2015 年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学（理科）

一、选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，满分 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1.若集合 $M=\{x\mid (x+4)(x+1)=0\}, N=\{x\mid (x-4)(x-1)=0\}$，则 $M\cap N=$

A. $\{1,4\}$　　B. $\{-1,-4\}$　　C. $\{0\}$　　D. $\varnothing$

【答案】D

【解析】$\because M=\{x|(x+4)(x+1)=0\}=\{-4,-1\}$，$N=\{x|(x-4)(x-1)=0\}=\{1,4\}$

$\therefore M\cap N=\Phi$

2.若复数 $z=i(3-2i)$（i 是虚数单位），则 $\bar{z}=$

A. $2-3i$　　B. $2+3i$　　C. $3+2i$　　D. $3-2i$

【答案】A

【解析】$\because z=i(3-2i)=3i+2$，

$\therefore \bar{z}=2-3i$

3. 下列函数中，既不是奇函数，也不是偶函数的是

A. $y=\sqrt{1+x^2}$　　B. $y=x+\dfrac{1}{x}$　　C. $y=2^x+\dfrac{1}{2^x}$　　D. $y=x+e^x$

【答案】D

【解析】A 和 C 选项为偶函数，B 选项为奇函数， D 选项为非奇非偶函数

4. 袋中共有 15 个除了颜色外完全相同的球，其中有 10 个白球，5 个红球，从袋中任取 2 个球，所取的 2 个球中恰好有 1 个白球，1 个红球的概率为

A. $\dfrac{5}{21}$　　B. $\dfrac{10}{21}$　　C. $\dfrac{11}{21}$　　D. 1

【答案】B

【解析】$P=\dfrac{C_{10}^1C_5^1}{C_{15}^2}=\dfrac{10}{21}$

5. 平行于直线 $2x+y+1=0$ 且与圆 $x^2+y^2=5$ 相切的直线的方程是

A. $2x+y+5=0$或$2x+y-5=0$

B. $2x+y+\sqrt{5}=0$或$2x+y-\sqrt{5}=0$

C. $2x-y+5=0$或$2x-y-5=0$

D. $2x-y+\sqrt{5}=0$或$2x-y-\sqrt{5}=0$

【答案】A

【解析】设所求直线为 $2x+y+c=0$，因为圆心坐标为（0，0），则由直线与圆相切可得

$d=\dfrac{|c|}{\sqrt{2^2+1}}=\dfrac{|c|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$，解得 $c=\pm5$，所求直线方程为 $2x+y+5=0$或$2x+y-5=0$

6. 若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}4x+5y\ge 8\\ 1\le x\le 3\\ 0\le y\le 2\end{cases}$，则 $z=3x+2y$ 的最小值为

A. 4

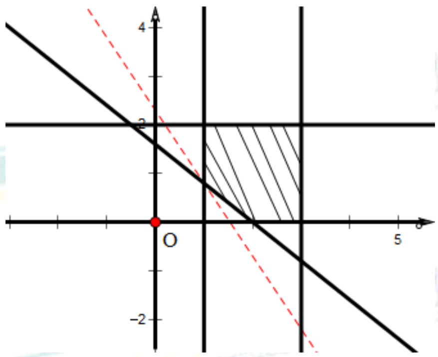
B. $\dfrac{23}{5}$

C. 6

D. $\dfrac{31}{5}$

【答案】B

【解析】如图所示，阴影部分为可行域，虚线表示目标函数 $z=3x+2y$，则当目标函数过点（1，$\dfrac{8}{5}$），$z=3x+2y$ 取最小值为 $\dfrac{23}{5}$



7. 已知双曲线 $C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的离心率 $e=\dfrac{5}{4}$，且其右焦点为 $F_2(5,0)$，则双曲线 C 的方程为

A. $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{3}=1$

B. $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$

C. $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

D. $\dfrac{x^2}{3}-\dfrac{y^2}{4}=1$

【答案】C

【解析】由双曲线右焦点为 $F_2(5,0)$，则 c=5，$\because e=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{4}\therefore a=4$

