

## 2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学二试题答案

一、选择题:1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合

题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1、设  $a_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1)$ ,  $a_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x})$ ,  $a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1$ . 当  $x \rightarrow 0^+$  时, 以上 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是( )

- (A)  $a_1, a_2, a_3$ . (B)  $a_2, a_3, a_1$ .  
(C)  $a_2, a_1, a_3$ . (D)  $a_3, a_2, a_1$ .

【答案】(B)

【解析】当  $x \rightarrow 0^+$  时,

$$a_1 = x(\cos \sqrt{x} - 1) \sim -\frac{1}{2}x^2, a_2 = \sqrt{x} \ln(1 + \sqrt[3]{x}) \sim x^{\frac{5}{6}}, a_3 = \sqrt[3]{x+1} - 1 \sim \frac{1}{3}x$$

所以 3 个无穷小量按照从低阶到高阶的排序是  $a_2, a_3, a_1$ , 故选 B.

2、已知函数  $f(x) = \begin{cases} 2(x-1), & x < 1, \\ \ln x, & x \geq 1, \end{cases}$  则  $f(x)$  的一个原函数是

- (A)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x - 1), & x \geq 1. \end{cases}$  (B)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x + 1) - 1, & x \geq 1. \end{cases}$   
(C)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x + 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$  (D)  $F(x) = \begin{cases} (x-1)^2, & x < 1. \\ x(\ln x - 1) + 1, & x \geq 1. \end{cases}$

【答案】(D)

【解析】 $F(x) = \int f(x) dx = \begin{cases} (x-1)^2 & x < 1, \\ x \ln x - x + C & x > 1 \end{cases}$ ,  $F(x)$  需连续,  $F(1^+) = F(1^-)$

$$\Rightarrow C = 1$$

3、反常积分 ①  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^x dx$ , ②  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^x dx$  的敛散性为

- (A) ① 收敛, ② 收敛. (B) ① 收敛, ② 发散.  
(C) ① 发散, ② 收敛. (D) ① 发散, ② 发散.

【答案】(B)

【解析】  $\int_{-\infty}^0 \frac{1}{x^2} e^x dx = -\int_{-\infty}^0 e^x d\frac{1}{x} = -e^x \Big|_{-\infty}^0 = -(\lim_{x \rightarrow 0^-} e^x - \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x) = 1$ ，收敛

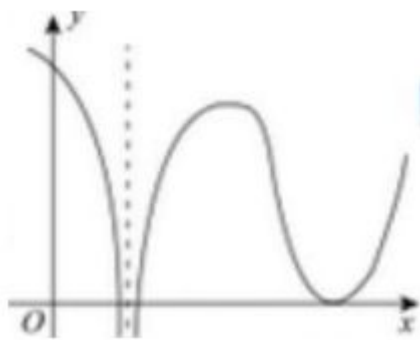
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} e^x dx = -\int_0^{+\infty} e^x d\frac{1}{x} = -e^x \Big|_0^{+\infty} = -(\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x) = -1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = +\infty,$$

发散

故选 B.

4、设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  内连续，其导函数的图形如图所示，则( )

新东方 | 考研



考研

kaoyan.xdf.cn

(A) 函数  $f(x)$  有 2 个极值点，曲线  $y = f(x)$  有 2 个拐点.

(B) 函数  $f(x)$  有 2 个极值点，曲线  $y = f(x)$  有 3 个拐点.

(C) 函数  $f(x)$  有 3 个极值点，曲线  $y = f(x)$  有 1 个拐点.

(D) 函数  $f(x)$  有 3 个极值点，曲线  $y = f(x)$  有 2 个拐点.

新东方

考研

kaoyan.xdf.cn

【答案】(B)

【解析】根据极值的必要条件可知，极值点可能是驻点或导数不存在的点。根据极值的充分条件知，在某点左右导函数符号发生改变，则该点是极值点，因此从图形可知函数  $f(x)$  有 2 个极值点.

