2015年普通高等学校招生全国统一考试（广东卷）

数学（文科）

一、选择题：本大题共10小题，每小题5分，满分50分，在每小题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。

1.若集合 $M=\{-1,1\}$， $N=\{-2,1,0\}$,则 $M\cap N=$

A. $\{0,-1\}$　　B. $\{1\}$　　C. $\{0\}$　　D. $\{-1,1\}$

【答案】B

【解析】$M\cap N=\{1\}$

2.已知 i 是虚数单位，则复数 $(1+i)^2=$

A. $2i$　　B. $-2i$　　C. 2　　D. -2

【答案】A

【解析】$(1+i)^2=1+2i+(i)^2=2i$

3. 下列函数中，既不是奇函数，也不是偶函数的是

A. $y=x+\sin 2x$　　B. $y=x^2-\cos x$　　C. $y=2^x+\dfrac{1}{2^x}$　　D. $y=x^2+\sin x$

【答案】D

【解析】A为奇函数，B和C为偶函数，D为非奇非偶函数

4. 若变量 x,y 满足约束条件 $\begin{cases}x+2y\le 2\\ x+y\ge 0\\ x\le 4\end{cases}$ ，则 $z=2x+3y$ 的最大值为

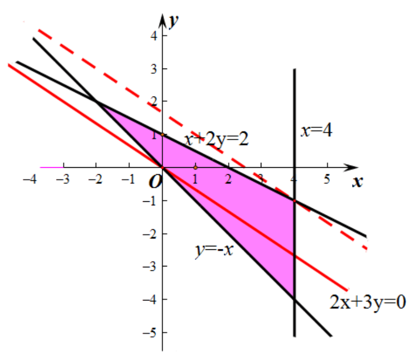
A. 2　　B. 5　　C. 8　　D. 10

【答案】B

【解析】由题意可做出如图所示阴影部分可行域，则目标函数

$z=2x+3y$ 过点（4，-1）时 z 取得最大值为

$z_{\max}=2\times 4+3\times(-1)=5$



5. 设ΔABC的内角A,B,C的对边分别为a,b,c,若a=2,c=$2\sqrt{3}$,$\cos A=\frac{\sqrt{3}}{2}$且$b<c$，则$b=$

A. 3　　B. $2\sqrt{2}$　　C. 2　　D. $\sqrt{3}$

【答案】C

【解析】由余弦定理得，$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+12-4}{4\sqrt{3}b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$，化简得$b^2-6b+8=0$，解得

$b=2或4$，因为$b<c$，所以，$b=2$

6. 若直线l_1与l_2是异面直线，l_1在平面α内，l_2在平面β内，l是平面α与平面β的交线，则下列命题正确的是

A. $l与l_1,l_2都不相交$　　B. $l与l_1,l_2都相交$

C. $l至多与l_1,l_2中的一条相交$　　D. $l至少与l_1,l_2中的一条相交$

【答案】D

7. 已知5件产品中有2件次品，其余为合格品，现从这5件产品中任取2件，恰有一件次品的概率为

A. 0.4　　B. 0.6　　C. 0.8　　D. 1

【答案】B

【解析】设5件产品中2件次品分别标记为A，B，剩余的3件合格品分别设为a，b，c. 则从5件产品中任取2件，共有10种情况，分别为（A，a）、(A，b)、（A，c）、（B，a）、（B，b）、（B，c）、（a，b）、（a，c）、（b，c）、（A，B）其中，恰有一件次品的情况有6种，分别是（A，a）、(A，b)、（A，c）、（B，a）、（B，b）、（B，c），则其概率为$\frac{6}{10}=0.6$

8. 已知椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{m^2}=1(m>0)$的左焦点为$F_1(-4,0)$，则$m$=

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 9

【答案】B

【解析】因为椭圆的左焦点为（-4，0），则有$c=4$，且椭圆的焦点在x轴上，所以有$m^2=25-c^2=25-16=9$，因为$m>0$,所以$m=3$

9. 在平面直角坐标系xOy中，已知四边形$ABCD$是平行四边形，$\overrightarrow{AB}=(1,-2),\overrightarrow{AD}=(2,1)$则$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$

A. 5　　B. 4　　C. 3　　D. 2

【答案】A

【解析】因为四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(1,-2)+(2,1)=(3,-1)$，