$\therefore b^2=c^2-a^2=9$，所以双曲线方程为 $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

8. 若空间中 n 个不同的点两两距离都相等，则正整数 n 的取值

A. 至多等于3

B. 至多等于4

C. 等于5

D. 大于5

【答案】B

【解析】当 $n=3$ 时，正三角形的三个顶点符合条件；当 $n=4$ 时，正四面体的四个顶点符合条件

故可排除 A，C，D 四个选项，故答案选 B

二、填空题：本大题共 7 小题，考生作答 6 小题，每小题 5 分，满分 30 分.

（一）必做题（9-13 题）

9. 在 $(\sqrt{x}-1)^4$ 的展开式中，x 的系数为__________.

【答案】6

【解析】$C_4^r\left(\sqrt{x}\right)^{4-r}\left(-1\right)^r=\left(-1\right)^r C_4^r x^{\frac{4-r}{2}}$，则当 $r=2$ 时，x 的系数为 $\left(-1\right)^2 C_4^2=6$

10. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=25$，则 $a_2+a_8=$__________.

【答案】10

【解析】由等差数列性质得，$a_3+a_4+a_5+a_6+a_7=5a_5=25$，解得 $a_5=5$，所以 $a_2+a_8=2a_5=10$

11. 设 ΔABC 的内角 A，B，C 的对边分别为 a，b，c，若 $a=\sqrt{3}$，$\sin B=\frac{1}{2}$，$C=\frac{\pi}{6}$，则 b=__________.

【答案】1

【解析】$\because \sin B=\frac{1}{2}, \therefore B=\frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$，又 $\because C=\frac{\pi}{6}$，故 $B=\frac{\pi}{6}$，所以 $A=\frac{2\pi}{3}$

由正弦定理得，$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，所以 $b=1$

12. 某高三毕业班有 40 人，同学之间两两彼此给对方仅写一条毕业留言，那么全班共写了__________条毕业留言。(用数字作答)

【答案】1560

13. 已知随机变量 X 服从二项分布 $B(n,p)$，$E(X)=30$，$D(X)=20$，则 $p=$__________.

【答案】$\frac{1}{3}$

【解析】$E\left(X\right)=np=30$，$D\left(X\right)=np(1-p)=20$，解得 $p=\frac{1}{3}$

（二）选做题（14-15 题，考生只能从中选做一题），

14. (坐标系与参数方程选做题) 已知直线 l 的极坐标方程为 $2\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=\sqrt{2}$，点 A 的极坐标为 $A(2\sqrt{2},\frac{7\pi}{4})$，则点 A 到直线 l 的距离为__________.

【答案】$\frac{5\sqrt{2}}{2}$

【解析】$\because 2\rho\sin(\theta-\frac{\pi}{4})=2\rho(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta)=\sqrt{2}\ \therefore \rho\sin\theta-\rho\cos\theta=1$

即直线 l 的直角坐标方程为 $y-x=1$，即 $x-y+1=0$，点 A 的直角坐标为（2，-2）

A 到直线的距离为 $d=\dfrac{|2+2+1|}{\sqrt{2}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

15. (几何证明选讲选做题)如图 1，已知 AB 是圆 O 的直径，$AB=4$，EC 是圆 O 的切线，切点为 C，$BC=1$，过圆心 O 作 BC 的平行线，分别交 EC 和 AC 于点 D 和点 P，则 $OD=$__________.

