太原市 2015 年高三年级模拟试题（一）

数学试卷（文史类）

一、选择题

1、复数 $\dfrac{2i}{1+i}=$

$A\ \ 1+i$ $B\ \ 1-i$ $C\ \ -1+i$ $D\ \ -1-i$

考点：复数的运算

答案：A

2、已知集合 $A=\{x|y=\sqrt{1-x}\}, B=\{y|y=x^2\}$，则 $A\cap B=$（ ）

$A\ \ (-\infty,1]$ $B\ \ [0,+\infty)$ $C\ \ (0,1)$ $D\ \ [0,1]$

考点：集和

答案：D

3、在单调递增的等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_3=1, a_2a_4=\dfrac{3}{4}$，则 $a_1=$（ ）

$A\ \ -1$ $B\ \ 0$ $C\ \ \dfrac{1}{4}$ $D\ \ \dfrac{1}{2}$

考点：等差数列

答案：B

4、某袋中有编号为1、2、3、4、5、6 的 6 个小球（小球除编号外完全相同），甲先从袋中摸出一个球，记下编号后放回，乙再从袋中摸出一个球，则甲、乙两人所摸出的球的编号不同的概率是（ ）

$A\ \ \dfrac{1}{5}$ $B\ \ \dfrac{1}{6}$ $C\ \ \dfrac{5}{6}$ D $\dfrac{35}{36}$

考点：概率

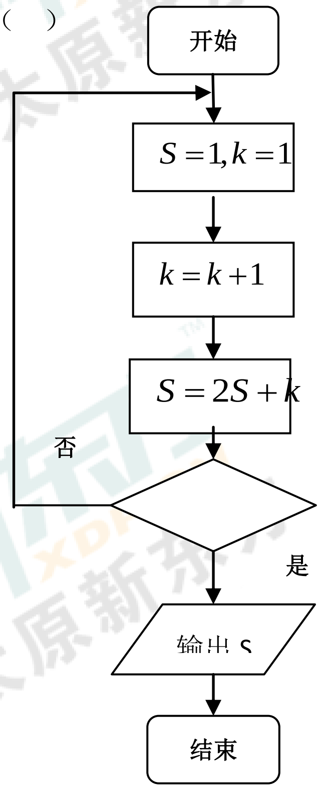
答案：C

5、某程序框图如右图所示，若输出的 $S=57$，则判断框内应为（ ）

$A\ k>6?$ $B\ k>5?$ $C\ k>4?$ $D\ k>3?$

考点：程序算法

答案：C



6、已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\frac{\pi}{4})(\omega>0)$ 的最小正周期为 π，则函数 $f(x)$ 的图像（）

A 关于直线$x=\frac{\pi}{4}$对称 B 关于直线$x=\frac{\pi}{8}$对称

C 关于点（$\frac{\pi}{4}$,0）对称 D 关于点（$\frac{\pi}{8}$,0）对称

考点：三角函数

答案：B

7、已知 AB 是圆 $x^2+y^2-4x+2y=0$ 内过点 $E(1,0)$ 的最短弦，则 $|AB|=$（ ）

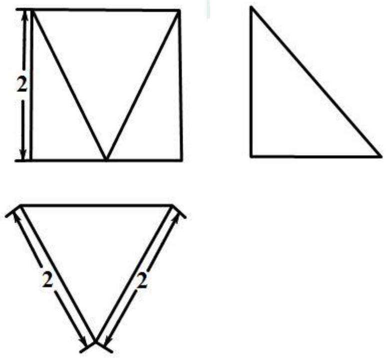
A $\sqrt{2}$ B $\sqrt{3}$ C 2 D $2\sqrt{3}$

考点：直线与圆

答案：D

8、已知某空间几何体的三视图如右图所示，则该几何体的体积是

A $\frac{\sqrt{3}}{3}$ B $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ C $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ D $\frac{5\sqrt{3}}{3}$



考点：三视图

答案：C

9、已知实数 $a>1, 0<b<1$，则函数 $f(x)=a^x+x-b$ 的零点所在区间是

A. $(-2,-1)$ B. $(-1,0)$ C. $(0,1)$ D. $(1,2)$

考点：函数的零点与方程的根

答案：B

10、已知实数 x,y 满足条件 $\begin{cases} x\ge 2, \\ x+y\le 4, \\ -2x+y+c\ge 0, \end{cases}$ 若目标函数 $z=3x+y$ 的最小值为 5，则其最大值为

