

太原市 2016 年高三年级模拟试题（一）

数学试卷(文科类)

(考试时间:下午 3:00—5:00)

注意事项:

- 1.本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,第 I 卷 1 至 3 页,第 II 卷 4 7 页.
- 2.回答第 I 卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上.
- 3.回答第 I 卷时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上的对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号,写在本试卷上无效.
- 4.回答第 II 卷时,将答案写在答题卡相应位置上写在本试卷上无效.
- 5.考试结束,将本试卷和答题卡一并交回.

第 I 卷

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.已知全集 $U = \{1,2,3,4,5\}$,集合 $M = \{3,4,5\}$, $N = \{1,2,5\}$,则集合 $\{1,2\}$ 可表示为 ()

A. $M \cup N$ B. $(C_U M) \cup N$ C. $M \cap (C_U N)$ D. $(C_U N) \cap (C_U M)$

解析:(B)

考点:集合的混合运算

2.已知 i 是虚数单位,则复数 $\frac{5+3i}{4-i} = ()$

A. $1-i$ B. $-1+i$ C. $1+i$ D. $-1-i$

解析:(C)

考点：复数的计算，分子分母同乘以 $4+i$

3. 下图是某样本数据的茎叶图，则该样本的中位数、众数、极差分别是 ()

A. 32 34 32 B. 33 45 35 C. 34 45 32 D. 33 36 35

解析：(B)

考点：茎叶图特征，中位数：从小到大排在最中间的数字；众数：出现次数最多的数字；极差：最大值与最小值得差值。

4. 若双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的离心率为 $\sqrt{3}$ ，则其渐近线方程为 ()

A. $y = \pm\sqrt{2}x$ B. $y = \pm 2x$ C. $y = \pm \frac{1}{2}x$ D. $y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x$

解析：(A)

考点：考察双曲线离心率与渐近线方程，离心率 $e = \frac{c}{a}$ ，渐近线方程为

$$y = \pm \frac{b}{a}x = \pm \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2}}x = \pm \sqrt{e^2 - 1}x = \pm \sqrt{2}x$$

5. 对于下列四个命题

$$p_1: \exists x_0 \in (0, +\infty), \left(\frac{1}{2}\right)^{x_0} < \left(\frac{1}{3}\right)^{x_0} \quad p_2: \exists x_0 \in (0, 1), \log_{\frac{2}{3}} x_0 > \log_{\frac{1}{3}} x_0$$

$$p_3: \forall x \in (0, +\infty), \left(\frac{1}{2}\right)^x > \log_{\frac{1}{2}} x \quad p_4: \forall x \in (0, \frac{1}{3}), \left(\frac{1}{2}\right)^x < \log_{\frac{1}{3}} x$$

其中真命题是

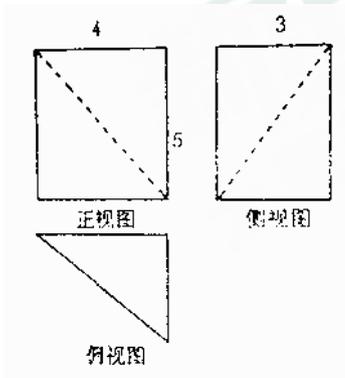
A. p_1, p_3 B. p_1, p_4 C. p_2, p_3 D. p_2, p_4

解析：(D)

考点：指数与对数函数图像性质及大小比较

6. 执行如图所示的程序框图, 所输出的 $S = \frac{25}{24}$, 则判断框内填入的条件可以是

- A. $k \leq 7$ B. $k > 7$ C. $k \leq 8$ D. $k < 8$



解析：① $S=0, k=0, k=k+2=0+2=2, S=S+\frac{1}{k}=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

② $k=k+2=2+2=4, S=S+\frac{1}{k}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

③ $k=k+2=4+2=6, S=S+\frac{1}{k}=\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}$

④ $k=k+2=6+2=8, S=S+\frac{1}{k}=\frac{11}{12}+\frac{1}{8}=\frac{25}{24}$

$\therefore k < 8$, 固选 D。

7. 已知函数 $f(x) = 2\sin(2x + \varphi)$ ($|\varphi| < \frac{\pi}{2}$) 的图象过零点 $(0, \sqrt{3})$, 则 $f(x)$ 图象的一个对称中心是

- A. $(-\frac{\pi}{3}, 0)$ B. $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ C. $(\frac{\pi}{6}, 0)$ D. $(\frac{\pi}{12}, 0)$

解析：由题意可知： $f(0) = 2\sin(0 + \varphi) = \sqrt{3}$, 即 $\sin(\varphi) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