新东方 | 考研

根据拐点的必要条件可知，拐点可能是二阶导为 0 的点或二阶导不存在的点，根据拐点的充分条件可知，曲线在某点左右导函数的单调性发生改变，则该点是曲线的拐点，因此曲线  $y = f(x)$  由 3 个拐点，故选 B.

5、设函数  $f_i(x)(i=1,2)$  具有二阶连续导数，且  $f_i(x_0) < 0(i=1,2)$ ，若两条曲线

$y = f_i(x)(i=1,2)$  在点  $(x_0, y_0)$  处具有公切线  $y = g(x)$ ，且在该点处曲线  $y = f_1(x)$  的曲率大于曲线  $y = f_2(x)$  的曲率，则在  $x_0$  的某个领域内，有( )

- (A)  $f_1(x) \leq f_2(x) \leq g(x)$       (B)  $f_2(x) \leq f_1(x) \leq g(x)$   
 (C)  $f_1(x) \leq g(x) \leq f_2(x)$       (D)  $f_2(x) \leq g(x) \leq f_1(x)$

【答案】(A)

【解析】因为  $f_i''(x)$  连续且  $f_i''(x_0) < 0$ ，所以根据连续的定义和极限的保号性在  $x_0$  的某领域  $U(x_0)$  内有  $f_i''(x) < 0$ ，所以  $f_i(x)$  在  $U(x_0)$  内是凸的。又因为在  $x = x_0$  处具有公切线  $y = g(x)$ ，根据凸函数的几何意义可知曲线与切线位置关系为  $f_i(x) \leq g(x)$ 。在点  $x_0$  处  $y = f_1(x)$  曲率大于  $y = f_2(x)$ ，所以  $f_1''(x_0) < f_2''(x_0) < 0$ ，所以令  $F(x) = f_1(x) - f_2(x)$ ，因为在  $x = x_0$  处具有公切线  $y = g(x)$ ，所以  $F(x_0) = 0$ ， $F'(x_0) = 0$ 。再由  $F''(x_0) < 0$  得， $F(x_0) = 0$  为  $F(x)$  的极大值，所以在  $x_0$  的某领域  $U_1(x_0)$  内  $F(x) \leq 0$ ，故  $f_1(x) \leq f_2(x)$ 。从而  $f_1(x) \leq f_2(x) \leq g(x)$ 。故选 A。

6、已知函数  $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$ ，则

- (A)  $f'_x - f'_y = 0$       (B)  $f'_x + f'_y = 0$   
 (C)  $f'_x - f'_y = f$       (D)  $f'_x + f'_y = f$

【答案】(D)

【解析】因为  $f'_x(x, y) = \frac{e^x(x-y) - e^x}{(x-y)^2}$ ， $f'_y(x, y) = \frac{e^x}{(x-y)^2}$ ，

所以  $f'_x(x, y) + f'_y(x, y) = \frac{e^x}{x-y} = f(x)$ 。故选 D。

7、设  $A$ ， $B$  是可逆矩阵，且  $A$  与  $B$  相似，则下列结论错误的是

- (A)  $A^T$  与  $B^T$  相似      (B)  $A^{-1}$  与  $B^{-1}$  相似  
 (C)  $A + A^T$  与  $B + B^T$  相似      (D)  $A + A^{-1}$  与  $B + B^{-1}$  相似

【答案】(C)

【解析】 $A$  与  $B$  相似，所以存在可逆阵  $P$  使得  $P^{-1}AP = B$ 。

$$B^T = P^T A^T (P^{-1})^T = P^T A^T (P^T)^{-1}, \text{ 即 } A^T \text{ 与 } B^T \text{ 相似.}$$

$$B^{-1} = P^{-1} A^{-1} P, \text{ 即 } A^{-1} \text{ 与 } B^{-1} \text{ 相似.}$$



11、以  $y = x^2 - e^x$  和  $y = x^2$  为特解的一阶非齐次线性微分方程为\_\_\_\_\_.