A.10 B.12 C.14 D.15

考点：线性规划

答案：A

11、已知点 F_1,F_2 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$ 的左右焦点，若双曲线左支上存在点 P 与点 F_2 关于直线 $y=\frac{b}{a}x$ 对称，则该双曲线的离心率为

A. $\sqrt{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ C. 2 D. $\sqrt{5}$

考点：双曲线的性质与对称

答案：D

12、已知函数 $f(x)=\ln x+\tan\alpha\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ 的导函数为 $f'(x)$，若方程 $f'(x)=f(x)$ 的根 x_0 小于 1，则 α 的取值范围为

A. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)$ B. $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ C. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$ D. $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$

考点：函数的零点与导数的应用

答案：A

二、填空题

13、已知 $\vec{e_1},\vec{e_2}$ 是夹角为 45° 的两个单位向量，则 $\left|\sqrt{2}\vec{e_1}-\vec{e_2}\right|=$________.

考点：平面向量的模长

答案：1

14、函数 $f(x)=xe^x$ 在点 $(1,f(1))$ 的切线方程为_________。

考点：导数的几何意义

答案： $y=2ex-e$

15、已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n， $a_1=-1,S_n=2a_n+n\left(n\in N^*\right)$，则 $a_n=$ _________

考点：数列的通项公式

答案：$1-2^n$

16、已知在直角梯形 $ABCD$ 中，$AB\perp AD,CD\perp AD,AB=2AD=2CD=2$,将直角梯形 $ABCD$ 沿 AC 折成三棱锥 $D-ABC$，当三棱锥 $D-ABC$ 的体积最大时，其外接球的体积为_________

考点：几何体的外接球

答案：$\frac{4\pi}{3}$

三、解答题

17、已知 a,b,c 分别是 ΔABC 的角 A,B,C 所对的边，且 $c=2$，$C=\frac{\pi}{3}$

（1）若 ΔABC 的面积等于 $\sqrt{3}$，求 a,b

（2）若 $\sin C+\sin(B-A)=2\sin 2A$，求 A 的值

解：（1）根据三角形面积公式可知：$S=\sqrt{3}=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ab\frac{\sqrt{3}}{2}$ 推得 $ab=4$；

又根据三角形余弦公式可知：$\cos C=\frac{1}{2}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{a^2+b^2-4}{8}$ 推得 $a^2+b^2=8$。

综上可得 $a=b=2$。

（2）$\sin C+\sin(B-A)=2\sin 2A,\therefore \sin(B+A)+\sin(B-A)=4\sin A\cos A$

$\sin B\cos A=2\sin A\cos A$

当 $\cos A=0$ 时，$A=\frac{\pi}{2}$

当 $\cos A\neq 0$ 时，$\sin B=2\sin A$,由余弦定理得 $b=2a$，

联立 $\begin{cases} a^2+b^2-ab=4 \\ b=2a \end{cases}$，得 $a=\frac{2\sqrt{3}}{3},b=\frac{4\sqrt{3}}{3}$

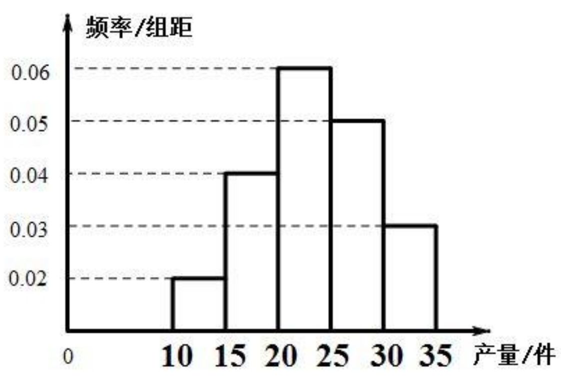
$\therefore b^2=a^2+c^2$，$\because C=\frac{\pi}{3},\therefore A=\frac{\pi}{6}$，

综上 $A=\frac{\pi}{2}$ 或 $A=\frac{\pi}{6}$

18、为了考查某厂 2000 名工人的生产技能情况，随机抽查了该厂 n 名工人某天的产量（单位：件），整理后得到如下的频率分布直方图（产量的区间分别为 $[10,15),[15,20),[20,25),[25,30),[30,35]$），其中产量在 $[20,25)$ 的工人有 6 名。