又 $\because |\varphi| < \frac{\pi}{2}$, $\therefore \varphi = \frac{\pi}{3}$ $\therefore f(x) = 2\sin(2x + \frac{\pi}{3})$

所以， $f(x)$ 图象的对称中心是 $(\frac{k\pi}{2} - \frac{\pi}{6}, 0)$

当 $k=0$ 时， $f(x)$ 图象的对称中心是 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$ ，固选 B

8. 各项均为正数的等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项的和为 S_n ，若 $S_n = 2, S_{3n} = 14$ ，则 $S_{4n} =$

A.80 B.30 C.26 D.16

解析：由 $S_n = 2, S_{3n} = 14$ ，令 $n=1, S_1 = 2, S_3 = 14$

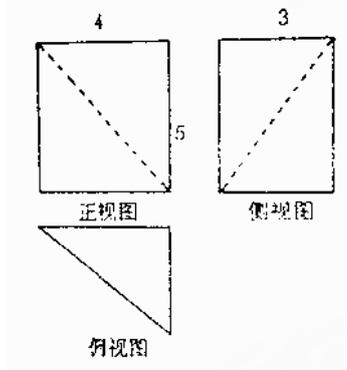
$$\text{则 } a_1 = S_1 = 2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a_1 + a_1q + a_1q^2 = a_1(1 + q + q^2) = 14$$

$$\therefore 1 + q + q^2 = 7 \text{ 即 } q^2 + q - 6 = 0, q = 2$$

$$\therefore S_{4n} = S_4 = \frac{a_1(1 - q^4)}{1 - q} = 30, \text{ 固选 B}$$

9. 某空间几何体的三视图如图所示，则该几何体的体积等于

A.10 B.15 C.20 D.30



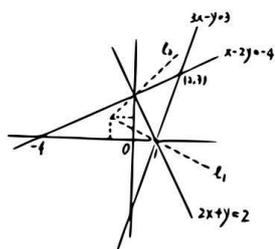
10. 设不等式组 $\begin{cases} 2x + y \geq 2 \\ x - 2y \geq -4 \\ 3x - y \leq 3 \end{cases}$ 所表示的平面区域为 M ，若函数 $y = k(x + 1) + 1$ 的图象经过区域 M ，则实数

k 的取值范围是

A. $[3, 5]$ B. $[-1, 1]$ C. $[-1, 3]$ D. $[-\frac{1}{2}, 1]$

答案：D

解析：如图所示，阴影部分为区域 M ，函数图象恒过定点 $(-1,1)$ ，故 k 的取值范围为 $[-\frac{1}{2}, 1]$



11. 已知三棱锥 $S-ABC$ ，满足 $SA \perp SB, SB \perp SC, SC \perp SA$ ，且 $SA = SB = SC$ ，若该三棱锥外接球的半径为 $\sqrt{3}$ ， Q 是外接球上一动点，则 Q 到平面 ABC 的距离最大值为

- A. 3 B. 2 C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$

答案：D

解析：三条侧棱两两垂直故可以看成正方体的一角，此三棱锥的外接球为正方体的外接球，故 Q 到平面 ABC 的距离最大值为外接球的半径加上球心到平面 ABC 的距离即 $\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

12. 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2ax, g(x) = 3a^2 \ln x + b$ ，设两曲线 $y = f(x)$ 与 $y = g(x)$ 有公共点，且在该点处的切线相同，

则 $a \in (0, +\infty)$ 时，实数 b 的最大值是

- A. $\frac{13}{6}e^6$ B. $\frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}}$ C. $\frac{1}{6}e^6$ D. $\frac{7}{2}e^{\frac{2}{3}}$

答案：B

解析： $f'(x) = x + 2a, g'(x) = \frac{3a^2}{x}$ $\because f(x), g(x)$ 有公共点且在该点切线相同，则假设切点为 (x_0, y_0) 有

$$x_0 + 2a = \frac{3a^2}{x_0}$$

整理得 $x_0^2 + 2ax_0 - 3a^2 = 0$ ，得 $x_0 = -3a$ ，或 $x_0 = a$ ， $g(x)$ 函数定义域为 $(0, +\infty)$ ，故舍去 $x_0 = -3a$

由此得 $\frac{1}{2}a^2 + 2a^2 = 3a^2 \ln a + b$ ，则 $b = \frac{5}{2}a^2 - 3a^2 \ln a = a^2(\frac{5}{2} - 3 \ln a)$ ，设函数