【答案】8

【解析】

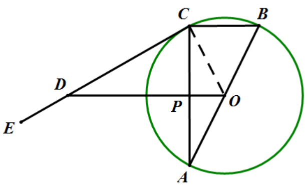


图 1

如图所示，连结 O，C 两点，则 $OC\perp CD$，$\because OD\perp AC$ $\therefore \angle CDO+\angle ACD=90^\circ$

$\because \angle ACD=\angle CBA$，$\angle CBA+\angle CAB=90^\circ$，$\therefore \angle CDO=\angle CAB$

则 Rt△CDO ~ Rt△CAB，所以 $\dfrac{OD}{AB}=\dfrac{OC}{BC}$，所以 $OD=8$

三、解答题（本大题共 6 小题，满分 80 分，解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤）

16.（本小题满分 12 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知向量 **m**=（$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，-$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$），**n**=（$\sin x$，$\cos x$），x （0，$\dfrac{\pi}{2}$）.

（1）若 **m**⊥n，求 $\tan x$ 的值；

（2）若 **m** 与 **n** 的夹角为，求 x 的值.

【解析】

（1）$\because \vec{m}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，$\vec{n}=(\sin x,\cos x)$，且 $\vec{m}\perp\vec{n}$，$\therefore \vec{m}\cdot\vec{n}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x=0$

解得，$\tan x=1$

（2）$\because \vec{m}$ 与 $\vec{n}$ 的夹角为 $\frac{\pi}{3}$

$\therefore \vec{m}\cdot\vec{n}=|\vec{m}||\vec{n}|\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$

$\therefore \vec{m}\cdot\vec{n}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x-\cos x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$

$\therefore x-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ \ (k\in Z)$

$\because x\in\left(0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$　　　$\therefore\ x=\frac{5\pi}{12}$

17.（本小题满分 12 分）

某工厂 36 名工人的年龄数据如下表：

工人编号年龄		工人编号年龄		工人编号年龄		工人编号年龄	
1	40	10	36	19	27	28	34
2	44	11	44	20	43	29	39
3	40	12	38	21	41	30	43
4	41	13	39	22	37	31	38
5	33	14	33	23	34	32	42
6	40	15	45	24	42	33	53
7	45	16	39	25	37	34	37
8	42	17	38	26	44	35	49
9	43	18	36	27	42	36	39

（1）用系统抽样法从 36 名工人中抽取容量为 9 的样本，且在第一分段里采用随机抽样法抽到的年龄数据为 44，列出样本的年龄数据；

（2）计算（1）中样本的均值 $\overline{x}$ 和方差 s^2；

（3）36 名工人中年龄在 $\overline{x}-s$ 与 $\overline{x}+s$ 之间有着多少人？所占的百分比是多少（精确到 0.01%）？

【解析】

（1）　由题意得，通过系统抽样分别抽取编号为 2，6，10，14，18，22，26，30，34 的年龄数据为样本。

则样本的年龄数据为：44，40，36，43，36，37，44，43，37

（2）　由（1）中的样本年龄数据可得，

$$\overline{x}=\frac{1}{9}(44+40+36+43+36+37+44+43+37)=40$$

则有

$$s^2=\frac{1}{9}\left[(44-40)^2+(40-40)^2+(36-40)^2+(43-40)^2+(36-40)^2+(37-40)^2+(44-40)^2+(43-40)^2+(37-40)^2\right.$$

$$=\frac{100}{9}$$

（3）　由题意知年龄在 $\left[40-\frac{100}{9},40+\frac{100}{9}\right]$ 之间，即年龄在 $[37,43]$ 之间，

由（1）中容量为 9 的样本中年龄在 $[37,43]$ 之间的有 5 人，

所以在 36 人中年龄在$[37,43]$之间的有$36\times\frac{5}{9}=20$（人），

则所占百分比为$\frac{20}{36}\times100\%\approx55.56\%$

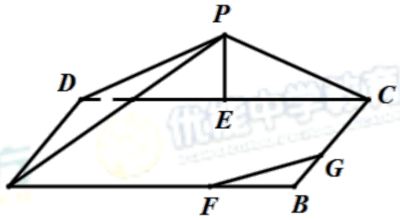
18.（本小题满分 14 分）

如图 2，三角形 PDC 所在的平面与长方形 ABCD 所在的平面垂直，PD=PC=4，AB＝6，BC=3，点 E 是 CD 边的中点，点 F，G 分别在线段 AB，BC 上，且 AF＝2FB，CG＝2GB，

（1）证明：PE⊥FG；

（2）求二面角 P-AD-C 的正切值；

（3）求直线 PA 与直线 FG 所成角的余弦值.