（1）求这一天产量不小于 25 的工人数

（2）该厂规定从产量低于 20 件的工人中选取 2 名工人进行培训，求这两名工人不在同一分组的概率。



考点：频率分布直方图

答案：（1）由题意得产量为$[20,25)$的频率为 0.06×5 =0.3，所以$n=\dfrac{6}{0.3}=20$

所以这一天产量不小于 25 的工人数为$(0.05+0.03)\times5\times20=8$

（2）有题意得，产量在$[10,15)$的工人数为$20\times0.02\times5=2$，记他们分别是A,B产量在$[15,20)$的工人数为$20\times0.04\times5=4$，记他们分别是a,b,c,d，则从产量低于 20 件的工人中选取 2 位工人的结果为：$(A,B),(A,a)(A,b),(A,c)$，$(A,d)(B,a)(B,b)(B,c)(B,d)(a,b)(a,c)$ $(a,d)(b,c)(b,d)(c,d)$

共有 15 种不同结果

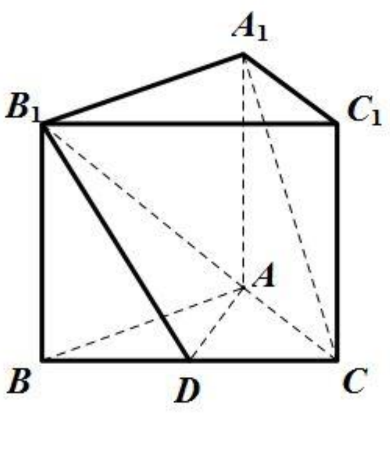
其中 2 位工人不在同一组的为$(A,a)(A,b)(A,c)(A,d)(B,a)(B,b)(B,c)(B,d)$有 8 种

所以所求概率为$P=\dfrac{8}{15}$

19、如图，在底面是正三角形的直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AA_1=AB=2$，D是BC的中点。

（1）求证：$A_1C\parallel$平面AB_1D

（2）求点A_1到平面AB_1D的距离



考点：线面平行、等体积求点面距

答案：

（1）证明：连结A_1B交AB_1于点O，连结OD；

$\because ABC-A_1B_1C_1$是直三棱柱，$\therefore ABB_1A_1$是平行四边形，

$\therefore O$ 是 A_1B 的中点。

$\because D$ 是 BC 的中点，$\therefore OD // A_1C$

$\because OD \subset$ 平面 AB_1D， $A_1C \not\subset$ 平面 AB_1D

$\therefore A_1C //$ 平面 AB_1D

（2）由（1）知，O 是 A_1B 的中点。

$\therefore$ 点 A_1 到平面 AB_1D 的距离等于点 B 到平面 AB_1D 的距离

$\because ABC-A_1B_1C_1$ 是直三棱柱，$\therefore BB_1 \perp$ 平面 ABC，$\therefore$ 平面$BCC_1B_1 \perp$ 平面ABC，

$\because \triangle ABC$ 是正三角形，D 是 BC 的中点。$\therefore AD \perp BC, \therefore AD \perp$ 平面BCC_1B_1

$\therefore AD \perp B_1D$，$\therefore B_1D = \sqrt{BB_1^2 + BD^2} = \sqrt{5}$

设点 B 到平面 AB_1D 的距离为 d，$\because V_{B_1-ABD} = V_{B-AB_1D}$，$\therefore S_{\triangle ABD} \cdot BB_1 = S_{\triangle AB_1D} \cdot d$

$$\therefore d = \frac{S_{\Delta ABD} \cdot BB_1}{S_{\Delta AB_1D}} = \frac{AD \cdot BD \cdot BB_1}{AD \cdot B_1D} = \frac{BD \cdot BB_1}{B_1D} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

20、已知椭圆 $\frac{x^2}{a} + \frac{y^2}{b} = 1(a > b > 0)$ 的左、右焦点分别是 F_1、F_2，其离心率 $e = \frac{1}{2}$，点 P 为椭圆上的一个动点，ΔPF_1F_2 面积的最大值为 $4\sqrt{3}$

（1）求椭圆的方程

（2）若 A、B、C、D 是椭圆上不重合的四个点，AC 与 BD 相交于点 F_1, $\vec{AC} \bullet \vec{BD} = 0$，

求 $|\vec{AC}| + |\vec{BD}|$ 的取值范围。

考点：圆锥曲线

解析：（1）由题意得，当点 P 是椭圆的上、下顶点时，ΔPF_1F_2 的面积取最大值

此时 $S_{\Delta PF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot |F_1F_2| \cdot |OP| = bc, \therefore bc = 4\sqrt{3}$

