2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题及答案

一、选择题:1～8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 设 $a_1 = x(\cos\sqrt{x}-1), a_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}), a_3 = \sqrt[3]{x+1}-1$, 当 $x \to 0^+$ 时, 以上三个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是 ( )

(A) a_1,a_2,a_3 (B) a_2,a_3,a_1 (C) a_2,a_1,a_3 (D) a_3,a_2,a_1

【答案】(B)

【解析】当 $x \to 0^+$ 时，$a_1 = x(\cos\sqrt{x}-1) \sim -\frac{1}{2}x^2$，$a_2 = \sqrt{x}\ln(1+\sqrt[3]{x}) \sim x^{\frac{5}{6}}$，$a_3 = \sqrt[3]{x+1}-1 \sim \frac{1}{3}x$，所以 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是 a_2,a_3,a_1， 故选(B).

(2) 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), x<1 \\ \ln x, \quad x \ge 1 \end{cases}$，则 $f(x)$ 的一个原函数是 ( )

(A) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1 \\ x(\ln x -1), & x \ge 1 \end{cases}$ (B) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1 \\ x(\ln x +1)-1, & x \ge 1 \end{cases}$

(C) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1 \\ x(\ln x +1)+1, & x \ge 1 \end{cases}$ (D) $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x<1 \\ x(\ln x -1)+1, & x \ge 1 \end{cases}$

【答案】(D)

【解析】根据原函数一定可导，所以原函数一定连续，所以原函数在 x=1 处连续，排除(A)和(C)；由已知条件，可知原函数满足 $F'(1) = f(1) = 0$.

(B)选项中，$F_+'(1) = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{F(x)-F(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x(\ln x+1)-1-0}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\ln x+1+1}{1} = 2$，所以(B)不正确. 选(D).

也可以对(D)选项的函数求导，验证(D)选项是正确答案. 故选 D.

(3) 反常积分① $\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$，② $\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 的敛散性为 ( )

(A) ①收敛，②收敛 (B) ①收敛，②发散

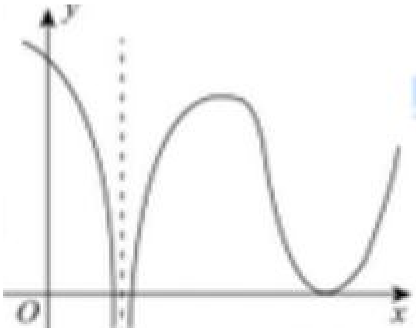
(C) ①发散，②收敛 (D) ①发散，②发散

【答案】(B)

【解析】①$\int_{-\infty}^{0}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_{-\infty}^{0}e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{-\infty}^{0}=-(\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}-\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}})=1$，收敛.

②$\int_{0}^{+\infty}\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-\int_{0}^{+\infty}e^{\frac{1}{x}}d\frac{1}{x}=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{0}^{+\infty}=-(\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}-\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}})=-1+\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，发散. 故选 B.

(4) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内连续，其导函数的的图形如图所示，则 ( )



(A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

(B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点

(C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 1 个拐点

(D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点，曲线 $y=f(x)$ 有 2 个拐点

【答案】(B)

【解析】根据极值的必要条件可知，极值点可能是驻点或导数不存在的点. 根据极值的充分条件可知，在某点左右导函数符号发生改变，则该点是极值点，因此从图形可知函数 $f(x)$ 有 2 个极值点.

根据拐点的必要条件可知，拐点可能是二阶导为零的点或二阶导不存在的点. 根据拐点的充分条件可知，曲线在某点左右导函数的单调性发生改变，则该点是曲线的拐点，因此曲线 $y=f(x)$ 有 3 个拐点. 故选 B.

