$\sqrt{3}$），B_1（0,2，$\sqrt{3}$），C_1（$\sqrt{3}$，1，$\sqrt{3}$），

则 $G\left(\frac{\sqrt{3}}{3},0,0\right)$， $\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC_1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3},0,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$， $\therefore E\left(\frac{\sqrt{3}}{3},1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$，

$\therefore \overrightarrow{GE} = \left(0,1,\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$， $\overrightarrow{B_1E} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3},-1,-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$

设 **n**=（x,y,z）是平面B_1GE的一个法向量，则

$$\begin{cases}\mathbf{n} \perp \overrightarrow{GE},\\ \mathbf{n} \perp \overrightarrow{B_1E},\end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} y + \frac{\sqrt{3}}{3}z = 0,\\ \frac{\sqrt{3}}{3}x - y - \frac{2\sqrt{3}}{3}z = 0,\end{cases}$$

令$z = \sqrt{3}$，则$x = \sqrt{3}$，$y = -1$， $\therefore \mathbf{n} = (\sqrt{3},-1,\sqrt{3})$

由（1）知$\overrightarrow{OA_1} = (0,0,\sqrt{3})$是平面 ABC 的一个法向量，

设平面B_1GE与底面 ABC 所成锐二面角为θ，则有：

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}}{|\mathbf{m}|\cdot|\mathbf{n}|} = \frac{\sqrt{21}}{7}.$$

20、已知椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点$F_1,F_2$其离心率为$e=\frac{1}{2}$，点$P$为椭圆上的一个动点，$\Delta PF_1F_2$内切圆面积的最大值为$\frac{4\pi}{3}$

(1)求 a,b 的值

(2)若A、B、C、D是椭圆上不重合的四个点，且满足$\overrightarrow{F_1A}//\overrightarrow{F_1C},\overrightarrow{F_1B}//\overrightarrow{F_1D},\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0,$

求$|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|$的取值范围。

解析：（1）当 P 为椭圆上下顶点时 ΔPF_1F_2 内切圆面积的最大值设 ΔPF_1F_2 内切圆半径 r，

$$S_{\Delta PF_1F_2}=\frac{1}{2}|F_1F_2|\cdot|OP|=bc=\frac{1}{2}(|F_1F_2|+|F_1P|+|F_2P|)\cdot r=\frac{2\sqrt{3}}{3}(a+c)$$

$$\because e=\frac{1}{2}\therefore a=2c,\therefore b=2\sqrt{3},a=4$$

（2）$\because \overrightarrow{F_1A}//\overrightarrow{F_1C},\overrightarrow{F_1B}//\overrightarrow{F_1D},\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0,\therefore$ 直线 AC，BD 垂直相交于点 F_1 由（1）椭圆方程 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1\therefore F_1$(-2,0)

①直线 AC，BD 有一条斜率不存在时 $|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|$=6+8=14

②当 AC 斜率存在且不为 0 时，设方程 $y=k(x+2),A(x_1,y_1),C(x_2,y_2)$ 则 A,C 是方程组的两组解

$$\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1\\ y=k(x+2)\end{cases}\quad\begin{cases}x_1+x_2=\frac{-16k^2}{3+4k^2}\\ x_1x_2=\frac{16k^2-48}{3+4k^2}\end{cases},|\overrightarrow{AC}|=\frac{24(k^2+1)}{3+4k^2}$$

BD 方程 $y=-\frac{1}{k}(x+2)$ 同理

$$\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1\\ y=-\frac{1}{k}(x+2)\end{cases}\quad|\overrightarrow{BD}|=\frac{24(k^2+1)}{4+3k^2}$$

$$|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|=\frac{168(k^2+1)^2}{(4+3k^2)(3+4k^2)}$$

设 $t=k^2+1(k\neq0),t>1$

$$|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|=\frac{168}{12+\frac{t-1}{t^2}}\because t>1\therefore 0<\frac{t-1}{t^2}\leq\frac{1}{4}\therefore|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|\in[\frac{96}{7},14]$$

由①② $|\overrightarrow{AC}|+|\overrightarrow{BD}|$ 的取值范围 $[\frac{96}{7},14]$

21、已知函数 $f(x)=x^2+a(x+\ln x),a\in R.$

（I）若当 $a=-1$ 时，求 $f(x)$ 的单调区间；

（II）若 $f(x)>\frac{1}{2}(e+1)a$，求 a 的取值范围。

解：

（I） 由题意得 $x\in(0,+\infty)$，

当 $a=-1$ 时，则 $f(x)=x^2-x-\ln x, \therefore f'(x)=\frac{2x^2-x-1}{x}$，

令 $f'(x)<0$，则 $0<x<1$; 令 $f'(x)\ge 0$，则 $x\ge 1$；

$\therefore f(x)$ 的单调减区间是（0,1），单调增区间是 $[1,+\infty)$。

（II）①当 $a=0$ 时，$f(x)=x^2$，显然符合题意；

②当 $a>0$ 时，当 $0<x<e^{-1-\frac{1}{a}}<1$ 时，

$f(x)<1+a+a\ln x<1+a+a(-1-\frac{1}{a})<0<\frac{1}{2}(e+1)a$，不符合题意；

③当 $a<0$ 时，则 $f'(x)=\frac{2x^2+ax+a}{x}$，

令 $f'(x)=0$，则存在 $x_0\in(0,+\infty)$，使得 $2x_0^2+ax_0+a=0$，即 $f'(x_0)=0$，

令 $f'(x)<0$，则 $0<x<x_0$；令 $f'(x)>0$，则 $x>x_0$，

$\therefore f(x)_{\min}=f(x_0)=x_0^2+a(x_0+\ln x_0)=\frac{1}{2}a[(x_0-1)+2\ln x_0]$，