【答案】  $y' - y = 2x - x^2$

【解析】 设一阶非齐次线性微分方程为  $y' + p(x)y = q(x)$ . 根据线性微分方程齐次与非齐次解之间的关系知  $x^2 - (x^2 - e^x) = e^x$  为  $y' + p(x)y = 0$  的解, 所以  $p(x) = -1$ . 又因为  $y = x^2$  是  $y' + p(x)y = q(x)$  的解, 所以  $q(x) = 2x - x^2$ . 故一阶非齐次线性微分方程为

$y' - y = 2x - x^2$ .

12、已知函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上连续, 且  $f(x) = (x+1)^2 + 2\int_0^x f(t)dt$ , 则当  $n \geq 2$  时,

$f^{(n)}(0) =$ \_\_\_\_\_.

【答案】  $\frac{5}{2} \times 2^n$

【解析】 当  $x = 0$  时,  $f(0) = 1$ ;

$f(x) = (x+1)^2 + 2\int_0^x f(t)dt$  两边同时对  $x$  求导, 得  $f'(x) = 2(x+1) + 2f(x)$ ,  $f'(0) = 4$ ;

$f'(x) = 2(x+1) + 2f(x)$  两边同时对  $x$  求导, 得  $f''(x) = 2 + 2f'(x)$ ,  $f''(0) = 10$ ;

$f''(x) = 2 + 2f'(x)$  两边同时对  $x$  求导, 得  $f'''(x) = 2f''(x)$ ;

.....

依次求导得  $f^{(n)}(x) = 2^{n-2} f''(x)$ ; 所以  $f^{(n)}(0) = 2^{n-2} f''(0) = 10 \times 2^{n-2} = \frac{5}{2} \times 2^n$ .

13、已知动点  $P$  在曲线  $y = x^3$  上运动, 记坐标原点与点  $P$  间的距离为  $l$ . 若点  $P$  的横坐标时

间的变化率为常数  $v_0$ , 则当点  $P$  运动到点  $(1, 1)$  时,  $l$  对时间的变化率是\_\_\_\_\_.

【答案】  $2\sqrt{2}v_0$

【解析】  $l = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + x^6}$ , 同时对  $t$  求导得,  $\frac{dl}{dt} = \frac{dl}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{2x + 6x^5}{2\sqrt{x^2 + x^6}} \frac{dx}{dt}$ , 又因

为  $x = 1, \frac{dx}{dt} = v_0$ , 所以  $\left. \frac{dl}{dt} \right|_{x=1} = \frac{8}{2\sqrt{2}} v_0 = 2\sqrt{2}v_0$ .

14、设矩阵  $\begin{bmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{bmatrix}$  与  $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  等价，则  $a =$  \_\_\_\_\_ .

【答案】2

【解析】 $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0, r(B) = 2$

$|A| = \begin{vmatrix} a & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{vmatrix} = (a+1)^2(a-2) = 0$

当  $a = -1$  时， $r(A) = 1$ ；当  $a = 2$  时， $r(A) = 2$ ，故  $a = 2$  .

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15、(本题满分 10 分)

求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x - 1)^{\frac{1}{x^4}}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x - 1)^{\frac{1}{x^4}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} (\cos 2x + 2x \sin x - 1)}$

其中

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} (\cos 2x + 2x \sin x - 1) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{2}(2x)^2 + \frac{1}{4!}(2x)^4 + o(x^4) + 2x(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)) - 1}{x^4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + 2x^2 - \frac{x^4}{3} + o(x^4)) - 1}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}x^4 + o(x^4)}{x^4} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

因此，原极限 =  $e^{\frac{1}{3}}$

16、(本题满分 10 分)

设函数  $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$ ，求  $f'(x)$  并求  $f(x)$  的最小值。

