2015学年第一学期徐汇区学习能力诊断卷

高二数学　试卷

2016.1

一. 填空题（本大题满分36分）本大题共有12题，考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得3分，否则一律得0分.

1. 直线$3x-4y-5=0$的倾斜角的大小为________.（结果用反三角函数值表示）

2. 若$\overrightarrow{OA}=(-5,4)$，$\overrightarrow{OB}=(7,9)$，则与$\overrightarrow{AB}$同向的单位向量的坐标是________.

3. 若线性方程组的增广矩阵为$\begin{pmatrix} a & 0 & 2 \\ 0 & 1 & b \end{pmatrix}$，解为$\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$，则$a+b=$________.

4. 行列式$\begin{vmatrix} 6 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & k \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$中元素$-3$的代数余子式的值为7，则$k=$________.

5. 以点$P(3,4)$和点$Q(-5,6)$为一条直径的两个端点的圆的方程是________.

6. 若顶点在原点的抛物线的焦点与圆$x^2+y^2-4x=0$的圆心重合，则该抛物线的准线方程为________.

7. 在ΔABC中，$|AB|=3,|BC|=7,|CA|=5$，则$\overrightarrow{BA}$在$\overrightarrow{AC}$方向上的投影是________.

8. 已知双曲线$kx^2-y^2=1$的一条渐近线的方向向量$\vec{d}=(2,-1)$，则$k=$________.

9. 在正ΔABC中，D是BC上的一点.若$AB=3,BD=1$，则$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=$________.

10. 已知F_1、F_2是双曲线$C:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>0,b>0)$的两个焦点，$P$是双曲线$C$上一点，且$\overrightarrow{PF_1}\perp\overrightarrow{PF_2}$.若$\Delta PF_1F_2$的面积为16，则$b=$________.

11. 若点O和点F分别为椭圆$\dfrac{x^2}{2}+y^2=1$的中心和左焦点，点P为椭圆上的任意一点，则$|OP|^2+|PF|^2$的最小值为________.

12. 在平面直角坐标系中，两个动圆均过点$A(1,0)$且与直线$l:x=-1$相切，圆心分别为C_1、C_2．若动点M满足$2\overrightarrow{C_2M}=\overrightarrow{C_2C_1}+\overrightarrow{C_2A}$，则$M$的轨迹方程为________.

二. 选择题（本大题满分 16 分）本大题共有 4 题，每题有且只有一个正确答案，选对得 4 分，否则一律得 0 分.

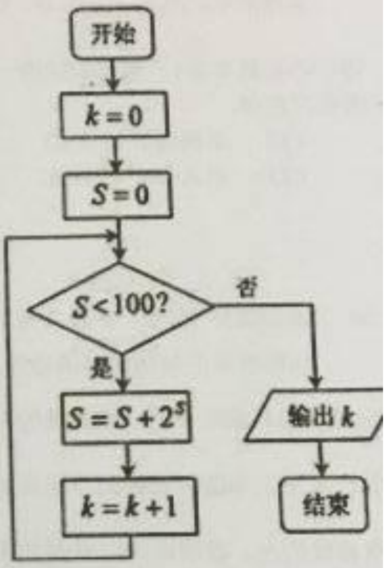
13. “$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$”是“方程组$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$有唯一解”的（　　）

（A）充分非必要条件　　（B）必要非充分条件

（C）充要条件　　（D）既非充分又非必要条件

14. 某程序框图如图所示，该程序运行后输出的k的值是（　　）

（A）3　　（B）4　　（C）5　　（D）6



15. 已知集合$P=\{(x,y)\mid |x|+2|y|=5\}$，$Q=\{(x,y)\mid x^2+y^2=5\}$，则集合$P\cap Q$中元素的个数是（　　）

（A）0　　（B）2　　（C）4　　（D）8

16．已知对称轴为坐标轴的双曲线的渐近线方程为$y=\pm\dfrac{b}{a}x$（$a>0$、$b>0$），若双曲线上有一点$M(x_0,y_0)$，使$b|x_0|<a|y_0|$，则该双曲线的焦点（　　）

（A）在x轴上　　（B）在y轴上

（C）当$a>b$时，在x轴上　　（D）当$a>b$时，在y轴上

三．解答题（本大题满分 48 分）本大题共有 5 题，解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

17.（本题满分 8 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 4 分.

