

太原市 2016 年高三年级模拟试题（一）

数学试卷(文科类)

(考试时间:下午 3:00—5:00)

注意事项:

- 1.本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,第 I 卷 1 至 3 页,第 II 卷 4 7 页.
- 2.回答第 I 卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上.
- 3.回答第 I 卷时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上的对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号,写在本试卷上无效.
- 4.回答第 II 卷时,将答案写在答题卡相应位置上写在本试卷上无效.
- 5.考试结束,将本试卷和答题卡一并交回.

第 I 卷

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.已知全集  $U = \{1,2,3,4,5\}$ ,集合  $M = \{3,4,5\}$ ,  $N = \{1,2,5\}$ ,则集合  $\{1,2\}$  可表示为 ( )

A.  $M \cup N$       B.  $(C_U M) \cup N$       C.  $M \cap (C_U N)$       D.  $(C_U N) \cap (C_U M)$

解析:(B)

考点:集合的混合运算

2.已知  $i$  是虚数单位,则复数  $\frac{5+3i}{4-i} = ( )$

A.  $1-i$       B.  $-1+i$       C.  $1+i$       D.  $-1-i$

解析:(C)

考点：复数的计算，分子分母同乘以  $4+i$

3. 下图是某样本数据的茎叶图，则该样本的中位数、众数、极差分别是 ( )

A. 32 34 32      B. 33 45 35      C. 34 45 32      D. 33 36 35

解析：( B )

考点：茎叶图特征，中位数：从小到大排在最中间的数字；众数：出现次数最多的数字；极差：最大值与最小值得差值。

4. 若双曲线  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  的离心率为  $\sqrt{3}$ ，则其渐近线方程为 ( )

A.  $y = \pm\sqrt{2}x$       B.  $y = \pm 2x$       C.  $y = \pm \frac{1}{2}x$       D.  $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$

解析：( A )

考点：考察双曲线离心率与渐近线方程，离心率  $e = \frac{c}{a}$ ，渐近线方程为

$$y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2}}x = \pm \sqrt{e^2 - 1}x = \pm \sqrt{2}x$$

5. 对于下列四个命题

$$p_1: \exists x_0 \in (0, +\infty), \left(\frac{1}{2}\right)^{x_0} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x_0} \quad p_2: \exists x_0 \in (0, 1), \log_{\frac{2}{3}} x_0 > \log_{\frac{1}{3}} x_0$$

$$p_3: \forall x \in (0, +\infty), \left(\frac{1}{2}\right)^x > \log_{\frac{1}{2}} x \quad p_4: \forall x \in (0, \frac{1}{3}), \left(\frac{1}{2}\right)^x < \log_{\frac{1}{3}} x$$

其中真命题是

A.  $p_1, p_3$       B.  $p_1, p_4$       C.  $p_2, p_3$       D.  $p_2, p_4$

解析：( D )

考点：指数与对数函数图像性质及大小比较

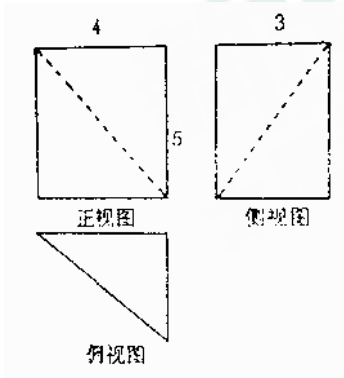
6. 执行如图所示的程序框图, 所输出的  $S = \frac{25}{24}$ , 则判断框内填入的条件可以是

A.  $k \leq 7$

B.  $k > 7$

C.  $k \leq 8$

D.  $k < 8$



解析：①  $S=0, k=0, k=k+2=0+2=2, S=S+\frac{1}{k}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

②  $k=k+2=2+2=4, S=S+\frac{1}{k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

③  $k=k+2=4+2=6, S=S+\frac{1}{k}=\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$

④  $k=k+2=6+2=8, S=S+\frac{1}{k}=\frac{11}{12}+\frac{1}{8}=\frac{25}{24}$

$\therefore k < 8$ , 固选 D.