$\because e = \frac{1}{2}$， $\therefore b = 2\sqrt{3}$， $a = 4$

$\therefore$ 椭圆的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$

（2）由（1）得椭圆的方程为 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$，则 F_1 的坐标为（-2,0）

$\because \vec{AC}\cdot\vec{BD}=0,\ \therefore AC\perp BD$

①当直线 AC 与 BD 中有一条直线斜率不存在时，易得 $|\vec{AC}|+|\vec{BD}|=6+8=14$

②当直线 AC 斜率 k存在且$k\neq 0$，则其方程为 $y=k(x+2)$, 设$A(x_1y_1), C(x_2,y_2)$

则点 A、C 的坐标是方程组 $\begin{cases} y=k(x+2) \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1 \end{cases}$ 的两组解

$\therefore(3+4k^2)\ x^2+16k^2x+16k^2-48=0$

$\therefore \begin{cases} x_1+x_2=\frac{-16k^2}{3+4k^2} \\ x_1x_2=\frac{16k^2-48}{3+4k^2} \end{cases}$ $\therefore |\vec{AC}|=\sqrt{1+k^2}|x_1-x_2|=\frac{24(k^2+1)}{3+4k^2}$

此时直线 BD 的方程为 $y=-\frac{1}{k}(x+2)$

同理由 $\begin{cases} y=-\frac{1}{k}(x+2) \\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1 \end{cases}$ 可得 $|\overrightarrow{BD}|=\frac{24(k^2+1)}{3k^2+4}$

$\therefore |\vec{AC}|+|\vec{BD}|=\frac{24(k^2+1)}{4k^2+3}+\frac{24(k^2+1)}{3k^2+4}=\frac{168(k^2+1)^2}{(3k^2+4)(4k^2+3)}$

令 $t=k^2+1(k\neq 0)$, 则$t>1, \therefore |\vec{AC}|+|\vec{BD}|=\frac{168}{12+\frac{t-1}{t^2}}$

$\because t>1, \therefore \frac{t-1}{t^2}\leq\frac{1}{4}, \therefore |\vec{AC}|+|\vec{BD}|\in[\frac{96}{7},14)$

21、已知函数 $f(x)=(x^2-ax+a)e^x-x^2, a\in R$

（1）若函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调函数，求 a 的取值范围；

（2）若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处取得极小值，求 a 的取值范围。

考点：导数求单调性，求极值。

解析：(1)由题意得 $f'(x)=x[(x+2-a)e^x-2]=xe^x(x+2-\frac{2}{e^x}-a),x\in R$

$\because f(x)$在$(0,+\infty)$内单调递增，$\therefore f'(x)\geq 0$在$(0,+\infty)$内恒成立，

$\therefore x+2-\frac{2}{e^x}\geq a$在$(0,+\infty)$内恒成立

又函数 $g(x)=x+2-\frac{2}{e^x}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，$\therefore a\leq g(0)=0$

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty,0]$；

（2）由题意得 $f'(x)=xe^x(x+2-\frac{2}{e^x}-a),x\in R$

令 $f'(x)=0,$ 则 $x=0$或 $x+2-\frac{2}{e^x}-a=0,$即$x=0$或$g(x)=a$

$\because g(x)=x+2-\frac{2}{e^x}$在$(-\infty,+\infty)$上单调递增，，其值域为 R

$\therefore$ 存在唯一$x_0\in R,$ 使得 $g(x_0)=0$

①若 $x_0>0$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g(x)<a, f'(x)>0$；当 $x\in(0,x_0)$ 时，$g(x)<a$，

$f'(x)<0\ \therefore f(x)$在$x=0$ 处取得极大值，这与题设矛盾；

②若 $x_0=0$，当 $x\in(-\infty,0)$ 时，$g(x)<a, f'(x)>0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)>a$，

$f'(x)>0\ \therefore f(x)$在$x=0$ 处不取极值，这与题设矛盾；

③若 $x_0<0$，当 $x\in(x_0,0)$ 时，$g(x)>a, f'(x)<0$；当 $x\in(0,+\infty)$ 时，$g(x)>a$，

$f'(x)>0\ \therefore f(x)$在$x=0$ 处取得极小值；

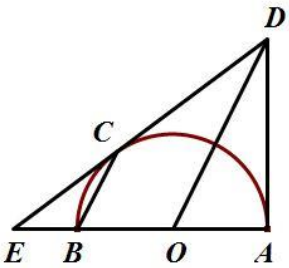
综上所述，$x_0<0,\therefore a=g(x_0)<g(0)=0$，