已知：$\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{c}$是同一平面内的三个向量，其中$\vec{a}=(1,2)$.

（1）若$|\vec{c}|=2\sqrt{5}$，且$\vec{c}//\vec{a}$，求$\vec{c}$的坐标；

（2）若$|\vec{b}|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，且$\vec{a}+2\vec{b}$与$2\vec{a}-\vec{b}$垂直，求$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角$\theta$.

18.（本题满分 8 分）

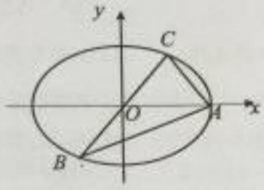
已知直线l经过点$P(-2,\sqrt{3})$，并且与直线$l_0: x-\sqrt{3}y+2=0$的夹角为$\dfrac{\pi}{3}$，求直线l的方程.

19.（本题满分 10 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分．

如图所示：$A(2\sqrt{3},0)$、B、C 是椭圆 E:$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上的三点，BC 过椭圆 E 的中心且斜率为1，椭圆长轴的一个端点与短轴的两个端点构成正三角形．

（1） 求椭圆 E 的方程；

（2） 求 ΔABC 的面积．

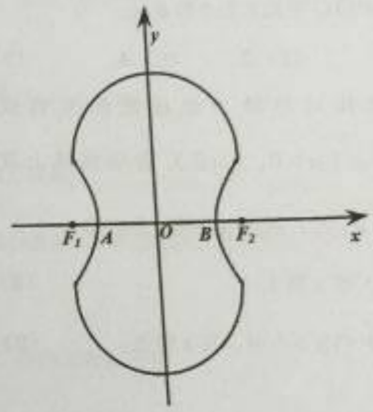


20．（本题满分 10 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 4 分，第 2 小题满分 6 分．

如图所示的封闭区域的边界是由两个关于 x 轴对称的半圆和截取于同一双曲线的两段曲线组合而成的．其中上半圆所在圆的方程是 $x^2+y^2-4y-4=0$，双曲线的左、右顶点 A、B 是该圆与 x 轴的交点，双曲线与该圆的另两个交点是该圆平行于 x 轴的一条直径的两个端点．

（1）求双曲线的方程；

（2）记双曲线的左、右焦点为 F_1、F_2，试在封闭区域的边界上求点 P，使得 $\angle F_1PF_2$ 是直角．



21．（本题满分 12 分）本题共有 2 个小题，第 1 小题满分 6 分，第 2 小题满分 6 分．

对于曲线 $C: f(x,y)=0$，若存在非负实常数 M 和 m，使得曲线 C 上任意一点 $P(x,y)$ 有 $m\le|OP|\le M$ 成立(其中 O 为坐标原点)，则称曲线 C 为既有外界又有内界的曲线，简称“有界曲线”，并将最小的外界 M_0 称为曲线 C 的外确界，最大的内界 m_0 称为曲线 C 的内确界．

（1）曲线 $y^2=4x$ 与曲线 $(x-1)^2+y^2=4$ 是否为“有界曲线”？若是，求出其外确界与内确界；若不是，请说明理由；

（2）已知曲线 C 上任意一点 $P(x,y)$ 到定点 $F_1(-1,0), F_2(1,0)$ 的距离之积为常数 $a(a>0)$，求曲线 C 的外确界与内确界．

2015学年第一学期徐汇区学习能力诊断卷
高二年级数学学科

参考答案及评分标准　　　　　　　　2016.01

说明:

1．本解答列出试题一种或几种解法，如果考生的解法与所列解法不同，可参照解答中评分标准的精神进行评分.

