2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题答案

一、选择题:1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合
题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1、若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛，则

（A）$a<1$ 且 $b>1$.　　（B）$a>1$ 且 $b>1$.

（C）$a<1$ 且 $a+b>1$.　　（D）$a>1$ 且 $a+b>1$.

【答案】（C）

【解析】排除法，根据被积函数的特点，取 $a=0$，$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x)^b}dx=\frac{1}{1-b}(1+x)^{1-b}\Big|_0^{+\infty}$

$=\frac{1}{1-b}[\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{(1+x)^{b-1}}-1]$ 收敛，只需保证 $b>1$ 即可.说明 $a<1$ 可以使得原广义积分收敛，排除 B 和 D.再取 $a=-1,b=2$ 时 $\int_0^{+\infty}\frac{x}{(1+x)^2}dx=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{(1+x)^2}dx$

$=\left[\ln(1+x)+\frac{1}{1+x}\right]\Big|_0^{+\infty}$ 发散，说明满足 A 的条件，但原广义积分发散，排除 A.

2、已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), & x<1,\\ \ln x, & x\ge1,\end{cases}$ 则 $f(x)$ 的一个原函数是

（A）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1.\\ x(\ln x-1), & x\ge1.\end{cases}$　　（B）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1.\\ x(\ln x-1)-1, & x\ge1.\end{cases}$

（C）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1.\\ x(\ln x+1)+1, & x\ge1.\end{cases}$　　（D）$F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & x<1.\\ x(\ln x-1)+1, & x\ge1.\end{cases}$

【答案】（D）

【解析】$F(x)=\int f(x)dx=\begin{cases}(x-1)^2 & x<1\\ x\ln x-x+C & x>1\end{cases}$，$F(x)$ 需连续，$F(1^+)=F(1^-)$

$\Rightarrow C=1$

3、若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}$，$y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，则 $q(x)=$

（A）$3x(1+x^2)$.　　　　（B）$-3x(1+x^2)$.

（C）$\dfrac{x}{1+x^2}$.　　　　（D）$-\dfrac{x}{1+x^2}$.

【答案】（A）

【解析】一阶线性方程通解 $y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{\int p(x)dx}q(x)dx+c\right]$

$$y_1=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2},\ y_2=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$$

说明：$\sqrt{1+x^2}=e^{-\int p(x)dx}$

$$\Rightarrow \int p(x)=-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)$$

$$\Rightarrow (1+x^2)^2=\int\frac{q(x)}{\sqrt{1+x^2}}dx$$

$$\Rightarrow q(x)=3x(1+x^2)$$

4、已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}, n=1,2,\cdots,\end{cases}$ 则

（A）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.　　　　（B）$x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

（C）$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导.　　　　（D）$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

【答案】（D）

【解析】$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x=0$

$x>0$ 时，$\dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}$.　　　　$x\to 0^+$ 时，$n\to+\infty$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0$

$\therefore\ f(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

$$f_-'(0)=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x}=1$$

$$f_+'(0)=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{n}}{x}$$

又 $\dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}$

$$\therefore\quad 1=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\le\frac{\frac{1}{n}}{x}<\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}=\frac{1+n}{n}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$

$\therefore\quad f_+'(0)=1$

$\therefore\quad f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

5、设 A，B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是

（A）A^T 与 B^T 相似.　　（B）A^{-1} 与 B^{-1} 相似.

（C）$A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似.　　（D）$A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似.

【答案】（C）

【解析】A 与 B 相似，所以存在可逆阵 P 使得 $P^{-1}AP=B$.

$B^T=P^TA^T(P^{-1})^T=P^TA^T(P^T)^{-1}$，即 A^T 与 B^T 相似.

$B^{-1}=P^{-1}A^{-1}P$，即 A^{-1} 与 B^{-1} 相似.

又 $B=P^{-1}AP$，从而有 $B^{-1}+B=P^{-1}(A+A^{-1})P$

所以 $A+A^{-1}$ 与 $B^{-1}+B$ 相似，从而选 C.

6、设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标下表示的二次曲面为

（A）单叶双曲面　　（B）双叶双曲面

（C）椭球面　　（D）柱面

【答案】（B）

【解析】二次型对应的矩阵为 $A=\begin{pmatrix}1&2&2\\2&1&2\\2&2&1\end{pmatrix}$，

由 $|\lambda E-A|=(\lambda+1)^2(\lambda-5)=0$ 得：$\lambda_1=\lambda_2=-1,\lambda_3=5$

于是 $f(x_1,x_2,x_3)=-y_1^2-y_2^2+5y_3^2$，即为双叶曲面，故选 B.

