数一答案：

（1） 答案：C

举反例. $a=-1,b=2$ 时

$$\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}dx$$

$$=\left[\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}\right]\Bigg|_0^{+\infty}$$ 发散.

（2） 答案：D

$$F(x)=\int f(x)dx=\begin{cases}(x-1)^2 & x<1\\ x\ln x-x+C & x>1\end{cases}$$

$F(x)$ 需连续， $F(1^+)=F(1^-)$

$\Rightarrow C=1$

（3） 答案：A

一阶线性方程通解 $y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+c\right]$

$y_1=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$, $y_2=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$

说明 $\sqrt{1+x^2}=e^{-\int p(x)dx}$

$$\Rightarrow\int p(x)=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$\Rightarrow(1+x^2)^2=\int\frac{q(x)}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$\Rightarrow q(x)=3x(1+x^2)$$

（4） 答案：D

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}x=0$

$x>0$ 时， $\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}$. $x\to0^+$ 时， $n\to+\infty$

$$\therefore\ \lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$f_-'(0)=\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^-}\frac{x}{x}=1$$

$$f_+^{'}(0)=\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{n}}{x}$$

又 $\frac{1}{n+1}<x\le\frac{1}{n}$

$$\therefore\ 1=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\le\frac{\frac{1}{n}}{x}<\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\frac{1+n}{n}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$

$\therefore\ f_+^{'}(0)=1$

$\therefore\ f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

（5） 答案：C

A 与 B 相似 $\therefore$ $\exists$可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=B.$

$B^T=P^TA^T(P^{-1})^T=P^TA^T(P^T)^{-1}$ $\therefore$ A^T 与 B^T 相似.

$B^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$ $\therefore$ A^{-1} 与 B^{-1} 相似.

又 $B=P^{-1}AP$

$\therefore\ B^{-1}+B=P^{-1}(A+A^{-1})P$

$\therefore\ A+A^{-1}$ 与 $B^{-1}+B$ 相似.

（6） 答案：B

设 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$,

由 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)$

$\therefore\ \lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5$

$\therefore$ 二次型的正惯性指数为 1，负惯性指数为 2.

（7） 答案：B

解： $X\sim N(\mu,\sigma^2)$

$$P=P\{X\le\mu+\sigma^2\}$$

$$=P\{\frac{X-\mu}{\sigma}\le\sigma\}$$

$$=\Phi(\sigma)$$

故当σ□ ，P□

（8） 答案：

解：由题知：$\begin{cases} X \sim B(2,\frac{1}{3}) \\ Y \sim B(2,\frac{1}{3}) \end{cases}$， $\because Z$ 表示 A_3 发生的次数 $\therefore Z \sim B(2,\frac{1}{3})$

$$D(X+Y)=DX+DY+2\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}+2\operatorname{cov}(X,Y)$$

$$D(X+Y)=D(2-2)=D2=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$$

$$\therefore 2\operatorname{cov}(X,Y)=-\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}$$

$$\therefore \rho_{XY}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{DX}\sqrt{DY}}=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}}}=-\frac{1}{2}$$

（9）答案：$\frac{1}{2}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{\frac{x^4}{2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{2x^3}=\frac{1}{2}.$$

（10）答案：$\vec{j}+(y-1)\vec{k}.$

$$rotA=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y+z & xy & \end{vmatrix}$$

$$=\vec{j}+(y-1)\vec{k}.$$

（11）答案：$-1dx+2y$.

两边对 x 求偏导.

$$z+(x+1)\frac{\partial z}{\partial x}=2xf+x^2(1-\frac{\partial z}{\partial x})f_1'$$

当 $x=0, y=1$ 时， $z=1$

$$1+\frac{\partial z}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial x}=-1$$

两边对 y 求偏导

$$(x+1)\frac{\partial z}{\partial y}-2y=x^2\left[f_1'\cdot(-\frac{\partial z}{\partial y})+f_2'\right]$$

$$\Rightarrow\frac{\partial z}{\partial y}=2$$

$$dx|_{(0,1)}=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy=-1dx+2y.$$

（12）答案：$a=\dfrac{1}{2}$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$$

$$\Rightarrow \arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}=x-\frac{x^3}{3}+\cdots$$

$$\frac{x}{1+ax^2}=x(1+ax^2)^{-1}=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(ax^2)^n=x-ax^3+\cdots$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$$

根据级数展开与泰勒公式一致性：

$$\Rightarrow \frac{f'''(0)}{3!}=-\frac{1}{3}-(-a)$$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

（13）

当 $\lambda=0$ 时，$\begin{vmatrix}0&-1&0&0\\0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\4&3&2&1\end{vmatrix}=4$