则 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times3+1\times(-1)=5$

10. 若集合 $E=\{(p,q,r,s)\mid 0\le p<s\le4,0\le q<s\le4,0\le r<s\le4且p,q,r,s\in N\}$，

$F=\{(t,u,v,w)\mid 0\le t<u\le4,0\le v<w\le4,且t,u,v,w\in N\}$，用 $card(X)$ 表示集合 X 中的元素个数，则 $card(E)+card(F)=$

A. 200　　B. 150　　C. 100　　D. 50

【答案】A

【解析】当 $s=4$ 时，p，q，r 都是取 0，1，2，3 中的一个，有 $4\times4\times4=64$ 种；

当 $s=3$ 时，p，q，r 都是取 0，1，2 中的一个，有 $3\times3\times3=27$ 种；

当 $s=2$ 时，p，q，r 都是取 0，1 中的一个，有 $2\times2\times2=8$ 种；

当 $s=1$ 时，p，q，r 都取 0，有 1 种，所以 $\mathrm{card}(\mathrm{E})=64+27+8+1=100$.

当 $t=0$ 时，u 取 1，2，3，4 中的一个，有 4 种；

当 $t=1$ 时，u 取 2，3，4 中的一个，有 3 种；

当 $t=2$ 时，u 取 3，4 中的一个，有 2 种；

当 $t=3$ 时，u 取 4，有 1 种，所以 t、u 的取值有 $1+2+3+4=10$ 种

同理，v、w 的取值也有 10 种，所以 $\mathrm{card}(\mathrm{F})=10\times10=100$

所以 $\mathrm{card}(\mathrm{E})+\mathrm{card}(\mathrm{F})=100+100=200$

二、填空题：本大题共 5 小题，考生作答 4 小题，每小题 5 分，满分 20 分.

（一）必做题（11-13 题）

11. 不等式 $-x^2-3x+4>0$ 的解集为_________.（用区间表示）

【答案】(-4,1)

【解析】解不等式 $-x^2-3x+4>0$ 得 $-4<x<1$，所以不等式的解集为（-4，1）

12. 已知样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的均值 $\bar{x}=5$，则样本 $2x_1+1,2x_2+1,\cdots,2x_n+1$ 的均值为_________.

【答案】10

【解析】由题意知，当样本数据 x_1，x_2，$\cdots$，x_n 的均值 $\bar{x}=5$ 时，样本数据 $2x_1+1$，$2x_2+1$，$\cdots$，$2x_n+1$

的均值为 $2\bar{x}+1=2\times5+1=11$

13. 若三个正数 a,b,c 成等比例，其中 $a=5+2\sqrt{6},c=5-2\sqrt{6}$，则 $b=$_________.

【答案】1

【解析】由等比中项性质可得，$b^2=ac=(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})=5^2-(2\sqrt{6})^2=1$，由于 b 为正数，

所以 b=1

（二）选做题（14-15 题，考生只能从中选做一题）

14. (坐标系与参数方程选做题) 在平面直角坐标系 xOy 中，以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_1 的极坐标方程 $\rho(\cos\theta+\sin\theta)=-2$，曲线 C_2 的参数方程为 $\begin{cases}x=t^2\\ y=2\sqrt{2}t\end{cases}$（$t$ 为参数）．则 C_1 与 C_2 交点的直角坐标为_________.

【答案】(2，-4)

【解析】曲线 C_1 的直角坐标系方程为 $x+y=-2$，曲线 C_2 的直角坐标方程为 $y^2=8x$.

联立方程 $\begin{cases}x+y=-2\\ y^2=8x\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=2\\ y=-4\end{cases}$，所以 C_1 与 C_2 交点的直角坐标为（2，-4）

15. (几何证明选讲选做题)如图 1，AB 为圆 O 的直径，E 为 AB 延长线上一点，过点 E 作圆 O 的切线，切点为 C 过点 A 作直线 EC 的垂线，垂足为 D，若 $AB=4,CE=2\sqrt{3}$，则 $AD=$_________.