2．评阅试卷，应坚持每题评阅到底，不要因为考生的解答中出现错误而中断对该题的评阅．当考生的解答在某一步出现错误，影响了后续部分，但该步以后的解答未改变这一题的内容和难度时，可视影响程度决定后面部分的给分，但是原则上不应超出后面部分应给分数之半，如果有较严重的概念性错误，就不给分.

3．第17题至第21题中右端所注的分数，表示考生正确做到这一步应得的该题分数.

4．给分或扣分均以1分为单位.

一. 填空题（本大题满分36分）本大题共有12题，考生应在答题纸相应编号的空格内直接填写结果，每个空格填对得3分，否则一律得0分.

1． $\arctan\dfrac{3}{4}$；　　　　**2.** $(\dfrac{12}{13},\dfrac{5}{13})$；

3． 2；　　　　**4．** 3；

5． $(x+1)^2+(y-5)^2=17$；　　　　**6．** $x=-2$；

7． $\dfrac{3}{2}$；　　　　**8．** $\dfrac{1}{4}$；

9． $\dfrac{15}{2}$；　　　　**10．** 4；

11． 2；　　　　**12．** $y^2=2x-1$；

二. 选择题（本大题满分16分）本大题共有4题，每题有且只有一个正确答案，考生应在答题纸的相应编号上，将代表答案的小方格涂黑，选对得4分，否则一律得0分.

13． C ；**14.** B ；**15．** C ；**16.** B .

三．解答题（本大题满分 48 分）本大题共有 5 题，解答下列各题必须在答题纸相应编号的规定区域内写出必要的步骤.

17.（本题满分 8 分）本题共有 **2** 个小题，第 **1** 小题满分 **4** 分，第 **2** 小题满分 **4** 分.

解：（**1**）设 $\vec{c}=(x,y)$，由 $\vec{c}//\vec{a}$ 和 $|\vec{c}|=2\sqrt{5}$ 可得：

$$\begin{cases}1\cdot y-2\cdot x=0\\ x^2+y^2=20\end{cases}\quad\therefore\quad\begin{cases}x=2\\ y=4\end{cases}\ \text{或}\ \begin{cases}x=-2\\ y=-4\end{cases}$$

$\therefore\ \vec{c}=(2,4)$ 或 $\vec{c}=(-2,-4)$ ……………………**4** 分

（**2**）由 $(\vec{a}+2\vec{b})\perp(2\vec{a}-\vec{b})$ 得，$(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(2\vec{a}-\vec{b})=0$ ……………………**5** 分

即 $2\vec{a}^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-2\vec{b}^2=0$

$2|\vec{a}|^2+3\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$

$2\times5+3\vec{a}\cdot\vec{b}-2\times\dfrac{5}{4}=0$，所以 $\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{5}{2}$ ……………………**6** 分

得 $\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=-1$，由 $\theta\in[0,\pi]$

得 $\theta=\pi$. ……………………**8** 分

18.（本题满分 8 分）.

解：设直线 l 的一个法向量为 $\vec{n}=(a,b)$，则直线 l 的点法向式方程为：

$a(x+2)+b(y-\sqrt{3})=0$，即：$ax+by+2a-\sqrt{3}b=0$ ……………2 分

因为两直线的夹角为 $\dfrac{\pi}{3}$，所以 $\dfrac{|a-\sqrt{3}b|}{\sqrt{1+3}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ …………**4** 分

得 $b^2=\sqrt{3}ab$ ……………………………………………………………5 分

当 $b=0$ 时，直线 l 的方程为 $x+2=0$ ……………………………………**6** 分

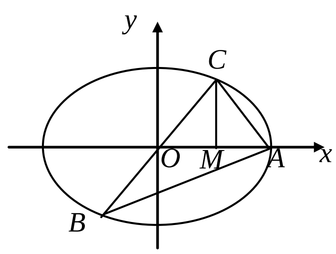
当 $b\neq0, b=\sqrt{3}a$ 时，直线 l 的方程为 $x+\sqrt{3}y-1=0$ ………………**7** 分