(5) 设函数 $f_i(x)(i=1,2)$ 具有二阶连续导数，且 $f_i''(x_0)<0(i=1,2)$，若两条曲线 $y=f_i(x)(i=1,2)$ 在点 (x_0,y_0) 处具有公切线 $y=g(x)$，且在该点处曲线 $y=f_1(x)$ 的曲率大于曲线 $y=f_2(x)$ 的曲率，则在 x_0 的某个邻域内，有 ( )

(A) $f_1(x)\le f_2(x)\le g(x)$ (B) $f_2(x)\le f_1(x)\le g(x)$

(C) $f_1(x)\le g(x)\le f_2(x)$ (D) $f_2(x)\le g(x)\le f_1(x)$

【答案】(A)

【解析】 因为 $f_i''(x)$ 连续且 $f_i''(x_0)<0$，所以根据连续的定义和极限的保号性在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内有 $f_i''(x)<0$，所以 $f_i(x)$ 在 $U(x_0)$ 内是凸的.又因为在 $x=x_0$ 处具有公切线 $y=g(x)$，根据凸函数的几何意义可知曲线与切线位置关系为 $f_i(x)\le g(x)$.在 x_0 处 $y=f_1(x)$ 曲率大于 $y=f_2(x)$，所以 $f_1''(x_0)<f_2''(x_0)<0$，所以令 $F(x)=f_1(x)-f_2(x)$，因为在 $x=x_0$ 处具有公切线 $y=g(x)$，所以 $F(x_0)=0$，$F'(x_0)=0$.再由 $F''(x_0)<0$ 得，$F(x_0)=0$ 为 $F(x)$ 的极大值，所以在 x_0 的某邻域 $U_1(x_0)$ 内 $F(x)\le 0$，故 $f_1(x)\le f_2(x)$.从而 $f_1(x)\le f_2(x)\le g(x)$.故选 A.

(6) 已知函数 $f(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}$，则 ( )

(A) $f_x'-f_y'=0$ (B) $f_x'+f_y'=0$

(C) $f_x'-f_y'=f$ (D) $f_x'+f_y'=f$

【答案】(D)

【解析】因为 $f_x'(x,y)=\dfrac{e^x(x-y)-e^x}{(x-y)^2}$，$f_y'(x,y)=\dfrac{e^x}{(x-y)^2}$，

所以 $f_x'(x,y)+f_y'(x,y)=\dfrac{e^x}{x-y}=f(x)$.故选 D.

(7) 设 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵，且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似，则下列结论错误的是 ( )

(A) A^T 与 B^T 相似 (B) A^{-1} 与 B^{-1} 相似

(C) $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似 (D) $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

【答案】(C)

【解析】A 与 B 相似，即存在可逆矩阵 P，使 $P^{-1}AP=B$，则

$B^T=\left(P^{-1}AP\right)^T=P^TA^T\left(P^{-1}\right)^T=P^TA^T\left(P^T\right)^{-1}=\left(\left(P^T\right)^{-1}\right)^{-1}A^T\left(P^T\right)^{-1}$，即（A）是正确说法；

$B^{-1}=\left(P^{-1}AP\right)^{-1}=P^{-1}A^{-1}\left(P^{-1}\right)^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$，进一步有

$B+B^{-1}=P^{-1}AP+P^{-1}A^{-1}P=P^{-1}\left(A+A^{-1}\right)P$，即（B）（D）都是正确说法；

故选（C）.

(8) 设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=a(x_1{}^2+x_2{}^2+x_3{}^2)+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$ 的正、负惯性指数分别为1，2，则 (　　)

(A) $a>1$　　(B) $a<-2$

(C) $-2<a<1$　　(D) $a=1$ 或 $a=-2$

【答案】（C）

【解析】二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 对应的矩阵 $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$，由

$$\left|\lambda E-A\right|=\begin{vmatrix} \lambda-a & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-a & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-a \end{vmatrix}=\left(\lambda-a-2\right)\left(\lambda-a+1\right)^2=0$$

得，A 的特征值为 $\lambda_1=a+2,\lambda_2=\lambda_3=a-1$，由于 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)$ 的正、负惯性指数为 1,2，且正、负惯性指数恰好等于特征值中正、负数的个数，所以 $a+2>0$ 且 $a-1<0$，即 $-2<a<1$. 故选（C）.