7、设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，记 $p=P\{X\le\mu+\sigma^2\}$，则

（A）p 随着 μ 的增加而增加　　（B）p 随着 σ 的增加而增加

（C）p 随着 μ 的增加而减少　　（D）p 随着 σ 的增加而减少

【答案】（B）

【解析】 $X \sim N(\mu,\sigma^2)$， $P = P\{X \le \mu+\sigma^2\} = P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le \sigma\} = \Phi(\sigma)$

故当 $\sigma \nearrow$， $P \nearrow$

8、随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1， A_2， A_3，且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$，将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验中结果 A_2 发生的次数，则 X 与 Y 的相关系数为

（A） $-\frac{1}{2}$　　（B） $-\frac{1}{3}$　　（C） $\frac{1}{3}$　　（D） $\frac{1}{2}$

【答案】（A）

【解析】

X \ Y	0	1	2
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	0
2	$\frac{1}{9}$	0	0

$E(X) = E(Y) = \frac{2}{3}$， $E(XY) = \frac{2}{9}$， 所以 $\text{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{2}{9}$

$E(X^2) = E(Y^2) = \frac{8}{9}$， $D(X) = D(Y) = \frac{4}{9}$

所以相关系数 $\rho_{XY} = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} = -\frac{1}{2}$

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

9、 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2} =$ ______.

【答案】 $\frac{1}{2}$

【解析】 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{\frac{x^4}{2}} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\ln(1+x\sin x)}{2x^3}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \frac{x^3}{2x^3} = \frac{1}{2}$.

10、向量场 $A(x,y,z)=(x+y+z)i+xyj+zk$ 的旋度 $rotA=$ ________.

【答案】$\vec{j}+(y-1)\vec{k}.$

【解析】$rotA=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x+y+z & xy & z\end{vmatrix}=\vec{j}+(y-1)\vec{k}.$

11、设函数 $f(u,v)$ 可微，$z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz|_{(0,1)}=$ _______.

【答案】$-1dx+2y$.

【解析】两边对 x 求偏导. $z+(x+1)\dfrac{\partial z}{\partial x}=2xf+x^2(1-\dfrac{\partial z}{\partial x})f_1'$

当 $x=0,y=1$ 时，$z=1$，代入得：$1+\dfrac{\partial z}{\partial x}=0\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$

两边对 y 求偏导 $(x+1)\dfrac{\partial z}{\partial y}-2y=x^2\left[f_1'\cdot(-\dfrac{\partial z}{\partial y})+f_2'\right]$

同理可得：$\Rightarrow\dfrac{\partial z}{\partial y}=2$

$dx|_{(0,1)}=\dfrac{\partial z}{\partial x}dx+\dfrac{\partial z}{\partial y}dy=-1dx+2y.$

12、设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=1$，则 $a=$ ______.

【答案】$a=\dfrac{1}{2}$

【解析】$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^{2n}\Rightarrow\arctan x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nx^{2n+1}}{2n+1}=x-\dfrac{x^3}{3}+\cdots$

$$\frac{x}{1+ax^2}=x(1+ax^2)^{-1}=x\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{a}x)^{2n}=x-ax^3+\cdots$$

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots$$

根据级数展开与泰勒公式一致性：

$$\Rightarrow \frac{f'''(0)}{3!} = -\frac{1}{3} - (-a) \quad \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

13、行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = $______.

【答案】$\lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4$

【解析】$\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (-1)^{4+1}4\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+4}3\begin{vmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \end{vmatrix}$

$$+(-1)^{3+4}2\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} + (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^4 + \lambda^3 + 2\lambda^2 + 3\lambda + 4.$$

14、设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为来自总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值 $\overline{x} = 9.5$，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间的置信上限为 10.8，则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为______.

【答案】$(8.2, 10.8)$

【解析】μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间是

$$\left(\overline{x} - t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}, \overline{x} + t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right)$$

μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为 $(\overline{x}-a, \overline{x}+a)$，已知 $\overline{x} = 9.5$，置信上限是 10.8

即 $\overline{x} + a = 10.8$，解得 $a = 1.3$，所以置信区间为 $(9.5-1.3, 9.5+1.3)$，即 $(8.2, 10.8)$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

15、（本题满分 10 分）

已知平面区域 $D = \left\{(r, \theta) \mid 2 \le r \le 2(1+\cos\theta), -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D x\,dx\,dy$.

【解析】$I=\iint\limits_{D} xdxdy=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{2}^{2(1+\cos\theta)}r^2\cos\theta dr=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta d\theta\int_{2}^{2(1+\cos\theta)}r^2dr=5\pi+\frac{32}{3}$

16、（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$.