所以直线 l 的方程为 $x+2=0$ 或 $x+\sqrt{3}y-1=0$ ……………………………8 分

19.（本题满分 **10** 分）本题共有 **2** 个小题，第 **1** 小题满分 **4** 分，第 **2** 小题满分 **6** 分.

解：（**1**）依题意，$a=2\sqrt{3}$，$b=\dfrac{\sqrt{3}}{3}a=2$ ……………………2 分

$\therefore$ 椭圆 E 的方程为 $\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ……………………4 分



（2）由$\begin{cases}\dfrac{x^2}{12}+\dfrac{y^2}{4}=1\\ y=x\end{cases}$，得$y=\pm\sqrt{3}$…………………6 分

作$CM\perp x$轴于M，则$|CM|=\sqrt{3}$…………………8 分

$\because O$是BC的中点，

$\therefore S_{\Delta ABC}=2S_{\Delta AOC}=|OA|\cdot|CM|=2\sqrt{3}\times\sqrt{3}=6$…………………10 分

20．（本题满分 **10** 分）本题共有 **2** 个小题，第 **1** 小题满分 **4** 分，第 **2** 小题满分 **6** 分．

解（1）设双曲线的方程为$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>0,b>0\right)$，

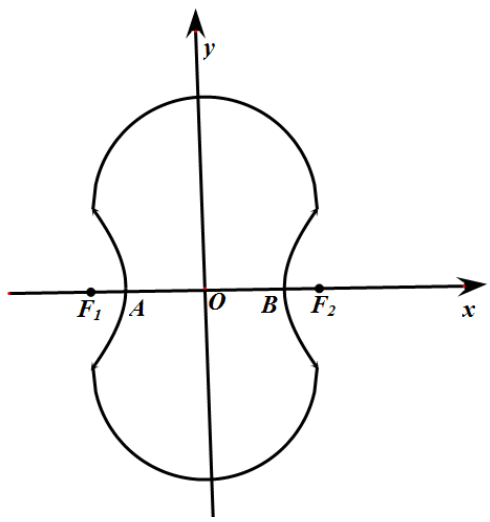
由$\begin{cases}x^2+y^2-4x=0\\ y=0\end{cases}$

解得$x^2-4=0$，$x=\pm2$，则双曲线的左、右顶点为$A\left(-2,0\right)$、$B\left(2,0\right)$，于是$a=2$…………………… 2 分

由$\begin{cases}x^2+y^2-4x=0\\ y=2\end{cases}$

得$x^2-8=0$，解得$x=\pm2\sqrt{2}$，即双曲线过点$\left(\pm2\sqrt{2},2\right)$，

则$\dfrac{8}{2^2}-\dfrac{4}{b^2}=1$，解得$b=2$，…………… 3 分



第 20 题图

所以所求双曲线的方程为$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{4}=1$……………………4 分

（2）由（1）得双曲线的两个焦点是$F_1\left(-2\sqrt{2},0\right)$，$F_2\left(2\sqrt{2},0\right)$ …………5 分

当$\angle F_1PF_2=90^\circ$时，

①若点$P\left(x,y\right)$在双曲线上，则$x^2-y^2=4$ $(-2\sqrt{2}\le x\le2\sqrt{2})$，

由$\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}=0$，得$\left(x+2\sqrt{2}\right)\left(x-2\sqrt{2}\right)+y^2=0\Rightarrow x^2-8+y^2=0$由$\begin{cases}x^2-y^2=4\\ x^2-8+y^2=0\end{cases}$，