7. 已知函数  $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$  ( $|\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ) 的图象过零点  $(0, \sqrt{3})$ , 则  $f(x)$  图象的一个对称中心是

A.  $(-\frac{\rho}{3}, 0)$    B.  $(-\frac{\rho}{6}, 0)$    C.  $(\frac{\rho}{6}, 0)$    D.  $(\frac{\rho}{12}, 0)$

解析：由题意可知： $f(0) = 2\sin(0 + \varphi) = \sqrt{3}$ , 即  $\sin(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

又  $\because |\varphi| < \frac{\pi}{2}$ ,  $\therefore \varphi = \frac{\pi}{3} \therefore f(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$

所以， $f(x)$ 图象的对称中心是 $(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, 0)$

当 $k=0$ 时， $f(x)$ 图象的对称中心是 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ ，固选 B

8. 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 $n$ 项的和为 $S_n$ ，若 $S_n = 2, S_{3n} = 14$ ，则 $S_{4n} =$

A.80 B.30 C.26 D.16

解析：由 $S_n = 2, S_{3n} = 14$ ，令 $n=1, S_1 = 2, S_3 = 14$

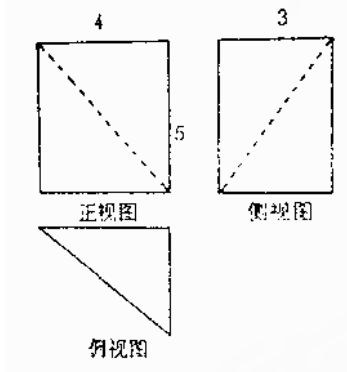
$$\text{则 } a_1 = S_1 = 2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2 = a_1(1 + q + q^2) = 14$$

$$\therefore 1 + q + q^2 = 7 \text{ 即 } q^2 + q - 6 = 0, q = 2$$

$$\therefore S_{4n} = S_4 = \frac{a_1(1 - q^4)}{1 - q} = 30, \text{ 固选 B}$$

9. 某空间几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积等于

A.10 B.15 C.20 D.30



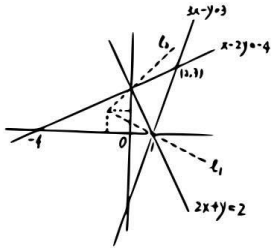
10. 设不等式组  $\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x - 2y \geq -4 \\ 3x - y \leq 3 \end{cases}$  所表示的平面区域为  $M$ ，若函数  $y = k(x+1) + 1$  的图象经过区域  $M$ ，则实数

$k$  的取值范围是

A.  $[3, 5]$  B.  $[-1, 1]$  C.  $[-1, 3]$  D.  $[-\frac{1}{2}, 1]$

答案：D

解析：如图所示，阴影部分为区域  $M$ ，函数图象恒过定点  $(-1,1)$ ，故  $k$  的取值范围为  $[-\frac{1}{2}, 1]$



11. 已知三棱锥  $S-ABC$ ，满足  $SA \perp SB, SB \perp SC, SC \perp SA$ ，且  $SA = SB = SC$ ，若该三棱锥外接球的半径为  $\sqrt{3}$ ， $Q$  是外接球上一动点，则  $Q$  到平面  $ABC$  的距离最大值为

- A. 3      B. 2      C.  $\frac{\sqrt{3}}{3}$       D.  $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

答案：D

解析：三条侧棱两两垂直故可以看成正方体的一角，此三棱锥的外接球为正方体的外接球，故  $Q$  到平面  $ABC$  的距离最大值为外接球的半径加上球心到平面  $ABC$  的距离即  $\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

12. 已知函数  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2ax, g(x) = 3a^2 \ln x + b$ ，设两曲线  $y = f(x)$  与  $y = g(x)$  有公共点，且在该点处的切线相同，

则  $a \in (0, +\infty)$  时，实数  $b$  的最大值是

- A.  $\frac{13}{6}e^6$     B.  $\frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}}$     C.  $\frac{1}{6}e^6$     D.  $\frac{7}{2}e^{\frac{2}{3}}$

答案：B

解析：  $f'(x) = x + 2a, g'(x) = \frac{3a^2}{x}$   $\because f(x), g(x)$  有公共点且在该点切线相同，则假设切点为  $(x_0, y_0)$  有

$$x_0 + 2a = \frac{3a^2}{x_0}$$

整理得  $x_0^2 + 2ax_0 - 3a^2 = 0$ ，得  $x_0 = -3a$ ，或  $x_0 = a$ ， $g(x)$  函数定义域为  $(0, +\infty)$ ，故舍去  $x_0 = -3a$

由此得  $\frac{1}{2}a^2 + 2a^2 = 3a^2 \ln a + b$ ，则  $b = \frac{5}{2}a^2 - 3a^2 \ln a = a^2(\frac{5}{2} - 3 \ln a)$ ，设函数