二、填空题：9 ~ 14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲线 $y=\dfrac{x^3}{1+x^2}++\arctan\left(1+x^2\right)$ 的斜渐近线方程为____________.

【答案】 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$

【解析】 因为 $a=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}(\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2))=1$，

$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-ax)=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^3}{1+x^2}+\arctan(1+x^2)-x)=\dfrac{\pi}{2}$.

所以斜渐近线为 $y=x+\dfrac{\pi}{2}$.

(10) 极限$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\left(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n}\right)=$ ____________.

【答案】$\sin 1-\cos 1$

【解析】因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n})$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}+\frac{2}{n}\sin\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n}{n}\sin\frac{n}{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\sin\frac{k}{n}$$

所以由定积分定义得，原极限$=\int_0^1 x\sin x dx=(-x\cos x+\sin x)\Big|_0^1=\sin 1-\cos 1$.

(11) 以$y=x^2-e^x$和$y=x^2$为特解的一阶非齐次线性微分方程为____________.

【答案】$y'-y=2x-x^2$

【解析】设一阶非齐次线性微分方程为$y'+p(x)y=q(x)$.根据线性微分方程齐次与非齐次解之间的关系知$x^2-(x^2-e^x)=e^x$为$y'+p(x)y=0$的解.所以$p(x)=-1$.又因为$y=x^2$为$y'+p(x)y=q(x)$的解，所以$q(x)=2x-x^2$.故一阶非齐次线性微分方程为$y'-y=2x-x^2$.

(12) 已知函数$f\left(x\right)$在$\left(-\infty,+\infty\right)$上连续，$f\left(x\right)=\left(x+1\right)^2+2\int_0^x f\left(t\right)dt$，则当$n\geq 2$时，$f^n\left(0\right)=$ ____________.

【答案】$\frac{5}{2}\times 2^n$

【解析】当$x=0$时，$f(0)=1$；

$f(x)=(x+1)^2+2\int_0^x f(t)dt$两边同时对$x$求导，得$f'(x)=2(x+1)+2f(x)$，　$f'(0)=4$；

$f'(x)=2(x+1)+2f(x)$两边同时对x求导，得$f''(x)=2+2f'(x)$，$f''(0)=10$；

$f''(x)=2+2f'(x)$两边同时对x求导，得$f'''(x)=2f''(x)$；

依次求导得$f^{(n)}(x)=2^{n-2}f''(x)$；所以$f^{(n)}(0)=2^{n-2}f''(0)=10\times 2^{n-2}=\frac{5}{2}\times 2^n$.

(13) 已知动点P在曲线$y=x^3$上运动，记坐标原点与点P间的距离为l. 若点P的横坐标对时间的变化率为常数V_0，则当点P运动到点$\left(1,1\right)$时，l对时间的变化率是____________.

【答案】$2\sqrt{2}v_0$

【解析】$l=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^6}$，同时对 t 求导得，$\dfrac{dl}{dt}=\dfrac{dl}{dx}\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{2x+6x^5}{2\sqrt{x^2+x^6}}\dfrac{dx}{dt}$，

又因为 $x=1$，$\dfrac{dx}{dt}=v_0$，所以 $\left.\dfrac{dl}{dt}\right|_{x=1}=\dfrac{8}{2\sqrt{2}}v_0=2\sqrt{2}v_0$.

(14) 设矩阵 $\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 等价，则 $a=$ ____________.

【答案】2

【解析】设 $A=\begin{pmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

由 $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，得 $r(B)=2$.

因为 A 与 B 等价，所以 $r(A)=r(B)=2$，于是

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix}=(a-2)(a+1)^2=0$$

即 $a=2$ 或 $a=-1$.