解得$\begin{cases}x=\pm\sqrt{6}\\ y=\pm\sqrt{2}\end{cases}$所以$P_1\left(\sqrt{6},\sqrt{2}\right),P_2\left(\sqrt{6},-\sqrt{2}\right),P_3\left(-\sqrt{6},\sqrt{2}\right),P_4\left(-\sqrt{6},-\sqrt{2}\right)$…… 7 分

②若点$P\left(x,y\right)$在上半圆上，则$x^2+y^2-4y-4=0\left(y\ge2\right)$，由$\overrightarrow{F_1P}\cdot\overrightarrow{F_2P}=0$，

得$\left(x+2\sqrt{2}\right)\left(x-2\sqrt{2}\right)+y^2=0$，由$\begin{cases}x^2+y^2-4y-4=0\\ x^2+y^2-8=0\end{cases}$解得$y=1$，舍去…… 8 分

同理可得，在下半圆上也不存在满足题意的点 P ……………… 9 分

综上，满足条件的点 P 有 **4** 个，分别为

$P_1\left(\sqrt{6},\sqrt{2}\right),P_2\left(\sqrt{6},-\sqrt{2}\right),P_3\left(-\sqrt{6},\sqrt{2}\right),P_4\left(-\sqrt{6},-\sqrt{2}\right)$…………………… 10 分

21．（本题满分 **12** 分）本题共有 **2** 个小题，第 **1** 小题满分 **6** 分，第 **2** 小题满分 **6** 分．

解：（**1**）设 $P(x,y)$ 为曲线 $y^2=4x$ 上任意一点，

$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+4x}=\sqrt{(x+2)^2-4}\ (x\geq 0)$ $\therefore |OP|\in[0,+\infty)$

$\therefore$ 曲线 $y^2=4x$ 不是“有界曲线”. ……………**3** 分

设 $P(x,y)$ 为曲线 $(x-1)^2+y^2=4$ 上任意一点，

由 $y^2=4-(x-1)^2\geq 0$，得 $-1\leq x\leq 3$，

$|OP|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+4-(x-1)^2}=\sqrt{2x+3}\ (-1\leq x\leq 3)$ $\therefore |OP|\in[1,3]$

$\therefore$ 曲线 $(x-1)^2+y^2=4$ 是“有界曲线”. 外确界 $M_0=3$，内确界 $m_0=1$…………**6** 分

（**2**））设 $P(x,y)$ 为曲线 C 上的任意一点，

由已知得：$\sqrt{(x-1)^2+y^2}\times\sqrt{(x+1)^2+y^2}=a$ ， ……………**7** 分

$\sqrt{x^2-2x+1+y^2}\times\sqrt{x^2+2x+1+y^2}=\sqrt{(x^2+y^2+1)^2-4x^2}$

$\therefore (x^2+y^2+1)^2-4x^2=a^2$

$\therefore y^2=\sqrt{4x^2+a^2}-(x^2+1)\geq 0$

化简得： $(x^2+1)^2\leq 4x^2+a^2$

$\therefore (x^2-1)^2\leq a^2$ $\therefore 1-a\leq x^2\leq a+1$

即 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{\sqrt{4x^2+a^2}-1}$ ……………**9** 分

若 $0<a<1$，则 $\sqrt{1-a}\leq\sqrt{\sqrt{4x^2+a^2}-1}\leq\sqrt{a+1}$，

外确界 $M_0=\sqrt{a+1}$，内确界 $m_0=\sqrt{1-a}$ ……………**11** 分

若 $a\geq 1$，则 $0\leq x^2\leq a+1$， $\sqrt{a-1}\leq\sqrt{\sqrt{4x^2+a^2}-1}\leq\sqrt{a+1}$，

外确界 $M_0=\sqrt{a+1}$，内确界 $m_0=\sqrt{a-1}$

综合得：外确界 $M_0=\sqrt{a+1}$，内确界 $m_0=\sqrt{|a-1|}$． ……………**12** 分