当 $\lambda\neq0$ 时，

$$\begin{vmatrix}\lambda&-1&0&0\\0&\lambda&-1&0\\0&0&\lambda&-1\\4&3&2&\lambda+1\end{vmatrix}\overset{\substack{C_2+\frac{1}{\lambda}C_1\\C_3+\frac{1}{\lambda}C_2\\C_4+\frac{1}{\lambda}C_3}}{=}\begin{vmatrix}\lambda&0&0&0\\0&\lambda&0&0\\0&0&\lambda&0\\4&\frac{4}{\lambda}+3&\frac{4}{\lambda^2}+\frac{3}{\lambda}+2&\frac{4}{\lambda^3}+\frac{3}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda}+\lambda+1\end{vmatrix}$$

$$=\lambda^3\left(\frac{4}{\lambda^3}+\frac{3}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda}+\lambda+1\right)$$

$$=\lambda^4+\lambda^3+2\lambda^2+3\lambda+4$$

（14）答案：(8.2,10.8)

解：$P\{-t_{0.025}(n-1) < \dfrac{\overline{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} < t_{0.025}(n-1)\} = 0.95$

$\Rightarrow P\{9.5 - t_{0.025}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}} < \mu < 9.5 + t_{0.025}(n-1)\cdot\dfrac{S}{\sqrt{n}}\} = 0.95$

$\because 9.5 + t_{0.025}(n-1)\dfrac{S}{\sqrt{n}} = 10.8$

$\therefore t_{0.025}(n-1)\cdot\dfrac{S}{\sqrt{n}} = 1.3$

故 $P\{9.5 - 1.3 < \mu < 10.8\} = 0.95$

$\Rightarrow P\{8.2 < \mu < 10.8\} = 0.95$

$\therefore$ 置信区间为(8.2,10.8)

\

（15）

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D x\,dx\,dy \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_2^{2(1+\cos\theta)} r^2 \cos\theta\, dr \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\, d\theta \int_2^{2(1+\cos\theta)} r^2\, dr \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_2^{2(1+\cos\theta)}\, d\theta \\
&= \frac{8}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \cdot [(1+\cos\theta)^3 - 1]\, d\theta \\
&= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta(3\cos\theta + 3\cos^2\theta + \cos^3\theta)\, d\theta \\
&= \frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4\theta\, d\theta + 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\, d\theta + 16\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta \\
&= \frac{16}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + 16\cdot\frac{2}{3}\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} \\
&= 5\pi + \frac{32}{3}
\end{aligned}
$$

（16）$y'' + 2y' + ky = 0, 0 < k < 1$

特征方程 $\lambda^2 + 2\lambda + k = 0 \quad \Rightarrow (\lambda+1)^2 = 1-k$，即 $\lambda = \pm\sqrt{1-k} - 1$

通解 $y = C_1 e^{(\sqrt{1-k}-1)x} + C_2 e^{-(\sqrt{1-k}+1)x}$.

（I） $-1 < \sqrt{1-k} - 1 < 0,\ -2 < -\sqrt{1-k} - 1 < -1$

$$\int_0^{+\infty} e^{(\sqrt{1-k}-1)x}dx = \frac{1}{1-\sqrt{1-k}}$$

$$\int_0^{+\infty} e^{(-\sqrt{1-k}-1)x}dx = \frac{1}{\sqrt{1-k}+1}$$

（II） $\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1(\sqrt{1-k}-1) + C_2(-\sqrt{1-k}-1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{1-k}} \\ C_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{1-k}} \end{cases}$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} C_1 e^{(\sqrt{1-k}-1)x} + C_2 e^{(-\sqrt{1-k}-1)x} dx = \frac{3}{k}$$

（17） L_1 是从 $(1,t)$ 到 $(0,t)$ 的直线； L_1 是从 $(0,t)$ 到 $(0,0)$ 的直线

$$\int_{L_1} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$$

$$= \int_0^1 \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx = -\int_0^1 (2x+1) e^{2x-t} dx$$

$$= -e^{2-t}$$

$$\int_{L_2} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy$$

$$= \int_t^0 \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} dy = \int_t^0 1 dy = 0 - t = -t$$

$$I(t) = t + e^{2-t}$$

$$\frac{dI(t)}{dt} = 1 - e^{2-t} = 0$$

$$\Rightarrow t = 2 \quad I''(t) = e^{2-t}$$

$$I''(2) = 1 > 0$$

$$I_{\min}(2) = 3$$

（18）

$$I = \iiint_\Omega (2x-2+3) dV = \iiint_\Omega (2x+1) dV$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{1-x-\frac{y}{2}} (2x+1) dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (2x+1)(1-x-\frac{y}{2}) dy$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} (2x+1)(1-x) - \frac{y}{2}(2x+1) dy$$

$$= \int_0^1 (2x+1)(1-x)(2-2x) - \frac{1}{4}(2x+1)(2-2x)^2 dx$$

$$= \int_0^1 2(2x+1)(1-x)^2 - (2x+1)(1-x)^2 dx$$

$$= \int_0^1 (2x+1)(1-x)^2 dx$$

$$= \int_0^1 (2x+1)(1-2x+x^2) dx$$

$$= \int_0^1 2x+1-4x^2-2x+2x^3+x^2) dx$$

$$= 1+1-\frac{4}{3}-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} = \frac{1}{2}$$

（20）、

将 B 按列分成两块 $B=(\beta_1,\beta_2)$，$\therefore Ax=B \Leftrightarrow Ax=(\beta_1,\beta_2)$.

$$(A,B)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & a & -a-1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & -a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ $a=1$时， 有无穷多解；

$a=-2$时， $(A,B)\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 无解

$a\neq 1$且$a\neq -2$时，有唯一解.