【解析】 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt, (x > 0)$

$$\begin{aligned} \text{当 } 0 < x \leq 1 \text{ 时, } f(x) &= \int_0^x (x^2 - t^2) dt + \int_x^1 (t^2 - x^2) dt \\ &= x^3 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x^3 - x^2(1-x) = \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

当  $x > 1$  时,  $f(x) = \int_0^1 (x^2 - t^2) dt = x^2 \int_0^1 dt - \int_0^1 t^2 dt = x^2 - \frac{1}{3}$

$$\text{即 } f(x) = \begin{cases} \frac{4}{3}x^3 - x^2 + \frac{1}{3} & 0 < x \leq 1 \\ x^2 - \frac{1}{3} & x > 1 \end{cases} \quad f'(x) = \begin{cases} 4x^2 - 2x & 0 < x \leq 1 \\ 2x & x > 1 \end{cases}$$

令  $f'(x) = 0$  可得当  $0 < x \leq 1$  时  $x = \frac{1}{2}$  为驻点且为极小值点  $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$ , 而  $f(1) = \frac{2}{3}$

所以  $f(x)$  的最小值为  $\frac{1}{4}$

17、(本题满分 10 分)

已知函数  $z = z(x, y)$  由方程  $(x^2 + y^2)z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0$  确定, 求  $z = z(x, y)$  的极值.

【解析】  $\begin{cases} 2xz + x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} + 2 = 0 \\ x^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 2yz + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial y} + 2 = 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} xz + 1 = 0 \\ yz + 1 = 0 \\ x^2 z + y^2 z + \ln z + 2(x + y + 1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \\ z = 1 \end{cases}$$

由  $2xz + x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} + 2 = 0$  再对  $x$  求导可得

$$2z + 2x \frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{1}{z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

将  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, x = -1, y = -1, z = 1$  代入可得  $A = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -\frac{2}{3} < 0$ , 同理:  $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} < 0$

由  $2xz + x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{z} \frac{\partial z}{\partial x} + 2 = 0$  再对  $y$  求导可得

$$2x \frac{\partial z}{\partial y} + 2y \frac{\partial z}{\partial x} + (x^2 + y^2) \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{1}{z^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{1}{z} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$$

将  $\frac{\partial z}{\partial x} = 0, \frac{\partial z}{\partial y} = 0, x = -1, y = -1, z = 1$  代入可得  $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$

$AC - B^2 > 0$  且  $A < 0$ , 所以  $(-1, -1)$  处取得极大值.

18、(本题满分 10 分)

设  $D$  是由直线  $y = 1$ ,  $y = x$ ,  $y = -x$  围成的有界区域, 计算二重积分  $\iint_D \frac{x^2 - xy - y^2}{x^2 + y^2} dx dy$ .

【解析】  $I = \iint_D \frac{x^2 - xy - y^2}{x^2 + y^2} dx dy = \iint_D \frac{x^2 + y^2 - 2y^2}{x^2 + y^2} dx dy - \iint_D \frac{xy}{x^2 + y^2} dx dy = I_1 + I_2$

又区域  $D$  关于  $y$  轴对称, 则  $I_2 = 0$

$I_1 = \iint_D dx dy - 2 \iint_D \frac{y^2}{x^2 + y^2} dx dy = I_3 + I_4$

其中  $I_3 = \iint_D dx dy = 1$ ,

$I_4 = 2 \iint_D \frac{y^2}{x^2 + y^2} dx dy = 4 \iint_D \frac{y^2}{x^2 + y^2} dx dy = 4 \int_0^1 dy \int_0^y \frac{y^2}{x^2 + y^2} dx$

又  $\int_0^y \frac{y^2}{x^2 + y^2} dx = y \int_0^{\frac{x}{y}} \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} d\left(\frac{x}{y}\right) = y \arctan \frac{x}{y} \Big|_0^y = \frac{\pi}{4} y$

故  $I_4 = \pi \int_0^1 y dy = \frac{\pi}{2}$ , 则  $I = 1 - \frac{\pi}{2}$ .