$\therefore a$ 的取值范围是 $(-\infty,0)$

22、如图，已知点 C 是以 AB 为直径的半圆 O 上一点，过 C 的直线交 AB 的延长线于 E，交过点 A 的圆 O 的切线于点 D，$BC//OD, AD=AB=2$

（1）求证：直线 DC 是圆 O 的切线

（2）求线段 EB 的长



考点：平面几何

解析：（1）证明：连接 OC，

$\because AD$是圆O的切线$,\therefore \angle DAO=90^\circ$

$\because BC\,//\,OD,\therefore \angle AOD=\angle OBC,\angle DOC=\angle BCO$

$\because OB=OC,\therefore \angle OBC=\angle BCO$

$\therefore \angle AOD=\angle DOC,$

又$\because OA=OC,OD=OD,\therefore \Delta OCD\cong \Delta OAD$

$\therefore \angle DCO=\angle DAO=90^\circ,\therefore OC\perp DC$

$\therefore$直线DC是圆O的切线

（2）

设$EB=x,\because BC\,//\,OD,\therefore \dfrac{EB}{BO}=\dfrac{EC}{CD},$

$\because$DC是圆O的切线$,\therefore DC=DA=2$

$\because BO=\dfrac{1}{2}AB=1,\therefore DC=DA=2$

由（1）得直线 EC 是圆 O 的切线$\therefore EC^2=EB\cdot EA$

$\therefore 4x^2=x(x+2),\therefore EB=x=\dfrac{2}{3}$

23，在直角坐标系 xoy 中，曲线C_1的参数方程为$\begin{cases}x=1+\sqrt{3}\cos\theta\\ y=\sqrt{3}\sin\theta\end{cases}$（其中θ为参数），点 M 是曲线$C_1$上的动点，点 P 在曲线$C_2$上，且满足$\vec{OP}=2\vec{OM}$

（1）求曲线C_2的普通方程

（2）以原点 O 为极点，x轴的正半轴为极轴建立极坐标系，射线分别交于$\theta=\dfrac{\pi}{3}$与曲线C_1、C_2分别交于 A、B 两点，求$|AB|$

考点：极坐标与参数方程

解析：（1）设 P（x,y） $M(x',y')$，$\because \vec{OP}=2\vec{OM}$，$\therefore \begin{cases} x=2x' \\ y=2y' \end{cases}$

$\because$ 点 M 在曲线 C_1 上，$\therefore \begin{cases} x'=1+\sqrt{3}\cos\theta \\ y'=\sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$

$\therefore (x'-1)^2+y'^2=3$

曲线 C_2 的普通方程为 $(x-2)^2+y^2=12$

（2）曲线 C_1 的极坐标方程为 $\rho^2-2\rho\cos\theta-2=0$

将 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 代入得 $\rho=2$ $\therefore$ A 的极坐标为 $(2,\dfrac{\pi}{3})$

曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2-4\rho\cos\theta-8=0$

将 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$ 代入得 $\rho=4$，$\therefore$ B 的极坐标为 $(4,\dfrac{\pi}{3})$

24、已知函数 $f(x)=|2x-1|+|x-a|,\quad a\in R$

（1）当 $a=3$ 时，解不等式 $f(x)\le 4$；

（2）若 $f(x)=|x-1+a|$，求 x 的取值范围。

考点：绝对值不等式

解：（1）当 $a=3$ 时

$$f(x)=|2x-1|+|x-3|=\begin{cases} 3x-4, x\ge 3 \\ x+2, \dfrac{1}{2}<x<3 \\ 4-3x, x\le \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

其图像如图所示，与直线 $y=4$ 相交于点 $A(0,4)$ 和 $B(2,4)$

$\therefore$ 不等式 $f(x)\le 4$ 的解集为 $\{x|0\le x\le 2\}$；

（2）$\because$ $f(x)=|2x-1|+|x-a|\ge|(2x-1)-(x-a)|=|x-1+a|$，

①当 $a<\dfrac{1}{2}$ 时，x 的取值范围为 $\left\{x\middle|a\le x\le\dfrac{1}{2}\right\}$

②当$a=\frac{1}{2}$时，x的取值范围是$\left\{\frac{1}{2}\right\}$

③当$a>\frac{1}{2}$时，x的取值范围是$\left\{x\left|\frac{1}{2}\le x\le a\right.\right\}$