（1）证明：反常积分 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 收敛；

（2）若 $y(0)=1$，$y'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 的值.

【解析】$y''+2y'+ky=0,0<k<1$

特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+k=0\Rightarrow(\lambda+1)^2=1-k$，即 $\lambda=\pm\sqrt{1-k}-1$

通解为 $y=C_1e^{(\sqrt{1-k}-1)x}+C_2e^{(-\sqrt{1-k}-1)x}$.

（1）$-1<\sqrt{1-k}-1<0,-2<-\sqrt{1-k}-1<-1$

$\int_0^{+\infty}e^{(\sqrt{1-k}-1)x}dx=\frac{1}{1-\sqrt{1-k}}$ $\int_0^{+\infty}e^{(-\sqrt{1-k}-1)x}dx=\frac{1}{\sqrt{1-k}+1}$ 即 $\int_0^{+\infty}y(x)dx$ 收敛.

（2）$\begin{cases}C_1+C_2=1\\C_1(\sqrt{1-k}-1)+C_2(-\sqrt{1-k}-1)=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}C_1=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{1-k}}\\C_2=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{1-k}}\end{cases}$

$\Rightarrow\int_0^{+\infty}C_1e^{(\sqrt{1-k}-1)x}+C_2e^{(-\sqrt{1-k}-1)x}dx=\frac{3}{k}$

17、（本题满分 10 分）

设函数 $f(x,y)$ 满足 $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1$，L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线。计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y$，并求 $I(t)$ 的最小值.

【解析】L_1 是从 $(1,t)$ 到 $(0,t)$ 的直线；L_2 是从 $(0,t)$ 到 $(0,0)$ 的直线

$$\int_{L_1}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy=\int_0^1\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx=-\int_0^1(2x+1)e^{2x-t}dx=-e^{2-t}$$

$$\int_{L_2}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy=\int_t^0\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy=\int_t^0 1dy=0-t=-t$$

$$I(t)=t+e^{2-t},\frac{dI(t)}{dt}=1-e^{2-t}=0\Rightarrow t=2$$

$$I''(t)=e^{2-t},I''(2)=1>0,I_{\min}(2)=3$$

18、（本题满分 10 分）

设有界区域Ω由平面$2x+y+2z=2$与三个坐标平面围成，$\sum$为Ω整个表面的外侧，计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+1)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

【解析】

$$I=\iiint\limits_{\Omega}(2x-2+3)dV=\iiint\limits_{\Omega}(2x+1)dV=\int_0^1dx\int_0^{2-2x}dy\int_0^{1-x-\frac{y}{2}}(2x+1)dz$$

$$=\int_0^1dx\int_0^{2-2x}(2x+1)(1-x-\frac{y}{2})dy=\int_0^1dx\int_0^{2-2x}(2x+1)(1-x)-\frac{y}{2}(2x+1)dy$$

$$=\int_0^1(2x+1)(1-x)(2-2x)-\frac{1}{4}(2x+1)(2-2x)^2dx$$

$$=\int_0^1 2(2x+1)(1-x)^2-(2x+1)(1-x)^2dx=\int_0^1(2x+1)(1-x)^2dx$$

$$=\int_0^1(2x+1)(1-2x+x^2)dx=\int_0^1 2x+1-4x^2-2x+2x^3+x^2)dx$$

$$=1+1-\frac{4}{3}-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$$

19、（本题满分 10 分）

已知函数$f(x)$可导，且$f(0)=1$，$0<f'(x)<\frac{1}{2}$.设数列$\{x_n\}$满足$x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2\ldots)$.

证明：（1） 级数$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$绝对收敛；

（2） $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，且$0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

【解析】（1）函数$f(x)$可导，数列满足$x_{n+1}=f(x_n)(n=1,2\ldots)$，在$x_n$和$x_{n-1}$ $(n=2,3....)$构成的区间上使用拉格朗日中值定理，得

$$x_{n+1}-x_n=f(x_n)-f(x_{n-1})=f'(\xi_n)(x_n-x_{n-1})，（\xi_n介于x_n和x_{n-1}之间）$$

由 $0 < f'(x) < \frac{1}{2}$，得

$$x_{n+1} - x_n = f(x_n) - f(x_{n-1}) = f'(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) < \frac{1}{2}|x_n - x_{n-1}| < \frac{1}{2^{n-1}}|x_2 - x_1|$$

即 $|u_n| = |x_{n+1} - x_n| < \frac{1}{2^{n-1}}|x_2 - x_1|$，又正项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}|x_2 - x_1| = |x_2 - x_1|\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{n-1}}$ 收敛，

由比较审敛法和绝对收敛的定义，得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$ 绝对收敛.