19、(本题满分 10 分)

已知  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2(x) = \mu(x)e^x$  是二阶微分方程  $(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$  的两个解, 若  $\mu(-1) = e$ ,  $\mu(0) = -1$ , 求  $\mu(x)$  并写出该微分方程的通解.

【解析】已知  $y_2(x) = \mu(x)e^x$  是二阶微分方程  $(2x-1)y'' - (2x+1)y' + 2y = 0$  的解, 代入并

整理得  $(2x-1)\mu'' = (3-2x)\mu'$ , 即  $\frac{\mu''}{\mu'} = \frac{3-2x}{2x-1}$ ,

所以  $\int \frac{\mu''}{\mu'} dx = \int \frac{3-2x}{2x-1} dx$ ,  $\ln |\mu'| = \int \frac{1-2x+2}{2x-1} dx = -x + \ln |2x-1| + \ln C_1$ .

所以  $|\mu'(x)| = e^{-x} \cdot |2x-1| C_1$ ,  $\mu'(x) = C_1(2x-1)e^{-x}$ .

$\mu(x) = \int C_1(2x-1)e^{-x} dx = C_1[-2xe^{-x} - e^{-x} + C_2]$



已知  $\mu(-1) = e$ ,  $\mu(0) = -1$ , 所以  $C_1 = 1$ ,  $C_2 = 0$ , 即  $\mu(x) = -2xe^{-x} - e^{-x}$ .

已知  $y_1(x)$ ,  $y_2(x)$  必线性无关, 从而原方程通解为  $y = k_1e^{-x} + k_2(-2x-1)e^{-x}$ ,  $k_1, k_2$  为任意常数.

20、(本题满分 11 分)

设  $D$  是由曲线  $y = \sqrt{1-x^2}$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) 与  $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$  ( $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ ) 围成的平面区域, 求  $D$  绕  $x$

轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.

【解析】  $V = V_1 - V_2 = \pi \int_0^1 (1-x^2) dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 t \cdot 3 \cos^2 t (-\sin t) dt$

$$= \frac{2\pi}{3} - 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^7 t (1 - \sin^2 t) dt + 3\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^9 t dt$$

则  $V = \frac{2\pi}{3} - 3\pi \cdot \frac{16}{35} \cdot \frac{1}{9} = \frac{18}{35}\pi$



$$S_1 = 2\pi \int_0^1 y \sqrt{1+y'^2} dx = 2\pi \int_0^1 \sqrt{1-x^2} \sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}} dx = 2\pi$$

$$S_2 = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \sqrt{(3\sin^2 t \cos t)^2 + (3\cos^2 t \sin t)^2} dt$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t \cdot 3 \sin t \cos t dt$$

$$= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} 3 \sin^4 t dt \sin t = \frac{6\pi}{5} \sin^5 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{6\pi}{5}$$



所以  $S = S_1 + S_2 = 2\pi + \frac{6\pi}{5} = \frac{16\pi}{5}$ .



21、(本题满分 11 分)

已知  $f(x)$  在  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  上连续, 在  $(0, \frac{3\pi}{2})$  内是函数  $\frac{\cos x}{2x-3\pi}$  的一个原函数, 且  $f(0) = 0$ ,

- (1) 求  $f(x)$  在区间  $[0, \frac{3\pi}{2}]$  上的平均值;
- (2) 证明  $f(x)$  在区间  $(0, \frac{3\pi}{2})$  内存在唯一零点.