$h(x) = x^2(\frac{5}{2} - 3 \ln x), h'(x) = 2x(1 - 3 \ln x)$ ，得函数在  $x = e^{\frac{1}{3}}$  处取到极大值，故  $b$  的最大值在  $a = e^{\frac{1}{3}}$  处取到即

$$\frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}}$$

13. 设函数  $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(-x), & x < 0 \end{cases}$ ，若  $f(a) > f(-a)$ ，则实数  $a$  的取值范围是。

答案：  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

解析：函数  $f(x)$  为奇函数，如图所示

由此得  $a$  的取值范围为  $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

14. 已知圆  $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$ ，若等边  $\triangle PAB$  的一边  $AB$  为圆  $C$  的一条弦，则  $|PC|$  的最大值为\_\_\_\_\_。

考点：圆的方程，最值问题。

解析：设  $\angle CAB = \theta$ ， $AB$  的中点为  $D$ ，圆心  $C(1, 2)$ ，半径： $r = \sqrt{2}$ ， $CD = \sqrt{2} \sin \theta$ ，

$$AD = \sqrt{2} \cos \theta, \quad AB = 2\sqrt{2} \cos \theta, \quad PD = \sqrt{6} \cos \theta,$$

$$\therefore PC = PD + CD = \sqrt{6} \cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta = 2\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{3}), \therefore |PC|_{\max} = 2\sqrt{2}$$

答案： $2\sqrt{2}$

15. 已知非零向量  $\vec{a}, \vec{b}$  的夹角为  $60^\circ$ , 且  $|\vec{a} - \vec{b}| = 1$ , 则  $|\vec{a} + \vec{b}|$  的最大值是\_\_\_\_\_.

考点：向量的运算，不等式应用

解析： $\because |\vec{a} - \vec{b}| = 1, (\vec{a} - \vec{b})^2 = 1, \therefore \vec{a}^2 + \vec{b}^2 = 2\vec{a}\vec{b} + 1 = 2|\vec{a}||\vec{b}| + 1, \because \vec{a}^2 + \vec{b}^2 \geq 2|\vec{a}||\vec{b}|;$

$$\therefore |\vec{a}||\vec{b}| \leq 1, \therefore (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\vec{b} = 2|\vec{a}||\vec{b}| + 1 \leq 3, \therefore |\vec{a} + \vec{b}| \leq \sqrt{3}$$

答案： $\sqrt{3}$

16. 若数列满足  $a_n - (-1)^n a_{n-1} = n(n^2 - 2), S_n$  是  $\{a_n\}$  的前  $n$  项和, 则  $S_{40} =$ \_\_\_\_\_.

考点：数列的前  $n$  项和

解析：当  $n=2$  时,  $a_2 - a_1 = 2$ ;

当  $n=3$  时,  $a_3 + a_2 = 3$ ;

当  $n=4$  时,  $a_4 - a_3 = 4, \therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 8$

当  $n=6$  时,  $a_6 - a_5 = 6$ ;

当  $n=7$  时,  $a_7 + a_6 = 7$ ;

当  $n=8$  时,  $a_8 - a_7 = 8, \therefore a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 16$

当  $n=10$  时,  $a_{10} - a_9 = 10$ ;

当  $n=11$  时,  $a_{11} + a_{10} = 11$

当  $n=12$  时,  $a_{12} - a_{11} = 12, \therefore a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = 24$

$\therefore$  四项和为等差数列, 公差为 8,  $\therefore S_n = 440$

答案：440

17. 已知  $a, b, c$  分别为锐角  $\triangle ABC$  内角  $A, B, C$  的对边, 且  $\sqrt{3}a = 2c \sin A$ .

(1) 求角  $C$ ;

(2)若  $c = \sqrt{7}$ , 且  $\triangle ABC$  的面积为  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ , 求  $a + b$  的值.

考点：解三角形

解析：(1). 由  $\sqrt{3}a = 2c \sin A$  及正弦定理可知  $\sqrt{3} \sin A = 2 \sin C \sin A$ , 于是  $\sqrt{3} = 2 \sin C$ , 即  $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

又因为角  $C$  是锐角, 所以  $C = \frac{\pi}{3}$ .

(2). 由  $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C$  可知  $ab = 6$ . 由余弦定理  $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$  可知  $a^2 + b^2 = 13$ . 于是

$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 25$ , 即  $a + b = 5$ .

答案: (1).  $\frac{\pi}{3}$ ; (2). 5.