【答案】3

【解析】由切割线定理得：$CE^2=BE\cdot AE$，所以，BE（BE+4）=12

解得：BE=2或BE=−6(舍去)

连结 OC，则 $OC\perp DE$，$\because AD\perp DE$，$\therefore OC//AD$

$\therefore \dfrac{OC}{AD}=\dfrac{OE}{AE}$，$\therefore AD=\dfrac{OC\cdot AE}{OE}=\dfrac{2\times6}{4}=3$

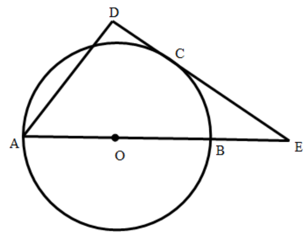


图 1

三、解答题（本大题共 6 小题，满分 80 分，解答须写出文字说明、证明过程和演算步骤）

16.（本小题满分 12 分）

已知 $\tan\alpha=2$.

（1）求 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})$ 的值；

（2）求 $\dfrac{\sin 2a}{\sin^2 a+\sin a\cos a-\cos 2a-1}$ 的值.

【解析】

（1）

$$\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha g\tan\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}$$

$\because\ \tan\alpha=2$

$\therefore \tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{2+1}{1-2g1}=-3$

（2）

$$\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\cos2\alpha-1$$
$$=\sin^2\alpha-1+\sin\alpha\cos\alpha-(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$
$$=-\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$$
$$=\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha$$

$\because \sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\therefore$ 原式 $=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha\text{-}2\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}$

$$=\frac{2\tan\alpha}{\tan\alpha-2+\tan^2\alpha}$$

$$=\frac{2\times2}{2-2+2^2}=1$$

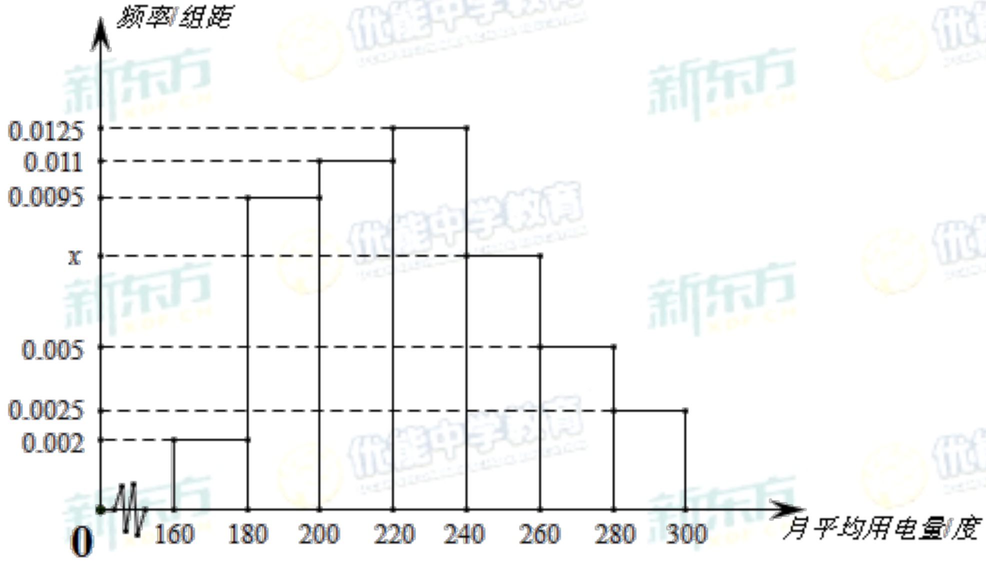
17.（本小题满分 12 分）

某城市 100 户居民的月平均用电量（单位：度），以 $[160,180)$，$[180,200)$，$[200,220)$，$[220,240)$，$[240,260)$，$[260,280)$，$[280,300]$ 分组的频率分布直方图如图 2，

（1）求直方图中 x 的值；

（2）求月平均用电量的众数和中位数；

（3）在月平均用电量为 $[220,240)$，$[240,260)$，$[260,280)$，$[280,300]$ 的四组用户中，用分层抽样的方法抽取 11 户居民，则月平均用电量在 $[220,240)$ 的用户中应抽取多少户？