（2）：由（1）$\sum_{n=1}^{\infty}(x_{n+1} - x_n)$，记其前 $n-1$ 项和为

$S_{n-1} = x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + ... + x_n - x_{n-1} = x_n - x_1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1}$ 存在,且 $x_n = S_{n-1} + x_1$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty}(S_{n-1} + x_1) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n-1} + x_1$ 存在，设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 。

由拉格朗日中值定理得，$f(x) - f(0) = f'(\xi)x$，其中，ξ 介于 x 和 0 之间，

即 $x_{n+1} = f(x_n) = f(0) + f'(\xi)x_n$，两边同时取极限得：$\lim\limits_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}[1 + f'(\xi)x_n]$

可得：$a = 1 + af'(\xi)$，解得：$a = \frac{1}{1 - f'(\xi)}$，由于 $0 < f'(\xi) < \frac{1}{2}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \in (0,2)$

20、（本题满分 11 分）

设矩形 $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$.

当 a 为何值时，方程 $AX = B$ 无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求此方程.

【解析】将 B 按列分成两块 $B = (\beta_1, \beta_2)$，$Ax = B \Leftrightarrow Ax = (\beta_1, \beta_2)$.

$$(A,B) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & a & 1 & 1 & a \\ -1 & 1 & a & -a-1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & a+2 & 3 & -3 & a-4 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a & 0 \end{pmatrix}$$

$a = 1$ 时， 有无穷多解；

$a = -2$ 时，$(A,B) \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$ 无解

$a \neq 1$ 且 $a \neq -2$ 时，有唯一解.

当 $a=1$ 时，$(A,B)\to\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 3 & -3 & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

等价方程组为 $\begin{cases}x_1=1\\ x_2+x_3=-1\end{cases}$，　令 $x_3=k$，得 $x_2=-k-1$

$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -k_1-1 & -k_2-1\\ k_1 & k_2\end{pmatrix}$，$k_1,k_2\in R$

当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -2$ 时

$(A,B)\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 1 & 2\\ 0 & a+2 & 0 & 0 & a-4\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$，得 $B=\begin{pmatrix}1 & \dfrac{3a}{a-2}\\ 0 & \dfrac{a-4}{a+2}\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

21、（本题满分 11 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 2 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

（1）求 A^{99}

（2）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$。记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

【解析】(I)由 $|\lambda E-A|=\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)=0$，所以 $\lambda_1=0,\lambda_2=-1,\lambda_3=-2$。

所以 A 可相似对角化，且 A 与 $\begin{pmatrix}0 & & \\ & -1 & \\ & & -2\end{pmatrix}$ 相似。

由 $(0E-A)x=0$ 得 $\eta_1=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$；

由 $(-E-A)x=0$ 得 $\eta_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$；

由 $(-2E-A)x=0$ 得 $\eta_3=\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$.

令 $P=\begin{pmatrix}\frac{3}{2}&1&1\\1&1&2\\1&0&0\end{pmatrix}$，则 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&&\\&-1&\\&&-2\end{pmatrix}=\Lambda$.

所以 $A=P\Lambda P^{-1}$，所以 $A^{99}=P\Lambda^{99}P^{-1}=\begin{pmatrix}-2+2^{99}&1-2^{99}&2-2^{98}\\-2+2^{100}&1-2^{100}&2-2^{99}\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(2)由 $B^2=BA$ 得

$B^3=B^2A=BA^2\Rightarrow B^4=B^2A^2=BA^3\Rightarrow\cdots\cdots\Rightarrow B^{100}=BA^{99}$，

所以 $(\beta_1\ \ \beta_2\ \ \beta_3)=(\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3)A^{99}$，

所以 $\beta_1=(-2+2^{99})\alpha_1+(-2+2^{100})\alpha_2$

$\beta_2=(1-2^{99})\alpha_1+(1-2^{100})\alpha_2$，

$\beta_3=(2-2^{98})\alpha_1+(2-2^{99})\alpha_2$.