18. 某工厂对一批共 50 件的机器零件进行分类检测, 其重量 (克) 统计如下:

重量段	$[80, 85)$	$[85, 90)$	$[90, 95)$	$[95, 100]$
件数	5	$m$	12	$n$

规定重量在 82 克及以下的为甲型, 重量在 85 克及以上的为乙型, 已知该批零件有甲型 2 件.

(1) 从该批零件中任选 1 件, 若选出的零件重量在  $[95, 100]$  内的概率为 0.26, 求  $m$  得值;

(2) 从重量在  $[80, 85)$  的 5 件零件中, 任选 2 件, 求其中恰好有 1 件为甲型的概率.

考点: 统计与概率

解析: (1). 由已知可知  $\frac{n}{50} = 0.26$ ,  $5 + m + 12 + n = 50$ , 解得  $n = 13$ ,  $m = 20$ .

(2). 设事件 “从重量在  $[80, 85)$  的 5 件零件中, 任选 2 件, 其中恰好有 1 件为甲型” 为事件  $A$ .

$$P(A) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}.$$

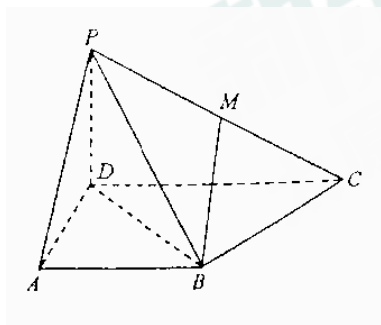


答案:(1). 20;(2).  $\frac{3}{5}$ .

19. 如图, 已知四棱锥的侧棱  $PD \perp$  底面  $ABCD$ , 底面  $ABCD$  是直角梯形,  $AD \perp CD, AB \parallel CD, AB = AD = \frac{1}{2}CD = 2$ .

(1) 求证:  $BC \perp$  平面  $BDP$ ;

(2) 若侧棱  $PC$  与底面  $ABCD$  所成角的正切值为  $\frac{1}{2}$ , 点  $M$  为侧棱  $PC$  的中点, 求一面直线  $BM$  与  $PA$  所成角的余弦值



证明:(1)  $\because PD \perp$  底面  $ABCD \therefore PD \perp BC$ .

又底面  $ABCD$  是直角梯形,  $AD \perp CD, AB \parallel CD, AB = AD = \frac{1}{2}CD = 2$ .

故  $BD \perp BC$ . 从而  $BC \perp$  平面  $BDP$ .

解:(2)  $\because PD \perp$  底面  $ABCD$ , 侧棱  $PC$  与底面  $ABCD$  所成角的正切值为  $\frac{1}{2}$ ,

$\therefore \tan \angle PCD = \frac{1}{2} \therefore PD = 2$ .

连接  $AC$ , 设  $AC$  的中点为  $O$ , 连接  $BO, MO$ . 由点  $M$  为侧棱  $PC$  的中点知直线  $BM$  与  $PA$  所成角即为直线  $BM$  与  $MO$  所成角即  $\angle BMO$ .

在三角形  $BMO$  中,  $MO = \sqrt{2}$ ,  $BM = \sqrt{5}$ ,  $BO = 1$ . 利用余弦定理知  $\cos \angle BMO = \frac{BM^2 + MO^2 - BO^2}{2 \cdot BM \cdot MO} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$ .

20. 已知椭圆  $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$  的一个焦点为  $F(-1, 0)$ , 左右顶点分别为  $A, B$ . 经过点  $F$  的直线  $l$  与椭圆  $M$  交于  $C, D$  两点.

(1) 当直线  $l$  的倾斜角为  $45^\circ$  时, 求线段  $CD$  的长;

(2) 记  $\triangle DABD$  与  $\triangle DABC$  的面积分别为  $S_1$  和  $S_2$ , 求  $|S_1 - S_2|$  的最大值.