【解析】

（1）（0.002+0.0025+0.005+ x +0.0095+0.011+0.0125）×20=1

$\therefore x=0.0075$

（2）众数：230

中位数：取频率直方图的面积平分线

$0.002+0.0095+0.011=0.0225$

$\frac{1}{20}\times\frac{1}{2}=0.025$

$\therefore 0.025-0.0225=0.0025$

$\frac{0.0025}{0.0125}\times 20+220=224$

（3）$[220,240):0.0125\times 20\times 100=25$

$[240,260):0.0075\times 20\times 100=15$

$[260,280):0.005\times 20\times 100=10$

$[280,300):0.0025\times 20\times 100=5$

共计：55 户

$\therefore [220,240)$抽取：$\frac{25}{55}\times 11=5$户

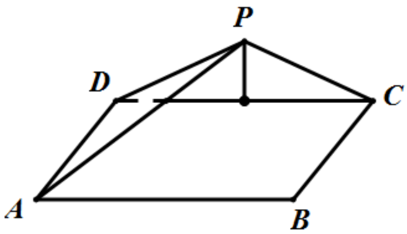
18.（本小题满分 14 分）

如图，三角形 PDC 所在的平面与长方形 ABCD 所在的平面垂直，PD=PC＝4，AB＝6，BC＝3.

（1）证明：BC∥平面 PDA；

（2）证明：BC⊥PD；

（3）求点 C 到平面 PDA 的距离.



【解析】

（1）∵ 四边形 ABCD 为长方形

∴ BC PAD

∵ BC$\not\subset$平面PDA，AD$\subset$平面PDA

∴ BC P平面PDA

（2）取 DC 中点 E，连接 PE

∵PC=PD

∴ PE⊥CD

∵ 面 PCD⊥面 ABCD，面 PCD∩面 ABCD=CD

PE⊂面 PCD，PE⊥CD

∴ PE⊥面 ABCD

而 BC⊂面 ABCD

∴ BC⊥PE

∵ BC⊥CD，CD∩PE=E

∴ BC⊥面 PCD

PD⊂面 PCD

∴ BC⊥PD

（3）由（2）得：PE 为面 ABCD 的垂线

∴ $V_{P\text{-}ADC}=\frac{1}{3}\times PE\times S_{\Delta ACD}$

在等腰三角形 PCD 中，$PE=\sqrt{7}$，$S_{\Delta ACD}=\frac{1}{2}\times AD\times DC=\frac{1}{2}\times 3\times 6=9$

∴ $V_{P\text{-}ADC}=\frac{1}{3}\times\sqrt{7}\times 9=3\sqrt{7}$

设点 C 到平面 PDA 距离为 h

∴ $V_{C\text{-}PDA}=\frac{1}{3}\times S_{\Delta PDA}\times h$

而 $S_{\Delta PDA}=\frac{1}{2}\times AD\times PD=\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$

∴ $3\sqrt{7}=\frac{1}{3}\times 6\times h$

∴ $h=\frac{3\sqrt{7}}{2}$，即：点 C 到平面 PDA 的距离为 $\frac{3\sqrt{7}}{2}$

19.（本小题满分 14 分）

设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 $S_n, n\quad \mathbf{N}^*$，已知 $a_1=1, a_2=\frac{3}{2}, a_3=\frac{5}{4}$，且当 $n\quad 2$ 时，$4S_{n+2}+5S_n=8S_{n+1}+S_{n-1}$.

（1）求 a_4 的值；

（2）证明：$\{a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\}$ 为等比数列；

（3）求数列$\{a_n\}$的通项公式.

【解析】

（1）令 n=2,则：

$4S_4=8S_3+S_1-5S_2$

$S_3=a_1+a_2+a_3=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{4}=\frac{15}{4}$

$S_1=a_1=1$

$S_2=a_1+a_2=1+\frac{3}{2}=\frac{5}{2}$

$\therefore 4S_4=8\times\frac{15}{4}+1-5\times\frac{5}{2}$

$4S_4=\frac{37}{2}$

$S_4=\frac{37}{8}$

$\therefore a_4=\frac{37}{8}-S_3=\frac{37}{8}-\frac{15}{4}=\frac{7}{8}$

（2）

$$\begin{cases}4S_{n+2}+5S_n=8S_{n+1}+S_{n-1}\\4S_{n+1}+5S_{n-1}=8S_n+S_{n-2}\end{cases}$$

$\therefore 4a_{n+2}+5a_n=8a_{n+1}+a_{n-1}$

$\therefore 4a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=4a_{n+1}-4a_n+a_{n-1}$

$\therefore \{4a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n\}$为常数列

Q $4a_3-4a_2+a_1=4\times\frac{5}{4}-4\times\frac{3}{2}+1=0$

$\therefore 4a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=0$

$\therefore 4a_{n+2}-2a_{n+1}=2a_{n+1}-a_n$

$\therefore \frac{4a_{n+2}-2a_{n+1}}{2a_{n+1}-a_n}=1$

$$\therefore \frac{4(a_{n+2}-\frac{1}{2}a_{n+1})}{2(a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n)}=1$$

$$\therefore \frac{a_{n+2}-\frac{1}{2}a_{n+1}}{a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \{a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\}$为等比数列