而 $a=-1$ 时，$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$，此时 $r(A)=1$，不合题意.

故 $a=2$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15) (本题满分 10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

【解析】

$$\lim_{x\to 0}\left(\cos 2x+2x\sin x\right)^{\frac{1}{x^4}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^4}(\cos 2x+2x\sin x-1)}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{2}(2x)^2+\frac{1}{4!}(2x)^4+o\left(x^4\right)+2x\left(x-\frac{x^3}{3!}+o\left(x^3\right)\right)-1}{x^4}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{3}x^4+o\left(x^4\right)}{x^4}}$$
$$=e^{\frac{1}{3}}$$

(16) (本题满分 10 分)

设函数 $f(x)=\int_0^1|t^2-x^2|dt(x>0)$，求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值.

【解析】

$$f(x)=\int_0^x\left(x^2-t^2\right)dt+\int_x^1\left(t^2-x^2\right)dt$$
$$=\frac{4}{3}x^3-x^2+\frac{1}{3}$$
$$f'\left(x\right)=4x^2-2x=2x\left(2x-1\right)$$

令 $f'\left(x\right)=0$ 可得 $x=\frac{1}{2}(\because x>0)$，且当 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$f'\left(x\right)<0$；当 $x\in\left(\frac{1}{2},+\infty\right)$ 时，

$f'\left(x\right)>0$，从而 $f\left(x\right)$ 在 $\frac{1}{2}$ 处取极小值且为最小值 $f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$。

(17) (本题满分 10 分)

已知函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$ 确定求 $z=z(x,y)$ 的极值.

解：由 $(x^2+y^2)z+\ln z+2(x+y+1)=0$，两边分别同时对 x,y 求偏导数得：

$$\begin{cases}2xz+(x^2+y^2)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial x}+2=0(1)\\2yz+(x^2+y^2)\dfrac{\partial z}{\partial y}+\dfrac{1}{z}\dfrac{\partial z}{\partial y}+2=0(2)\end{cases}$$

令 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=0,\dfrac{\partial z}{\partial y}=0$（3）得：$\begin{cases}x=-1\\ y=-1\\ z=1\end{cases}$（4）

又对（1）关于 x 求偏导数，（1）对 y 求偏导数，（2）对 y 求偏导数，再把（3），（4）代入即得：

$$2z+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$$

$$2z+(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$$

$$(x^2+y^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{1}{z}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$$

得：$A=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-\dfrac{2}{3},B=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,C=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\dfrac{2}{3}$

又 $AC-B^2>0,A<0$,故 $z=z(x,y)$ 在 $(-1,-1)$ 取得极大值，极大值为 $z(-1,-1)=1$

(18) (本题满分 10 分)

设 D 是由直线 $y=1,y=x,y=-x$ 围成的有界区域，计算二重积分 $\iint\limits_D \dfrac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy$.

【解析】 $D=\left\{(r,\theta)\Big|\dfrac{\pi}{4}\le\theta\le\dfrac{3\pi}{4},0\le r\le\dfrac{1}{\sin\theta}\right\}$

则 $\iint\limits_D \dfrac{x^2-xy-y^2}{x^2+y^2}dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}\dfrac{r^2\cos^2\theta-r^2\cos\theta\sin\theta-r^2\sin^2\theta}{r^2}rdr$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta-\sin^2\theta)d\theta\int_0^{\frac{1}{\sin\theta}}rdr$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}(\csc^2\theta-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-2)d\theta=\frac{1}{2}\cot\theta\Big|_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}-\frac{1}{2}\cdot\ln|\sin\theta|\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\pi}{2}=1-\frac{\pi}{2}$$

(19) (本题满分 10 分)

已知 $y_1(x)=e^x,y_2(x)=\mu(x)e^x$ 是二阶微分方程 $(2x-1)y''-(2x+1)y'+2y=0$ 的两个解. 若 $\mu(-1)=e$， $\mu(0)=-1$，求 $\mu(x)$ 并写出微分方程的通解.