解: (1) 根据题意有  $c = 1$ , 故  $a^2 = 3 + 1 = 4$ , 所以  $a = 2$ , 则椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

直线  $l$  的斜率为 1, 方程为  $y = x + 1$ . 设  $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$ , 联立  $y = x + 1$  和  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$  消去  $x$  得

$$7x^2 + 8x - 8 = 0.$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{8}{7}, x_1 x_2 = -\frac{8}{7}.$$

$$\therefore CD = \sqrt{1+1^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{12\sqrt{2}}{7}.$$

(2) 由 (1) 知  $|AB| = 4$ , 所以  $S_1 = 2|y_2|, S_2 = 2|y_1|$ ,

$$|S_1 - S_2| = 2||y_2| - |y_1|| = 2|y_1 + y_2|.$$

若直线的斜率不存在, 则  $S_1 = S_2$ . 若直线的斜率存在, 设为  $k$ , 直线方程为  $y = k(x + 1) (k \neq 0)$ . 将其代入椭圆

方程, 消去  $x$  得  $(3 + 4k^2)y^2 - 6ky - 9k^2 = 0$ , 则

$$y_1 + y_2 = \frac{6k}{3 + 4k^2}, \text{ 从而}$$

$$|S_1 - S_2| = 2|y_1 + y_2| = 2 \left| \frac{6k}{3 + 4k^2} \right| = 2 \left| \frac{6}{\frac{3}{k} + 4k} \right| \leq 2 \frac{6}{2\sqrt{\frac{3}{k} \cdot 4k}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 当且仅当 } k = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 时等号成立.}$$

所以  $|S_1 - S_2|$  的最大值为  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  .

21. 已知函数  $f(x) = 2\ln x - x^2 + ax$  ( $a \in \mathbb{R}$ )

(1) 若函数  $f(x)$  的图象在  $x = 2$  处切线的斜率为 -1, 且不等式  $f(x) \geq 2x + m$  在  $\left[\frac{1}{e}, e\right]$  上有解, 求实数  $m$  的取值范围;

(2) 若函数  $f(x)$  的图象与  $x$  轴有两个不同的交点  $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$ , 且  $0 < x_1 < x_2$ , 求证:  $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0$

考察知识点：导数的几何意义，函数的极值及应用，不等式证明；

重难点：利用导数解决恒成立问题；

解析：(1) 由  $f'(x) = \frac{2}{x} - 2x + a$ , 得切线的斜率  $k = f'(2) = a - 3 = -1$ ,

$\therefore a = 2$ , 故  $f(x) = 2\ln x - x^2 + 2x$ ,

由  $f(x) \geq 2x + m$ , 得:  $m \leq 2\ln x - x^2$ ,

即  $m \leq (2\ln x - x^2)_{\max}$ ,

令  $g(x) = 2\ln x - x^2$ ,

$\because x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$ ,  $g'(x) = 0$  时  $x = 1$ , 故  $g(x)$  在  $x = 1$  取得最大值为  $g(1) = -1$ ,

$\therefore m \leq -1$ .

(2) 由题意, 方程  $2\ln x - x^2 + ax = 0$  的两根为  $x_1, x_2$ , 则  $\begin{cases} 2\ln x_1 - x_1^2 + ax_1 = 0 \\ 2\ln x_2 - x_2^2 + ax_2 = 0 \end{cases}$

$$a = (x_1 + x_2) - \frac{2(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_1 - x_2},$$

$$\text{又 } f'(x) = \frac{2}{x} - 2x + a,$$

$$\text{则 } f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{4}{(x_1 + x_2)} - \frac{2(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_1 - x_2},$$

设  $t = \frac{x_1}{x_2}$ ,  $0 < t < 1$ , 即证  $h(t) = \frac{2(1-t)}{t+1} + \ln t < 0$  在  $0 < t < 1$  上恒成立,

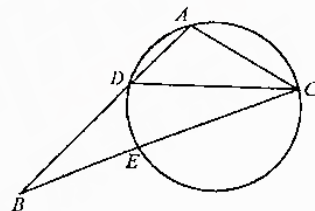
$$h'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}, \therefore h'(t) > 0, h(t) \text{ 在 } 0 < t < 1 \text{ 上为增函数},$$

所以  $h(t) < h(1) = 0$ , 得证。

22. 如图, 在  $\triangle ABC$  中,  $CD$  是  $\angle ACB$  的角平分线,  $\triangle ADC$  的外接圆交  $BC$  与点  $E$ ,  $AB = 2AC$ .

(1) 求证:  $BE = 2AD$ ;

(2) 当  $AC = 3, EC = 6$  时, 求  $AD$  的长.