（3）由（2）得：$\{a_{n+1}-\frac{1}{2}a_n\}$是首相为：$a_2-\frac{1}{2}a_1=\frac{3}{2}$，公比为$\frac{1}{2}$的等边数列

$$\therefore \frac{a_{n+1}}{(\frac{1}{2})^{n+1}}-\frac{a_n}{(\frac{1}{2})^n}=4$$

$\therefore \{\frac{a_n}{(\frac{1}{2})^n}\}$为首相$\frac{a_1}{\frac{1}{2}}=2$,公差为4的等差数列

$$\therefore \frac{a_n}{(\frac{1}{2})^n}=2+4(n+1)=4n-2$$

$$\therefore a_n=(4n-2)g(\frac{1}{2})^n=\frac{2n-1}{2^n-1}$$

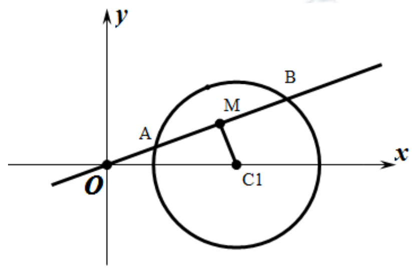
20.（本小题满分 14 分）

已知过原点的动直线l与圆$C_1: x^2+y^2-6x+5=0$相交于不同的两点 A，B.

（1）求圆C_1的圆心坐标；

（2）求线段 AB 的中点 M 的轨迹 C 的方程；

（3）是否存在实数k，使得直线$L: y=k(x-4)$与曲线 C 只有一个交点？若存在，求出k的取值范围；若不存在，说明理由.



【解析】

（1）

$x^2+y^2-6x+5=0$,配方得：

$(x-3)^2+y^2=4$

$\therefore$圆心坐标为（3, 0）

（2）由题意得：直线l的斜率一定存在，设直线l的斜率为k，则$l: y=kx$

设$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2),M(x,y)$

$$\therefore \begin{cases} x = \dfrac{x_1 + x_2}{2} \\ y = \dfrac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = kx \\ x^2 + y^2 - 6x + 5 = 0 \end{cases}$$

$\therefore x^2 + k^2x^2 - 6x + 5 = 0$

$\therefore (1 + k^2)x^2 - 6x + 5 = 0$

$\therefore x_1 + x_2 = -\dfrac{-6}{1+k^2} = \dfrac{6}{1+k^2}$

$\therefore y_1 + y_2 = \dfrac{6k}{1+k^2}$

$$\therefore \begin{cases} x = \dfrac{3}{1+k^2} \\ y = \dfrac{3k}{1+k^2} \end{cases}$$

$\therefore x = \dfrac{3}{1+(\frac{y}{x})^2}$

$\therefore x^2 - 3x + y^2 = 0$

Q $(1+k^2)x^2 - 6x + 5 = 0$有解

$\therefore \Delta > 0$,即,$36 - 4g(1+k^2)g5 > 0$

$\therefore 1 \le 1 + k^2 < \dfrac{9}{5}$

$\therefore x = \dfrac{3}{1+k^2} \in (\dfrac{5}{3}, 3]$

$\therefore$轨迹方程：$x^2 - 3x + y^2 = 0 \quad x \in (\dfrac{5}{3}, 3]$

（3）曲线 C：$x^2 - 3x + y^2 = 0 \quad x \in (\dfrac{5}{3}, 3]$

$(x - \dfrac{3}{2})^2 + y^2 = (\dfrac{3}{2})^2$

k的两个极限值：

$$k_1 = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{3} - 0}{\frac{5}{3} - 4} = -\frac{2\sqrt{5}}{7}$$

$$k_2 = \frac{-\frac{2\sqrt{5}}{3} - 0}{\frac{5}{3} - 4} = \frac{2\sqrt{5}}{7}$$

相切时：$\frac{3}{2}=\frac{|\frac{3}{2}k-0-4k|}{\sqrt{1+k^2}}$

$\therefore k=\pm\frac{3}{4}$

$\therefore k\in[-\frac{2\sqrt{5}}{7},\frac{2\sqrt{5}}{7}]\cup\{-\frac{3}{4},\frac{3}{4}\}$

21.（本小题满分 14 分）

设 a 为实数，函数 $f(x)=(x-a)^2+|x-a|-a(a-1)$.