当$a=1$时，$(A,B)\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

等价方程组为$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2+x_3=-1 \end{cases}$， 令 $x_3=k$，得 $x_2=-k-1$

$$\therefore\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -k_1-1 & -k_2-1 \\ k_1 & k_2 \end{pmatrix},\quad k_1,k_2\in R$$

当$a\neq 1$且$a\neq -2$时

$$(A,B)\to\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & a+2 & 0 & 0 & a-4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad B=\begin{pmatrix} 1 & \frac{3a}{a-2} \\ 0 & \frac{a-4}{a+2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

（21）

解：由$|\lambda E-A|=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$，所以$\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$。

所以A可相似对角化，且A与$\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}$相似。

由$(0E-A)x=0$得$\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\1\\1\end{pmatrix}$；

由$(-E-A)x=0$得$\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$；

由$(-2E-A)x=0$得$\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$。

令$P=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&1&1\\1&1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$，则$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}=\Lambda$。

所以$A=P\Lambda P^{-1}$，所以$A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$。

由$B^2=BA$得

$B^3=B^2A=BA^2$

$B^4=B^2A^2=BA^3$，

……

$B^{100}=BA^{99}$

所以$(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)A^{99}$。

所以$\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2$，$\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2$，

$\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2$。

（22）

解：① $f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

所以 $S_0=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$。

②

u	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$P(u=1)=P(X\le Y)=3\int_0^1(\sqrt{x}-x)dx$

$=3\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^1-3\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=3\cdot\frac{2}{3}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3dy=3(\sqrt{x}-x^2), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

$P(u=0,X\le y_2)=P(X>Y,X\le y_2)=\frac{1}{8}$

$P(X\le Y_2)=\int_0^{\frac{1}{2}}(3\sqrt{x}-3x^2)dx=2\cdot x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}}-x^3\Big|_0^{\frac{1}{2}}=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{8}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{8}$

$P(u=0)=\frac{1}{2}$

因为 $P(u=0,X\le y_2)\ne P(X\le y_2)P(u=0)$，所以 X 与 u 不独立。

③

$F_Z(z)=P(Z\le z)=P(u+X\le z)$

$=P(u+X\le z,u=0)+P(u+X\le z,u=1)$

$=P(X\le z,u=0)+P(X\le z-1,u=1)$

$=P(X\le z,X>Y)+P(X\le z-1,X\le Y)$

1° $z<0$ $F_Z(z)=$ (

$$F_Z(z)=3\int_0^z dx\int_{x^2}^{x}1dy$$

2° $0\le z<1$ 　　$=3\int_0^z(x-x^2)dx$

$$=3(\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3})=\frac{3}{2}z^2-z^3$$

3° $1\le z<2$ 　　$F_Z(z)=\frac{1}{2}+3\int_0^{z-1}dx\int_x^{\sqrt{x}}1dy=\frac{1}{2}+2(\ ^{\frac{3}{2}}1)-\frac{3}{2}z-(\ ^{2}$

（23）

解：① $F_T(t)=P(T\le t)=P\{\max(X_1,X_2,X_3)\le t\}$

$$=P\{X_1\le t,X_2\le t,X_3\le t\}$$

$$=P\{X_1\le t\}\cdot P\{X_2\le t\}\cdot P\{X_3\le t\}$$

$$=F^3(t)$$

$\because$ X ~ $f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{3x^2}{\theta^3} & 0<x<\theta\\ 0 & 其它\end{cases}$

$\therefore$ $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t;\theta)dt$

当 $x\le 0$ 时，

$$F(x)=0$$

当 $0<x<\theta$ 时，

$$F(x)=\int_0^x\frac{3t^2}{\theta^3}dt=\frac{3}{\theta^3}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^x$$

$$=\frac{3}{\theta^3}\cdot\frac{x^3}{3}=\frac{x^3}{\theta^3}$$

当 $x\ge\theta$ 时，$F(x)=1$

故当 $t\le 0$ 时，　　$F_T(t)=\ ($

当 $0<t<\theta$ 时，　　$F_T(t)=\ (\frac{x}{\theta}\ ^{9})$

当 $t\ge\theta$ 时，　　$F_T(t)=\ 1$

所以 $f_T(t)=F_T'(t)=\begin{cases}\dfrac{9t^8}{\theta^9}, & 0<t<\theta,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

② 因为aT为θ的无偏估计，所以$E(aT)=\theta$，则$aE(T)=\theta$。

又

$$\begin{aligned}ET&=\int_{-\infty}^{+\infty}tf_T(t)dt\\&=\int_0^{\theta}t\cdot 9\cdot\frac{t^8}{\theta^9}dt\\&=\frac{9}{\theta^9}\cdot\frac{t^{10}}{10}\Big|_0^{\theta}=\frac{9}{10}\theta\end{aligned}$$

故$a\cdot\dfrac{9}{10}\theta=\theta$，所以$a=\dfrac{10}{9}$。