【解析】

（1）证明：$\because PD=PC\quad\therefore\Delta PDC$为等腰三角形

$\because E$为CD边的中点，所以，$PE\perp DC$

$\because$平面$PDC\perp$平面$ABCD$，平面$PDC\cap$平面$ABCD=DC$，且$PE\subset$平面PDC

$\therefore PE\perp$平面$ABCD$

$\because FG\subset$平面$ABCD$，$\therefore PE\perp FG$

（2） 由长方形$ABCD$知，$AD\perp DC$

$\because$平面$PDC\perp$平面$ABCD$，平面$PDC\cap$平面$ABCD=DC$，且$AD\subset$平面$ABCD$

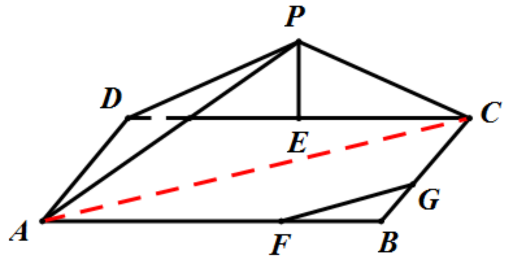
$\therefore AD\perp$平面PDC

$\because PD\subset$平面PDC，$\therefore PD\perp AD$

由$DC\perp AD$，$PD\perp AD$，且$PC\subset$平面PDA，$DC\subset$平面CAD

$\therefore\angle PDC$即为二面角$P-AD-C$

由长方形$ABCD$得$DC=AB=6$，$\because E$为CD边的中点，则$DE=\frac{1}{2}DC=3$



$\because PD=4,\ DE=3,\ PE\perp DC,\therefore PE=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$

$\therefore\tan\angle PDC=\frac{PE}{DE}=\frac{\sqrt{7}}{3}$

即二面角 $P-AD-C$ 的正切值为 $\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

（3） 如图，连结 A,C

$\because AF=2FB$，$CG=2GB$

$\therefore \dfrac{BF}{AB}=\dfrac{BG}{BC}$， $FG // AC$

$\therefore \angle PAC$ 为直线 PA 与直线 FG 所成角.

由长方形 $ABCD$ 中 $AB=6$，$BC=3$ 得

$AC=\sqrt{6^2+3^2}=3\sqrt{5}$

由（2）知 $AD\perp PD$， $\because AD=BC=3$，$PD=4$ $\therefore AP=\sqrt{3^2+4^2}=5$

由题意知 $PC=4$

$\therefore \cos\angle PAC=\dfrac{AP^2+AC^2-PC^2}{2\cdot AP\cdot AC}=\dfrac{9\sqrt{5}}{25}$

所以，直线 PA 与直线 FG 所成角的余弦值为 $\dfrac{9\sqrt{5}}{25}$

19.（本小题满分 14 分）

设 $a>1$，函数 $f(x)=(1+x^2)e^x - a$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间；

（2）证明： $f(x)$ 在 $\left(\quad , \quad \right)$ 上仅有一个零点；

（3）若曲线 $y=f(x)$ 在点 P 处的切线与 x 轴平行，且在点 $M(m,a)$ 的切线与直线 OP 平行（O 是坐标原点），证明： $m \ - \sqrt[3]{a-\dfrac{2}{e}} \quad 1$.