【解析】把 $y_2=\mu(x)e^x$ 代入原方程得，

$$(2x-1)e^x[\mu''(x)+2\mu'(x)+\mu(x)]-(2x+1)e^x(\mu'(x)+\mu(x))+2\mu(x)e^x=0.$$

即，$(2x-1)\mu''(x)+(2x-3)\mu'(x)=0$,变量分离得

$\dfrac{d\mu'(x)}{\mu'(x)}=-\dfrac{2x-3}{2x-1}dx$，两边积分，

$\displaystyle\int\frac{d\mu'(x)}{\mu'(x)}=-\int\frac{2x-3}{2x-1}dx$，即 $\displaystyle\ln|\mu'(x)|=-\int(1-\frac{2}{2x-1})dx=-x+\ln|2x-1|+\ln C_1$，

所以 $\mu'(x)=C_1(2x-1)e^{-x}$，两边积分

$\displaystyle\int\mu'(x)dx=C_1\int(2x-1)e^{-x}dx=C_1[-(2x-1)-2]e^{-x}+C_2=C_1(-2x-1)e^{-x}+C_2$，

由已知 $\mu(-1)=C_1e+C_2=e,\mu(0)=-C_1+C_2=-1$，解得

$C_1=1,C_2=0$，所以 $\mu(x)=-(2x+1)e^{-x}$

根据二阶齐次线性方程解得结构得原方程通解为

$y(x)=D_1y_1+D_2y_2=D_1e^x+D_2\mu(x)e^x$

$=D_1e^x-D_2(2x+1)$，其中 D_1,D_2 为任意常数.

(20) (本题满分 11 分)

设 D 是由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}\,(0\le x\le 1)$ 与 $\begin{cases}x=\cos^3 t,\\ y=\sin^3 t.\end{cases}(0\le t\le\dfrac{\pi}{2})$ 围成的平面区域，求 D 绕 x 轴转一周所得转体的体积和表面积.

【解析】由于 $\begin{cases}x=\cos^3 t\\ y=\sin^3 t\end{cases}\quad(0\le t\le\dfrac{\pi}{2})$，则可以化成直角坐标系下的方程，可得

$(x^{\frac{1}{3}})^2+(y^{\frac{1}{3}})^2=1$，从而有 $y^2=(1-x^{\frac{2}{3}})^3$

所以有：$\displaystyle V=\int_0^1\pi(\sqrt{1-x^2})^2dx-\int_0^1\pi(1-x^{\frac{2}{3}})^3dx$

$$=\frac{2}{3}\pi-\frac{16}{105}\pi=\frac{18}{35}\pi$$

表面积 $S=2\pi\times1^2+2\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\sqrt{(3\cos^2t(-\sin t))^2+(3\sin^2t\cos t)^2}dt$

$$=2\pi+6\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4t\cos tdt=\frac{16\pi}{5}$$

(21) (本题满分 11 分)

已知函数 $f(x)$ 在 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 上连续，在 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 内是函数 $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$ 的一个原函数，且 $f(0)=0$，

(I)求 $f(x)$ 在区间 $[0,\frac{3\pi}{2}]$ 上的平均值；

(II)证明 $f(x)$ 在区间 $(0,\frac{3\pi}{2})$ 内存在唯一零点.

【解析】(I)由已知 $f(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt, f(0)=0$，

则 $\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)d(x-\frac{3}{2}\pi)=(x-\frac{3}{2}\pi)f(x)\Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}-\int_0^{\frac{3}{2}\pi}(x-\frac{3}{2}\pi)f'(x)dx$

$$=-\int_0^{\frac{3}{2}\pi}(x-\frac{3}{2}\pi)\frac{\cos x}{2x-3\pi}dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\cos xdx=\frac{1}{2},$$

所以 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{3}{2}\pi\right]$ 上的平均值为 $\frac{1}{\frac{3}{2}\pi-0}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx=\frac{1}{\frac{3}{2}\pi}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{3\pi}$.