（1）若 $f(0)\quad 1$，求 a 的取值范围；

（2）讨论 $f(x)$ 的单调性；

（3）当 $a\quad 2$ 时，讨论 $f(x)+\frac{4}{x}$ 在区间 $(0,\quad)$ 内的零点个数.

【解析】

（1）

$$\begin{aligned}f(0)&=a^2+|a|-a(a-1)\\&=a^2+|a|-a^2+a\\&=|a|+a\end{aligned}$$

若 $a\geq 0$，即：$2a\leq 1, a\leq\frac{1}{2}$

$\therefore 0\leq a\leq\frac{1}{2}$

若 $a<0$，即：$-a+a\leq 1, a\in R$

$\therefore a<0$

综上所述：$a\leq\frac{1}{2}$

（2）

$$f(x)=\begin{cases}(x-a)^2+(x-a)-a(a-1) & (x\geq a)\\(x-a)^2-(x-a)-a(a-1) & (x<a)\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}x^2+(1-2a)x & (x\geq a)\\x^2-(1+2a)x+2a & (x<a)\end{cases}$$

对称轴分别为：$x=\frac{1+2a}{2}=a+\frac{1}{2}>a$

$\therefore$ 在区间 $(-\infty,a)$ 上单调递减，在区间（$a,+\infty$）上单调递增

（3）由（2）得 $f(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 上单调递增，在 $(0,a)$ 上单调递减，所以 $f(x)_{\min}=f(a)=a-a^2$.

①当 $a=2$ 时，$f(x)_{\min}=f(2)=-2$，$f(x)=\begin{cases}x^2-3x, & x\geq 2\\ x^2-5x+4, & x<2\end{cases}$

当 $f(x)+\frac{4}{x}=0$ 时，即 $f(x)=-\frac{4}{x}(x>0)$.

因为 $f(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递减，所以 $f(x)>f(2)=-2$

令 $g(x)=-\frac{4}{x}$，则 $g(x)$ 为单调递增函数，所以在区间（0，2）上，$g(x)<g(2)=-2$，

所以函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在（0，2）无交点.

当 $x\geq 2$ 时，令 $f(x)=x^2-3x=-\frac{4}{x}$，化简得 $x^3-3x^2+4=0$，即 $(x-2)^2(x+1)=0$，则解得 $x=2$

综上所述，当 $a=2$ 时，$f(x)+\frac{4}{x}$ 在区间 $(0,+\infty)$ 有一个零点 x=2.

②当 $a>2$ 时，$f(x)_{\min}=f(a)=a-a^2$，

当 $x\in(0,a)$ 时，$f(0)=2a>4$ ，$f(a)=a-a^2<0$，

而 $g(x)=-\frac{4}{x}$ 为单调递增函数，且当 $x\in(0,a)$ 时，$g(x)=-\frac{4}{x}<0$

故判断函数 $f(x)与g(x)$ 是否有交点，需判断 $f(a)=a-a^2$ 与 $g(a)=-\frac{4}{a}$ 的大小.

因为 $a-a^2-(-\frac{4}{a})=\frac{-(a^3-a^2-4)}{a}=\frac{-(a-2)(a^2+a+2)}{a}<0$

所以 $f(a)=a-a^2<-\frac{4}{a}$,即 $f(a)<g(a)$

所以，当 $x\in(0,a)$ 时，$f(x)与g(x)$ 有一个交点；

当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f(x)$ 与 $g(x)$ 均为单调递增函数，而 $g(x)=-\frac{4}{x}<0$ 恒成立

而令 $x=2a$ 时，$f(2a)=a^2+a-a(a-1)=2a>0$，则此时，有 $f(2a)>g(2a)$，

所以当 $x\in(a,+\infty)$ 时，$f(x)与g(x)$ 有一个交点；

故当 $a>2$ 时，$y=f(x)$ 与 $g(x)=-\frac{4}{x}$ 有两个交点.

综上，当 $a=2$ 时，$f(x)+\frac{4}{x}$ 有一个零点 $x=2$；

　　当 $a>2$，$f(x)+\frac{4}{x}$ 有两个零点.