【解析】

（1）

Q $f(x)=(1+x^2)e^x-a$

$\therefore f'(x)=2xe^x+(1+x^2)e^x=(1+x)^2e^x$

Q $x\in R$时，$f'(x)\ge 0$恒成立

$\therefore f(x)$的单调递增区间为R

（2）由（1）可知 $f(x)$ 在 R 上为单调递增函数

当$x=\sqrt{a}$时，

$f(\sqrt{a})=(1+a)e^{\sqrt{a}}-a$

$=e^{\sqrt{a}}+a(e^{\sqrt{a}}-1)$

$\because a>1$

$\therefore f(\sqrt{a})>0$

$\therefore f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上仅有一个零点

（3）令点 P 为(x_0,y_0)

$\because$曲线$y=f(x)$在点P处的切线与x轴平行

$\therefore f'(x_0)=(x_0+1)^2e^{x_0}=0$

$\therefore x_0=-1, p(-1,\frac{2}{e}-a)$

$\therefore$直线OP斜率为$k_{op}=\dfrac{\frac{2}{e}-a}{-1}=a-\dfrac{2}{e}$

$\because$在点M(m,n)处的切线与直线OP平行

$\therefore f'(m)=(m+1)^2e^m=a-\dfrac{2}{e}$

要证明$m\le\sqrt[3]{a-\frac{2}{e}}-1$,即证$(m+1)^3\le a-\dfrac{2}{e}$

需证明　$(m+1)^3\le(m+1)^2$

需证明　$m+1\le e^m$

设$g(m)=e^m-m-1$

$\therefore g'(m)=e^m-1$

令$g'(m)=0, m=0$

$\therefore g(m)$在$(-\infty,0)$上单调递减，在$(0,+\infty)$上单调递增

$\therefore g(m)\ge g(0)=0$

$\therefore e^m-m-1\ge0$

$\therefore e^m\ge m-1$

命题得证.

20.（本小题满分 14 分）

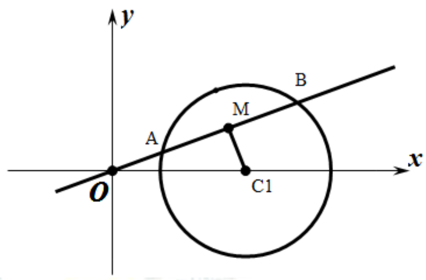
已知过原点的动直线l与圆$C_1: x^2+y^2-6x+5=0$相交于不同的两点 A，B.

（1）求圆C_1的圆心坐标；

（2）求线段 AB 的中点 M 的轨迹 C 的方程；

（3）是否存在实数k，使得直线$L: y=k(x-4)$与曲线 C 只有一个交点？若存在，求出k的取值范

围；若不存在，说明理由.



【解析】

（1）由题意知：圆 C_1 方程为：$(x-3)^2+y^2=4$

$\therefore$圆 C_1 的圆心坐标为（3,0）

（2）由图可知，令 $M(x_1,y_1),|OM|=\sqrt{x_1^2+y_1^2},|C_1M|=\sqrt{(x_1-3)^2+y_1^2}$

Q$|OC_1|^2=|OM|^2+|C_1M|^2$

$\therefore 3^2=x_1^2+y_1^2+(x_1-3)^2+y_1^2$

$\therefore (x_1-\frac{3}{2})^2+y_1^2=\frac{9}{4}$

$\because$直线 L 与圆 C_1 交于 A、B 两点

$\therefore$直线 L 与圆 C_1 的距离：$0\le d<2$

$\therefore 0\le (x_1-3)^2+y_1^2<4$

$\therefore 0\le (x_1-3)^2+\frac{9}{4}-(x_1-\frac{3}{2})^2<4$

$\therefore \frac{5}{3}<x_1\le 3$

$\therefore$轨迹C的方程为:$(x-\frac{3}{2})^2+y^2=\frac{9}{4}\quad x\in(\frac{5}{3},3]$

（3）$\because$直线 L：$y=k(x-4)$与曲线$(x-\frac{3}{2})^2+y^2=\frac{9}{4}$仅有1个交点

联立方程：$\begin{cases} y=k(x-4) \\ (x-\frac{3}{2})^2+y^2=\frac{9}{4} \end{cases}$，$x\in(\frac{5}{3},3]$

