

## 2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题:1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合

题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1、若反常积分  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^a(1+x)^b} dx$  收敛, 则

- (A)  $a < 1$  且  $b > 1$ . (B)  $a > 1$  且  $b > 1$ .  
(C)  $a < 1$  且  $a+b > 1$ . (D)  $a > 1$  且  $a+b > 1$ .

2、已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1, \end{cases}$  则  $f(x)$  的一个原函数是

(A)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1. \end{cases}$  (B)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x - 1) - 1, & x \geq 1. \end{cases}$

(C)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$  (D)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$

3、若  $y = (1+x^2)^2 - \sqrt{1+x^2}$ ,  $y = (1+x^2)^2 + \sqrt{1+x^2}$  是微分方程  $y' + p(x)y = q(x)$  的两个解, 则  $q(x) =$

- (A)  $3x(1+x^2)$ . (B)  $-3x(1+x^2)$ .  
(C)  $\frac{x}{1+x^2}$ . (D)  $-\frac{x}{1+x^2}$ .

4、已知函数  $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, & n=1, 2, \dots, \end{cases}$  则

- (A)  $x=0$  是  $f(x)$  的第一类间断点. (B)  $x=0$  是  $f(x)$  的第二类间断点.  
(C)  $f(x)$  在  $x=0$  处连续但不可导. (D)  $f(x)$  在  $x=0$  处可导.

5、设  $A$ ,  $B$  是可逆矩阵, 且  $A$  与  $B$  相似, 则下列结论错误的是

- (A)  $A^T$  与  $B^T$  相似. (B)  $A^{-1}$  与  $B^{-1}$  相似.  
(C)  $A + A^T$  与  $B + B^T$  相似. (D)  $A + A^{-1}$  与  $B + B^{-1}$  相似.

6、设二次型  $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$ , 则  $f(x_1, x_2, x_3) = 2$  在空

间直角坐标下表示的二次曲面为

- (A) 单叶双曲面 (B) 双叶双曲面  
(C) 椭球面 (D) 柱面

7、设随机变量  $X \sim N(\mu, \sigma^2) (\sigma > 0)$ , 记  $p = P\{X \leq \mu + \sigma^2\}$ , 则

- (A)  $p$  随着  $\mu$  的增加而增加 (B)  $p$  随着  $\sigma$  的增加而增加  
(C)  $p$  随着  $\mu$  的增加而减少 (D)  $p$  随着  $\sigma$  的增加而减少

8、随机试验  $E$  有三种两两不相容的结果  $A_1, A_2, A_3$ , 且三种结果发生的概率均为  $\frac{1}{3}$ , 将

试验  $E$  独立重复做 2 次,  $X$  表示 2 次试验中结果  $A_1$  发生的次数,  $Y$  表示 2 次试验中结果  $A_2$  发生的次数, 则  $X$  与  $Y$  的相关系数为

- (A)  $-\frac{1}{2}$  (B)  $-\frac{1}{3}$  (C)  $\frac{1}{3}$  (D)  $\frac{1}{2}$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

9、 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x t \ln(1+t \sin t) dt}{1 - \cos x^2} =$  \_\_\_\_\_.

10、向量场  $A(x, y, z) = (x + y + z)i + xyj + zk$  的旋度  $\text{rot} A =$  \_\_\_\_\_.

11、设函数  $f(u, v)$  可微,  $z = z(x, y)$  由方程  $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$  确定, 则

$dz|_{(0,1)} =$  \_\_\_\_\_.

12、设函数  $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+ax^2}$ , 且  $f'''(0) = 1$ , 则  $a =$  \_\_\_\_\_.

13、行列式  $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$  \_\_\_\_\_.

14、设  $x_1, x_2, \dots, x_n$  为来自总体  $N(\mu, \sigma^2)$  的简单随机样本, 样本均值  $\bar{x} = 9.5$ , 参数  $\mu$  的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8, 则  $\mu$  的置信度为 0.95 的双侧置信区间为 \_\_\_\_\_.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15、(本题满分 10 分)

已知平面区域  $D = \{(r, \theta) | 2 \leq r \leq 2(1 + \cos \theta), -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$ , 计算二重积分  $\iint_D x dx dy$ .

16、(本题满分 10 分)

设函数  $y(x)$  满足方程  $y'' + 2y' + ky = 0$ , 其中  $0 < k < 1$ .

(1) 证明: 反常积分  $\int_0^{+\infty} y(x)dx$  收敛;

(2) 若  $y(0) = 1, y'(0) = 1$ , 求  $\int_0^{+\infty} y(x)dx$  的值.

17、(本题满分 10 分)

设函数  $f(x, y)$  满足  $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = (2x+1)e^{2x-y}$ , 且  $f(0, y) = y+1$ ,  $L_t$  是从点  $(0, 0)$  到点

$(1, t)$  的光滑曲线. 计算曲线积分  $I(t) = \int_{L_t} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} dy$ , 并求  $I(t)$  的最小值.

18、(本题满分 10 分)

设有界区域  $\Omega$  由平面  $2x + y + 2z = 2$  与三个坐标平面围成,  $\Sigma$  为  $\Omega$  整个表面的外侧,

计算曲面积分  $I = \iint_{\Sigma} (x^2 + 1)dydz - 2ydzdx + 3zdx dy$ .

19、(本题满分 10 分)

已知函数  $f(x)$  可导, 且  $f(0) = 1, 0 < f'(x) < \frac{1}{2}$  设数列  $\{x_n\}$  满足  $x_{n+1} = f(x_n) (n = 1, 2, \dots)$ .

证明: (1) 级数  $\sum_{n=1}^{\infty} (x_{n+1} - x_n)$  绝对收敛;

(2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 且  $0 < \lim_{n \rightarrow \infty} x_n < 2$ .

20、(本题满分 11 分)

$$\text{设矩形 } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}.$$

当  $a$  为何值时, 方程  $AX = B$  无解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时, 求此方程.

21、(本题满分 11 分)

$$\text{已知矩阵 } A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(1) 求  $A^{99}$

(2) 设 3 阶矩阵  $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  满足  $B^2 = BA$ . 记  $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , 将  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  分别表示为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性组合.

22、(本题满分 11 分)

设二维随机变量  $(X, Y)$  在区域  $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$  上服从均匀分布,

$$\text{令 } U = \begin{cases} 1, & X \leq Y. \\ 0, & X > Y. \end{cases}$$

- (1) 写出  $(X, Y)$  的概率密度;
- (2) 问  $U$  与  $X$  是否相互独立? 并说明理由;
- (3) 求  $Z = U + X$  的分布函数  $F(z)$ .

23、(本题满分 11 分)

设总体的概率密度为  $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$  其中  $\theta \in (0, +\infty)$  为未知参数,

$X_1, X_2, X_3$  为来自总体  $X$  的简单随机样本, 令  $T = \max(X_1, X_2, X_3)$ ,

- (I) 求  $T$  的概率密度;
- (II) 确定  $a$ , 使得  $aT$  为  $\theta$  的无偏估计.