【解析】(1)  $f(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt = \frac{\int_0^{\frac{3}{2}\pi} dx \int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt}{\frac{3}{2}\pi} = \frac{\int_0^{\frac{3}{2}\pi} dt \int_t^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\cos t}{2t-3\pi} dx}{\frac{3}{2}\pi}$

$$= \frac{-\int_0^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\cos t}{2} dt}{\frac{3}{2}\pi} = \frac{-\frac{1}{2} \sin t \Big|_0^{\frac{3}{2}\pi}}{\frac{3}{2}\pi} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}\pi} = \frac{1}{3\pi}$$

(2)  $f(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{2t-3\pi} dt$  得,  $f'(x) = \frac{\cos x}{2x-3\pi}$ , 令  $f'(x) = 0$  解得在  $(0, \frac{3\pi}{2})$  上的唯一驻点为  $x = \frac{\pi}{2}$ , 且当  $0 < x < \frac{\pi}{2}$  时,  $f'(x) < 0$ ; 当  $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$  时,  $f'(x) > 0$

所以  $x = \frac{\pi}{2}$  为  $f(x)$  在  $(0, \frac{3\pi}{2})$  内的极小值点, 也是最小值点. 故  $f_{\min}(x) = f(\frac{\pi}{2}) < 0$ ,

$f(0) = 0$ ,  $f(\pi) > 0$ , 结合单调性可知, 函数  $f(x)$  在  $(0, \frac{\pi}{2})$  内无零点, 函数  $f(x)$  在

$(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2})$  内唯一零点, 综上所述,  $f(x)$  在区间  $(0, \frac{3\pi}{2})$  内只有唯一零点.

22、(本题满分 11 分)

设矩阵  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$ ,  $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$ , 且方程组  $Ax = \beta$  无解,

(1) 求  $a$  的值;

(2) 求方程组  $A^T Ax = A^T \beta$  的通解.

【解析】(1) 由方程组  $Ax = \beta$  无解, 可知  $r(A) \neq r(A, \beta)$ , 故这里有  $|A| = 0$ ,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow a=0 \text{ 或 } a=2. \text{ 由于当 } a=0 \text{ 时, } r(A) \neq r(A, \beta), \text{ 而当 } a=2$$

时,  $r(A) = r(A, \beta)$  综上, 故  $a=0$  符合题目.

(2) 当  $a=0$  时,  $A^T A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $A^T \beta = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ , 故

$$(A^T A, A^T \beta) = \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

因此, 方程组  $A^T Ax = A^T \beta$  的通解为  $x = k \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ , 其中  $k$  为任意实数.

23、(本题满分 11 分)

已知矩阵  $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) 求  $A^{99}$

(2) 设 3 阶矩阵  $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  满足  $B^2 = BA$ . 记  $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ , 将  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  分别表示为  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  的线性组合.

【解析】(1) 由  $|\lambda E - A| = \lambda(\lambda+1)(\lambda+2) = 0$ , 所以  $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = -2$ .

所以  $A$  可相似对角化, 且  $A$  与  $\begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix}$  相似.

由  $(0E - A)x = 0$  得  $\eta_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ; 由  $(-E - A)x = 0$  得  $\eta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ; 由  $(-2E - A)x = 0$  得

$\eta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

令  $P = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ , 则  $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & -1 & \\ & & -2 \end{pmatrix} = \Lambda$ .

所以  $A = P\Lambda P^{-1}$ ，所以  $A^{99} = P\Lambda^{99}P^{-1} = \begin{pmatrix} -2+2^{99} & 1-2^{99} & 2-2^{98} \\ -2+2^{100} & 1-2^{100} & 2-2^{99} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 。

(2) 由  $B^2 = BA$  得

$$B^3 = B^2A = BA^2 \Rightarrow B^4 = B^2A^2 = BA^3 \Rightarrow \dots \Rightarrow B^{100} = BA^{99},$$

$$\text{所以 } (\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3) = (\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3)A^{99},$$

$$\text{所以 } \beta_1 = (-2+2^{99})\alpha_1 + (-2+2^{100})\alpha_2$$

$$\beta_2 = (1-2^{99})\alpha_1 + (1-2^{100})\alpha_2,$$

$$\beta_3 = (2-2^{98})\alpha_1 + (2-2^{99})\alpha_2$$