得：$(k^2+1)x^2-(8k^2+3)x+16k^2=0$，在区间$(\frac{5}{3},3]$有且仅有1个解

当$\Delta=(8k^2+3)^2-64k^2(k^2+1)=0$时，$k=\pm\frac{4}{3}$

此时，$x=\frac{12}{5}\in(\frac{5}{3},3]$，仅有一个交点，符合题意。

当$\Delta\ne 0$时，令$g(x)=(k^2+1)x^2-(8k^2+3)x+16k^2$

则有：$g(\frac{5}{3})gg(3)\le 0$

解得：$k\in[-\frac{2\sqrt{5}}{7},\frac{2\sqrt{5}}{7}]$

$\therefore$ k 的取值范围为：$k\in[-\frac{2\sqrt{5}}{7},\frac{2\sqrt{5}}{7}]$或$k=\pm\frac{4}{3}$

21.（本小题满分 14 分）

数列$\{a_n\}$满足：$a_1 \quad 2a_2 \quad L \quad na_n \quad 4 \quad \frac{n+2}{2^{n-1}}, n \quad \mathbf{N}^*$.

（1）求a_3的值；

（2）求数列$\{a_n\}$的前 n 项和T_n；

（3）令$b_1 \quad a_1, b_n \quad \frac{T_{n-1}}{n} \quad (1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad L \quad \frac{1}{n})a_n(n \quad 2)$，证明：数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足

$S_n < 2 + 2\ln n$.

【解析】

（1）由题意知：$a_1 + 2a_2 + L \ + na_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$

当n=2时，$a_1 + 2a_2 = 4 - \frac{2+2}{2^1}$

当n=3时，$a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 4 - \frac{3+2}{2^2}$

$3a_3 = 4 - \frac{3+2}{2^2} - (4 - \frac{2+2}{2^1}) = \frac{3}{4}$

$a_3 = \frac{1}{4}$

（2）

Q $a_1 + 2a_2 + L \ + na_n = 4 - \frac{n+2}{2^{n-1}}$

$\therefore a_1 + 2a_2 + L \ + na_n + (n+1)a_{n+1} = 4 - \frac{n+3}{2^n}$

$(n+1)a_{n+1} = \frac{n+2}{2^{n-1}} - \frac{n+3}{2^n}$

$= \frac{2n+4-n-3}{2^n}$

$= \frac{n+1}{2^n}$

$\therefore a_{n+1} = (\frac{1}{2})^n$

$\therefore a_n = (\frac{1}{2})^{n-1}$

$\therefore \{a_n\}$是首相为 1，公比为$\frac{1}{2}$的等边数列

$\therefore T_n = \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 - (\frac{1}{2})^{n-1} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}$

（3）由（2）得：$T_n = 2 - \dfrac{1}{2^{n-1}}$

$\therefore S_n = (2 - \dfrac{1}{2^{n-1}})(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots \dfrac{1}{n})$

已知不等式：$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}\cdots \dfrac{1}{n} < \ln(1+n)$

设 $f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x}, x > 0$

$\therefore f'(x) = \dfrac{x^2}{1+x} > 0, f(x)$在$(0, +\infty)$单调递增

$\therefore f(x) = \ln(1+x) - \dfrac{x}{1+x} > f(0) = 0$

$\therefore \ln(1+x) > \dfrac{x}{1+x}$在$(0, +\infty)$上恒成立

令$x=\dfrac{1}{n}$,

$\ln(1+\dfrac{1}{n}) = \ln(1+n) - \ln n + \ln n - \ln(n-1) + \cdots + \ln 2 - \ln 1 = \ln n$

$\because \ln(1+\dfrac{1}{n}) > \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n+1}$

$\therefore \ln n > \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n+1}$

$\therefore S_n = (2 - \dfrac{1}{2^{n-1}})(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots \dfrac{1}{n}) < 2(1 + \dfrac{1}{2} + \cdots \dfrac{1}{n}) < 2(1 + \ln 2) = 2 + 2\ln 2$