

2015年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

第Ⅰ卷（选择题）和第Ⅱ卷（非选择题）两部分.

第Ⅰ卷1至3页，第Ⅱ卷4至6页，满分150分.

考生注意：

1. 答题前，考生务必将自己的准考证号、姓名填写在答题卡上.考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名、考试科目”与考生本人准考证号、姓名是否一致.
2. 第Ⅰ卷每小题选出答案后，用2B铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑，如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号.
第Ⅱ卷用0.5毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答.若在试卷作答，答案无效.
3. 考试结束，监考员将试题、答题卡一并收回.

第Ⅰ卷

一. 选择题：本大题共12小题，每小题5分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

□1□ 已知集合 $A = \{x | x = 3n + 2, n \in N^+\}$, $B = \{6, 8, 10, 12, 14\}$, 则集合 $A \cap B$ 中元素的个数为

- (A) 5 (B) 4 (C) 3 (D) 2

(2) 已知点 $A(0, 1)$, $B(3, 2)$ 向量 $\overrightarrow{AC} = (-4, -3)$, 则向量 $\overrightarrow{BC} =$

- (A) $(-7, -4)$ (B) $(7, 4)$ (C) $(-1, 4)$ (D) $(1, 4)$

(3) 已知复数 z 满足 $(z-1)i = 1+i$, 则 $z =$

- (A) $-2-i$ (B) $-2+i$ (C) $2-i$ (D) $2+i$

(4) 如果3个正整数可作为一个直角三角形三条边的边长，则称这3个数为一组勾股数.从

1, 2, 3, 4, 5 中任取3个不同的数，则这3个数构成一组勾股数的概率为

- (A) $\frac{3}{10}$ (B) $\frac{1}{5}$ (C) $\frac{1}{10}$ (D) $\frac{1}{20}$

(5) 已知椭圆 E 的中心在坐标原点, 离心率为 $\frac{1}{2}$, E 的右焦点与抛物线 $C: y^2 = 8x$ 的焦点重合,

A, B 是 C 的准线与 E 的两个交点, 则 $|AB| =$

- (A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 12

(6) 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 书中有如下问题: “今有委米依垣内角,

下周八尺, 高五尺. 问: 积及为米几何?” 其意思为: “在屋内墙角处堆放米(如图, 米堆为一个圆锥的四分之一), 米堆底部的弧长为 8 尺, 米堆的高为 5 尺, 问米堆的体积和堆放的米

各为多少?” 已知一斛米的体积约为 1.62 立方尺, 圆周率约为 3, 估算出堆放的米约有

- (A) 14 斛 (B) 22 斛 (C) 36 斛 (D) 66 斛

(7) 已知 $\{a_n\}$ 是公差为 1 的等差数列, s_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $s_8 = 4s_4$, 则 $a_{10} =$

- (A) $\frac{17}{2}$ (B) $\frac{19}{2}$ (C) 10 (D) 12

(8) 函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$ 的部分图像如图所示, 则 $f(x)$ 的单调递减区间为

(A) $(k\pi - \frac{1}{4}, k\pi + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$

(B) $(2k\pi - \frac{1}{4}, 2k\pi + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$

(C) $(k - \frac{1}{4}, k + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$

(D) $(2k - \frac{1}{4}, 2k + \frac{3}{4}), k \in \mathbb{Z}$

(9) 执行右边的程序框图, 如果输入的 $t = 0.01$, 则输出的 $n =$

(A) 5

(B) 6

(C) 7

(D) 8

(10) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} - 2, & x \leq 1, \\ -\log_2(x+1), & x > 1, \end{cases}$ 且 $f(a) = -3$, 则 $f(6-a) =$

- (A) $-\frac{7}{4}$ (B) $-\frac{5}{4}$ (C) $-\frac{3}{4}$ (D) $-\frac{1}{4}$

(11) 圆柱被一个平面截去一部分后与半球(半径为 r) 组成一个几何体, 该几何体三视图中的正

视图和俯视图如图所示. 若该几何体的表面积为 $16 + 20\pi$, 则 $r =$

- (A) 1
(B) 2
(C) 4
(D) 8

(12) 设函数 $f(x)$ 的图像与 $y = 2^{x+a}$ 的图像关于 $y = -x$ 对称, 且 $f(-2) + f(-4) = 1$, 则 $a =$

- (A) -1 (B) 1 (C) 2 (D) 4

2015年普通高等学校招生全国统一考试

文科数学

第 II 卷

注意事项:

第 II 卷共3页, 须用黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答. 若在试卷作答, 答案无效.

本卷包括必考题和选考题两部分. 第13题~第21题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第22题~第24题为选考题, 考生根据要求作答.

二. 填空题: 本大题共4小题, 每小题5分.