解析: (1) 连接  $DE$ ,  $\because ACED$  是圆内接四边形,

$$\therefore \angle BDE = \angle BCA$$

$$\text{又 } \because \angle DBE = \angle CBA, \therefore \triangle DBE \sim \triangle CBA, \text{ 即有 } \frac{BE}{BA} = \frac{DE}{DA}$$

$$\text{又 } \because AB = 2AC, \therefore BE = 2DE \quad \text{又 } \because CD \text{ 是 } \angle ACB \text{ 的角平分线}$$

$$\therefore AD = DE, \therefore BE = 2AD$$

(2) 由条件知  $AB = 2AC = 6$ , 设  $AD = t$ , 则  $BE = 2t, BC = 2t + 6$

根据割线定理得  $BD \cdot BA = BE \cdot BC$ , 即  $(6-t) \times t = 2t \cdot (2t+6)$

即  $2t^2 + 9t - 18 = 0$ , 解得  $t = \frac{3}{2}$  或  $t = -6$  (舍去), 则  $AD = \frac{3}{2}$

答案：  $AD = \frac{3}{2}$

23. 在平面直角坐标系  $xOy$  中, 以  $O$  为极点,  $x$  轴的非负半轴为极轴建立的极坐标系中, 直线  $l$  的极坐标方程为  $\rho = \frac{p}{4}(r \hat{=} R)$ ,

程为  $\rho = \frac{p}{4}(r \hat{=} R)$ ,

曲线  $C$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos q \\ y = \sin q \end{cases}$ .

(1) 写出直线  $l$  及曲线  $C$  的直角坐标方程;

(2) 过点  $M$  平行于直线  $l$  的直线与曲线  $C$  交于  $A, B$  两点, 若  $|MA| \cdot |MB| = \frac{8}{3}$ , 求点  $M$  轨迹的直角坐标方程.

解析: (1) 由题得直线  $l$  的直角坐标方程为  $y = x$ , 曲线  $C$  的直角坐标方程为  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ .

(2) 设点  $M(x_0, y_0)$ , 则过点  $M(x_0, y_0)$  且与直线  $l$  平行的直线  $l'$  的参数方程为  $\begin{cases} x = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = y_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$  ( $t$  为参

数), 由题, 将直线  $l'$  的参数方程代入  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  整理得  $\frac{3}{2}t^2 + (\sqrt{2}x_0 + 2\sqrt{2}y_0)t + (x_0^2 + 2y_0^2 - 2) = 0$

则  $t_1 \cdot t_2 = \frac{x_0^2 + 2y_0^2 - 2}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x_0^2 + 2y_0^2 - 2)$

$\therefore |MA| \cdot |MB| = \frac{2}{3}|x_0^2 + 2y_0^2 - 2|$ ,  $\because |MA| \cdot |MB| = \frac{8}{3}$ ,  $\therefore \frac{2}{3}|x_0^2 + 2y_0^2 - 2| = \frac{8}{3}$ ,  $\therefore |x_0^2 + 2y_0^2 - 2| = 4$ ,

$\therefore x_0^2 + 2y_0^2 = 6$  或  $x_0^2 + 2y_0^2 = -2$  (舍去)

$\therefore \frac{x_0^2}{6} + \frac{y_0^2}{3} = 1$ , 表示椭圆.

取  $y = x + m$  代入  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$  得  $3x^2 + 4mx + 2m^2 - 2 = 0$ ，由  $\Delta > 0$  得  $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$

所以，点  $M$  轨迹是椭圆  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$  夹在平行直线  $y = x \pm \sqrt{3}$  之间的两段椭圆弧。

24. 已知函数  $f(x) = |2x - a| + |2x + 3|$ ,  $g(x) = |x - 1| + 2$

(1) 解不等式:  $|g(x)| < 5$ ;

(2) 若对于任意的  $x_1 \in R$ , 都有  $x_2 \in R$ , 使得  $f(x_1) = g(x_2)$  成立, 求实数  $a$  的取值范围.

答案:  $x \in (-2, 4)$ ,  $a \geq -1$  或  $a \leq -5$

考点: 绝对值不等式的求解和含参范围的求解

解析: (1) 因为  $|x - 1| + 2 < 5$ , 得  $-5 < |x - 1| + 2 < 5$ , 所以,  $-7 < |x - 1| < 3$ ,  $-2 < x < 4$ , 故  $x \in (-2, 4)$ .

(2) 对于任意的  $x_1 \in R$ , 都有  $x_2 \in R$ , 使得  $f(x_1) = g(x_2)$  成立, 可知  $\{y | y = f(x)\} \subseteq \{y | y = g(x)\}$

$f(x) = |2x - a| + |2x + 3| \geq |2x - a - (2x + 3)| = |a + 3|$ ,  $g(x) = |x - 1| + 2 \geq 2$

所以,  $|a + 3| \geq 2$

$a \geq -1$  或  $a \leq -5$