22、（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\left\{(x,y)\,|\,0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\right\}$ 上服从均匀分布，

令 $U=\begin{cases}1, & X\le Y.\\0, & X>Y.\end{cases}$

（1） 写出 (X,Y) 的概率密度；

（2） 问 U 与 X 是否相互独立？并说明理由；

（3）求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

【解析】（1）由于 $S_0=\int_0^1(\sqrt{x}-x^2)dx=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\big|_0^1-\frac{x^3}{3}\big|_0^1=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

所以 $f(x,y)=\begin{cases}3, & (x,y)\in D,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

（2）

u	0	1
p	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

$P(u=1)=P(X\le Y)=3\int_0^1(\sqrt{x}-x)dx=3\cdot\frac{2}{3}\cdot x^{\frac{3}{2}}\big|_0^1-3\cdot\frac{x^2}{2}\big|_0^1=3\cdot\frac{2}{3}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$

$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy=\begin{cases}\int_{x^2}^{\sqrt{x}}3dy=3(\sqrt{x}-x^2), & 0<x<1,\\ 0, & 其它.\end{cases}$

$P(u=0,X\le y_2)=P(X>Y,X\le y_2)=\frac{1}{8}$

$P(X\le Y_2)=\int_0^{\frac{1}{2}}(3\sqrt{x}-3x^2)dx=2\cdot x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^{\frac{1}{2}}-x^3\Big|_0^{\frac{1}{2}}=2\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}-\frac{1}{8}=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{8}$

$P(u=0)=\frac{1}{2}$

因为 $P(u=0,X\le y_2)\ne P(X\le y_2)P(u=0)$，所以 X 与 u 不独立。

（3）Z 的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z)&=P(Z\le z)=P(u+X\le z)\\&=P(u+X\le z,u=0)+P(u+X\le z,u=1)\\&=P(X\le z,u=0)+P(X\le z-1,u=1)\\&=P(X\le z,X>Y)+P(X\le z-1,X\le Y)\end{aligned}$$

1° $z<0$ $\quad F_Z(z)=0$

2° $0\le z<1$ $\quad F_Z(z)=3\int_0^z dx\int_{x^2}^{x}1dy=3\int_0^z(x-x^2)dx=3(\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3})=\frac{3}{2}z^2-z^3$

3° $1\le z<2$ $\quad F_Z(z)=\frac{1}{2}+3\int_0^{z-1}dx\int_x^{\sqrt{x}}1dy=\frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2$

4° $z>2$ $\quad F_Z(z)=1$

综上所述，Z 的分布函数为：

$$F_Z(z)=\begin{cases}0, & z<0\\ \frac{3}{2}z^2-z^3, & 0\le z<1\\ \frac{1}{2}+2(z-1)^{\frac{3}{2}}-\frac{3}{2}(z-1)^2; & 1\le z<2\\ 1, & z\ge 2\end{cases}$$

23、（本题满分 11 分）

设总体的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{3x^2}{\theta^3} & ,0<x<\theta,\\ 0,\text{其他}, & \end{cases}$ 其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，

X_1,X_2,X_3 为来自总体 X 的简单随机样本，令 $T=\max(X_1,X_2,X_3)$，

（Ⅰ）求 T 的概率密度；

（Ⅱ）确定 a，使得 aT 为 θ 的无偏估计.

【解析】(1) $F_T(t)=P(T\le t)=P\{\max(X_1,X_2,X_3)\le t\}=P\{X_1\le t,X_2\le t,X_3\le t\}$

$$=P\{X_1\le t\}\cdot P\{X_2\le t\}\cdot P\{X_3\le t\}=F^3(t)$$

因此 $X\sim f(x;\theta)=\begin{cases}\frac{3x^2}{\theta^3} & 0<x<\theta\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，从而 $F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t;\theta)dt$

当 $x\le 0$ 时，$F(x)=0$

当 $0<x<\theta$ 时，$F(x)=\int_0^x\frac{3t^2}{\theta^3}dt=\frac{3}{\theta^3}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_0^x=\frac{3}{\theta^3}\cdot\frac{x^3}{3}=\frac{x^3}{\theta^3}$

当 $x\ge\theta$ 时，$F(x)=1$

从而有：当 $t\le 0$ 时，　$F_T(t)=0$

当 $0<t<\theta$ 时，　$F_T(t)=(\frac{x}{\theta})^9$

当 $t\ge\theta$ 时，　$F_T(t)=1.$

所以 $f_T(t)=F_T^{'}(t)=\begin{cases}\frac{9t^8}{\theta^9}, & 0<t<\theta,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$

（2）因为aT为θ的无偏估计，所以$E(aT)=\theta$，则$aE(T)=\theta$。

又$ET=\int_{-\infty}^{+\infty} tf_T(t)dt=\int_0^{\theta} t\cdot 9\cdot\frac{t^8}{\theta^9}dt=\frac{9}{\theta^9}\cdot\frac{t^{10}}{10}\Big|_0^{\theta}=\frac{9}{10}\theta$

故$a\cdot\frac{9}{10}\theta=\theta$，所以$a=\frac{10}{9}$.