(13) 在数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1 = 2, a_{n+1} = 2a_n$, s_n 为 $\{a_n\}$ 的前 n 项和. 若 $s_n = 126$, 则 $n =$ _____.

(14) 已知函数 $f(x) = ax^3 + x + 1$ 的图像在点 $(1, f(1))$ 处的切线过点 $(2, 7)$, 则 $a =$ _____.

(15) 若 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x + y - 2 \leq 0, \\ x - 2y + 1 \leq 0, \\ 2x - y + 2 \geq 0, \end{cases}$ 则 $z = 3x + y$ 的最大值为_____.

- (16) 已知 F 是双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ 的右焦点, p 是 C 的左支上一点, $A(0, 6\sqrt{6})$. 当 $\triangle APF$ 周长最小时, 该三角形的面积为_____.

三. 解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(17)(本小题满分12分)

已知 a, b, c 分别为 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边, $\sin^2 B = 2 \sin A \sin C$.

(I) 若 $a = b$, 求 $\cos B$;

(II) 设 $B = 90^\circ$, 且 $a = \sqrt{2}$, 求 $\triangle ABC$ 的面积.

(18)(本小题满分12分)

如图, 四边形 $ABCD$ 为菱形, G 为 AC 与 BD 的交点, $BE \perp$ 平面 $ABCD$.

(I) 证明: 平面 $AEC \perp$ 平面 BED ;

(II) 若 $\angle ABC = 120^\circ$, $AE \perp EC$, 三棱锥 $E-ACD$ 的体积为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$, 求该三棱锥的侧面积.

(19)(本小题满分12分)

某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费, 需了解年宣传费 x (单位: 千元) 对年销售量 y (单位: t) 和年利润 z (单位: 千元) 的影响. 对近8年的年宣传费 x_i 和年销售量 y_i ($i=1, 2, \dots, 8$) 数据作了初步处理, 得到下面的散点图及一些统计量的值.

$$\text{表中 } w_i = \sqrt{x_i}, \bar{w} = \frac{1}{8} \sum_{i=1}^8 w_i$$

(I) 根据散点图判断, $y = a + bx$ 与 $y = c + d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型? (给出判断即可, 不必说明理由)

(II) 根据(I)的判断结果及表中数据, 建立 y 关于 x 的回归方程;

(Ⅲ) 已知这种产品的年利润 z 与 x, y 的关系为 $z = 0.2y - x$. 根据(Ⅱ)的结果回答下列问题:

(i) 年宣传费 $x = 49$ 时, 年销售量及年利润的预报值是多少?

(ii) 年宣传费 x 为何值时, 年利润的预报值最大?

附: 对于一组数据 $(u_1, v_1), (u_2, v_2), \dots, (u_n, v_n)$, 其回归直线 $v = \alpha + \beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为

$$\hat{\beta} = \frac{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})(v_i - \bar{v})}{\sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2}, \hat{\alpha} = \bar{v} - \hat{\beta} \bar{u}.$$

(20)(本小题满分12分)

已知过点 $A(0, 1)$ 且斜率为 k 的直线 l 与圆 $C: (x-2)^2 + (y-3)^2 = 1$ 交于 M, N 两点.

(Ⅰ) 求 k 的取值范围;

(Ⅱ) 若 $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON} = 12$, 其中 O 为坐标原点, 求 $|MN|$.

(21)(本小题满分12分)

设函数 $f(x) = e^{2x} - a \ln x$.

(Ⅰ) 讨论 $f(x)$ 的导函数 $f'(x)$ 零点的个数;

(Ⅱ) 证明: 当 $a > 0$ 时, $f(x) \geq 2a + a \ln \frac{2}{a}$.

请考生在第22、23、24题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分。作答时请写清题号。

(22)(本小题满分10分)选修4-1: 几何证明选讲

如图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AC 是 $\odot O$ 的切线, BC 交 $\odot O$ 于点 E .

(Ⅰ) 若 D 为 AC 中点, 证明: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(Ⅱ) 若 $OA = \sqrt{3}CE$, 求 $\angle ACB$ 的大小.

(23)(本小题满分10分)选修4-4:坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 直线 $C_1: x = -2$, 圆 $C_2: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$, 以坐标原点为极点, x 轴正半轴为极轴建立极坐标系.

(I) 求 C_1, C_2 的极坐标方程;

(II) 若直线 C_3 的极坐标方程为 $\theta = \frac{\pi}{4} (\rho \in \mathbb{R})$, 设 C_2 与 C_3 的交点为 M, N , 求 $\triangle C_2MN$ 的面积.

(24)(本小题满分10分)选修4-5:不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x+1| - 2|x-a|, a > 0$.

(I) 当 $a=1$ 时, 求不等式 $f(x) > 1$ 的解集;

(II) 若 $f(x)$ 的图像与 x 轴围成的三角形的面积大于6, 求 a 的取值范围.