$\because f(x)>\frac{1}{2}(e+1)a, \therefore x_0+2\ln x_0-(e+2)<0, \therefore 0<x_0<e$

$\because 2x_0^2+ax_0+a=0, a=-\frac{2x_0^2}{x_0+1}\in(-\frac{2e^2}{e+1},0)$

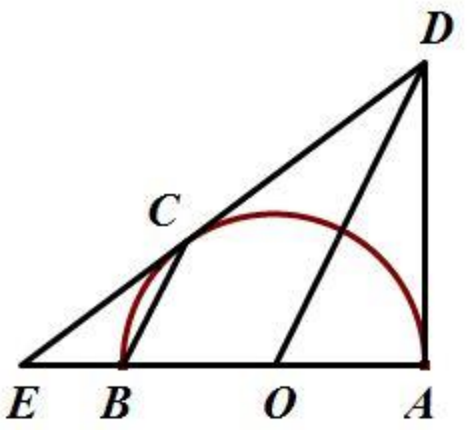
综上所述，实数 a 的取值范围 $(-\frac{2e^2}{e+1},0]$

22.选修 4-1：几何证明选讲

如图，已知点 C 是以 AB 为直径的半圆 O 上一点，过 C 的直线交 AB 的延长线于 E，交过点 A 的圆 O 的切线于点 D，$BC//OD$，$AD=AB=2$.

（1）求证：直线 DC 是圆 O 的切线；

（2）求线段 EB 的长.



答案：（1）证明：连接 OC，$\because$ AD 是圆 O 的切线，$\therefore \angle DAO = 90^\circ$

$\because BC//OD, \therefore \angle AOD = \angle OBC, \angle DOC = \angle BCO$

$\because OB = OC, \therefore \angle OBC = \angle BCO$,

$\therefore \angle AOD = \angle DOC$,

又 $\because OA = OC, OD = OD, \therefore \triangle OCD \cong \triangle OAD$,

$\therefore \angle DCO = \angle DAO = 90^\circ, \therefore OC \perp DC$,

$\therefore$ 直线 DC 是圆 O 的切线；

（2）设 $EB = x, \because BC//OD, \therefore \dfrac{EB}{BO} = \dfrac{EC}{CD}$,

$\because$ DC 是圆 O 的切线，$\therefore DC = DA = 2,$

$\because BO = \dfrac{1}{2}AB = 1, \therefore EC = 2x$,

由（1）得，直线 EC 是圆 O 的切线，$\therefore EC^2 = EB \cdot EA$，

$\therefore 4x^2 = x(x+2), \therefore EB = x = \dfrac{2}{3}$.

23. 选修 4-4：坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\sqrt{3}\cos\theta \\ y=\sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$ （其中 θ 为参数），点 M 是曲线 C_1 上的动点，点 P 在曲线 C_2 上，且满足 $\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM}$.

（1）求曲线 C_2 的普通方程；

（2）以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，射线 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 与曲线 C_1 、C_2 分别交于 A 、B 两点，求 $|AB|$.

答案：（1）设 $P(x,y),M(x',y'),\because \overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OM},\therefore \begin{cases} x=2x', \\ y=2y', \end{cases}$

$\because$ 点 M 在曲线 C_1 上，$\therefore \begin{cases} x'=1+\sqrt{3}\cos\theta, \\ y'=\sqrt{3}\sin\theta, \end{cases} \therefore (x'-1)^2+y'^2=3$，

曲线 C_2 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=12$；

（2）曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-2=0,$

将 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 代入得 $\rho=2$，$\therefore$ A 的极坐标为 $\left(2,\dfrac{\pi}{3}\right)$，

曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta-8=0,$

将 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 代入得 $\rho=4$，$\therefore$ B 的极坐标为 $\left(4,\dfrac{\pi}{3}\right)$，

$\therefore |AB|=4-2=2$.

24.选修 4-5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=|2x-1|+|x-a|,a\in R$ 。

（Ⅰ）当 $a=3$ 时，解不等式 $f(x)\le 4$；

（Ⅱ）若 $f(x)=|x-1+a|$，求 x 的取值范围。

解（Ⅰ）当 $a=3$ 时，

$$f(x)=|2x-1|+|x-3|=\begin{cases}3x-4, x\geq 3,\\ x+2, \frac{1}{2}<x<3,\\ 4-3x, x\leq \frac{1}{2},\end{cases}$$ ··························2 分

其图像如图所示，与直线 $y=4$ 相交于点 $A(0,4)$和$B(2,4)$, ··············4 分

$\therefore$ 不等式 $f(x)\leq 4$ 的解集为 $\{x|0\leq x\leq 2\}$，··························5 分

（II）$\because f(x)=|2x-1|+|x-a|\geq |(2x-1)-(x-a)|=|x-1+a|$,

$\therefore f(x)=|x-1+a| \Leftrightarrow (2x-1)(x-a)\leq 0$, ··························7 分

①当 $a<\frac{1}{2}$时，x的取值范围是$\left\{x\middle|a\leq x\leq \frac{1}{2}\right\}$;

②当 $a=\frac{1}{2}$时，x的取值范围是$\left\{\frac{1}{2}\right\}$;

③当 $a>\frac{1}{2}$时，x的取值范围是$\left\{x\middle|\frac{1}{2}\leq x\leq a\right\}$. ··························10 分