(II) 由 $f(x)=\int_0^x\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt$ 得，$f'(x)=\frac{\cos x}{2x-3\pi}$，令 $f'(x)=0$，

解得在 $(0,\frac{3}{2}\pi)$ 上的唯一驻点为 $x=\frac{\pi}{2}$，

且当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$f'(x)<0$；当 $\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}$ 时，$f'(x)>0$.

所以 $x=\frac{\pi}{2}$ 为 $f(x)$ 在 $(0,\frac{3}{2}\pi)$ 内的极小值点，也是最小值点.

故 $f_{\min}(x)=f(\frac{\pi}{2})=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt<0$， $f(0)=0$，

$$f(\pi)=\int_0^{\pi}\frac{\cos t}{2t-3\pi}dt=\int_0^{\pi}\frac{d\sin t}{2t-3\pi}=\frac{\sin t}{2t-3\pi}\Big|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\sin t d(\frac{1}{2t-3\pi})=2\int_0^{\pi}\frac{\sin t}{(2t-3\pi)^2}dt>0$$

结合单调性可知，函数$f(x)$在$(0,\dfrac{\pi}{2})$内无零点；函数$f(x)$在$(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{3\pi}{2})$内唯一零点

综上所述，$f(x)$在$(0,\dfrac{3\pi}{2})$内唯一零点.

(22) (本题满分 11 分)

设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&1&1-a\\1&0&a\\a+1&1&a+1\end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix}0\\1\\2a-2\end{pmatrix}$且方程组$Ax=\beta$无解，

(I)求a的值；

(II)求方程组$A^TAx=A^T\beta$的通解.

【解析】(I)$\left(A,\beta\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1-a&0\\1&0&a&1\\a+1&1&a+1&2a-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&a&1\\0&1&1-2a&-1\\0&0&2a-a^2&a-2\end{array}\right)$

当$a=0$时，$r(A)=2,r(A,\beta)=3$，$Ax=\beta$无解

(II) $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}$

$$A^TA=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&2&2\\2&2&2\\2&2&2\end{pmatrix}$$

$$A^T\beta=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$$

$$\left(A^TA,\quad A^T\beta\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&2&-1\\2&2&2&-2\\2&2&2&-2\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

$A^T A=0$ 的基础解系为 $\xi=(0,-1,1)^T$，$A^T A=\beta$ 的特解为 $\eta=(1,-2,0)^T$，

所以 $A^T A=\beta$ 的通解为 $x=k\xi+\eta$，其中 k 为任意常数.

(23) (本题满分 11 分)

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,

(I)求 A^{99}；

(II)设3阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$. 记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

【解析】(I) $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda&1&-1\\-2&\lambda+3&0\\0&0&\lambda\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)$.

所以得 A 的特征值为

$$\lambda_1=-1,\lambda_2=-2,\lambda_3=0$$

其对应的特征向量分别为

$\xi_1=(1,1,0)^T,\xi_2=(1,2,0)^T\ \xi_1=(3,2,2)^T$

令 $P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}$, $\Lambda=\begin{pmatrix}-1&&\\&-2&\\&&0\end{pmatrix}$

有 $P^{-1}AP=\Lambda$，易知 $P^{-1}=\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

所以 $A=P\Lambda P^{-1}$,

$$A^{99}=\begin{pmatrix}1&1&3\\1&2&2\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&&\\&-2^{99}&\\&&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1&-2\\-1&1&\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

(II) $B^2=BA\Rightarrow B^3=BBA=B^2A=BAA=BA^2$，$B^4==B^2A^2=BAA^2=BA^3$ 依次类推得

$B^{100}=BA^{99}$，所以有 $\left(\beta_1,\beta_2,\beta_3\right)=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)A^{99}=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$

从而有

$\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2$

$\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2$

$\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2$