$h(x) = x^2(\frac{5}{2} - 3 \ln x), h'(x) = 2x(1 - 3 \ln x)$ ，得函数在 $x = e^{\frac{1}{3}}$ 处取到极大值，故 b 的最大值在 $a = e^{\frac{1}{3}}$ 处取到即

$$\frac{3}{2}e^{\frac{2}{3}}$$

13. 设函数 $f(x) = \begin{cases} \log_2 x, & x > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(-x), & x < 0 \end{cases}$ ，若 $f(a) > f(-a)$ ，则实数 a 的取值范围是。

答案： $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

解析：函数 $f(x)$ 为奇函数，如图所示

由此得 a 的取值范围为 $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

14. 已知圆 $C: (x-1)^2 + (y-2)^2 = 2$ ，若等边 $\triangle PAB$ 的一边 AB 为圆 C 的一条弦，则 $|PC|$ 的最大值为_____。

考点：圆的方程，最值问题。

解析：设 $\angle CAB = \theta$ ， AB 的中点为 D ，圆心 $C(1, 2)$ ，半径： $r = \sqrt{2}$ ， $CD = \sqrt{2} \sin \theta$ ，

$$AD = \sqrt{2} \cos \theta, \quad AB = 2\sqrt{2} \cos \theta, \quad PD = \sqrt{6} \cos \theta,$$

$$\therefore PC = PD + CD = \sqrt{6} \cos \theta + \sqrt{2} \sin \theta = 2\sqrt{2} \sin(\theta + \frac{\pi}{3}), \therefore |PC|_{\max} = 2\sqrt{2}$$

答案： $2\sqrt{2}$

15. 已知非零向量 \vec{a}, \vec{b} 的夹角为 60° , 且 $|\vec{a} - \vec{b}| = 1$, 则 $|\vec{a} + \vec{b}|$ 的最大值是_____.

考点：向量的运算，不等式应用

解析： $\because |\vec{a} - \vec{b}| = 1, (\vec{a} - \vec{b})^2 = 1, \therefore \vec{a}^2 + \vec{b}^2 = 2\vec{a}\vec{b} + 1 = 2|\vec{a}||\vec{b}| + 1, \because \vec{a}^2 + \vec{b}^2 \geq 2|\vec{a}||\vec{b}|;$

$$\therefore |\vec{a}||\vec{b}| \leq 1, \therefore (\vec{a} + \vec{b})^2 = \vec{a}^2 + \vec{b}^2 + 2\vec{a}\vec{b} = 2|\vec{a}||\vec{b}| + 1 \leq 3, \therefore |\vec{a} + \vec{b}| \leq \sqrt{3}$$

答案： $\sqrt{3}$

16. 若数列满足 $a_n - (-1)^n a_{n-1} = n(n^2 - 2), S_n$ 是 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, 则 $S_{40} =$ _____.

考点：数列的前 n 项和

解析：当 $n=2$ 时, $a_2 - a_1 = 2$;

当 $n=3$ 时, $a_3 + a_2 = 3$;

当 $n=4$ 时, $a_4 - a_3 = 4$, $\therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 8$

当 $n=6$ 时, $a_6 - a_5 = 6$;

当 $n=7$ 时, $a_7 + a_6 = 7$;

当 $n=8$ 时, $a_8 - a_7 = 8$, $\therefore a_5 + a_6 + a_7 + a_8 = 16$

当 $n=10$ 时, $a_{10} - a_9 = 10$;

当 $n=11$ 时, $a_{11} + a_{10} = 11$

当 $n=12$ 时, $a_{12} - a_{11} = 12$, $\therefore a_9 + a_{10} + a_{11} + a_{12} = 24$

\therefore 四项和为等差数列, 公差为 8, $\therefore S_n = 440$

答案：440

17. 已知 a, b, c 分别为锐角 $\triangle ABC$ 内角 A, B, C 的对边, 且 $\sqrt{3}a = 2c \sin A$.

(1) 求角 C ;

(2)若 $c = \sqrt{7}$,且 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{3\sqrt{3}}{2}$,求 $a+b$ 的值.

考点：解三角形

解析：(1).由 $\sqrt{3}a = 2c \sin A$ 及正弦定理可知 $\sqrt{3} \sin A = 2 \sin C \sin A$, 于是 $\sqrt{3} = 2 \sin C$, 即 $\sin C = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

又因为角 C 是锐角,所以 $C = \frac{\pi}{3}$.

(2).由 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ab \sin C$ 可知 $ab = 6$.由余弦定理 $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ 可知 $a^2 + b^2 = 13$.于是

$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab = 25$,即 $a+b = 5$.

答案: (1). $\frac{\pi}{3}$; (2). 5.

18.某工厂对一批共 50 件的机器零件进行分类检测,其重量 (克) 统计如下:

重量段	$[80,85)$	$[85,90)$	$[90,95)$	$[95,100]$
件数	5	m	12	n

规定重量在 82 克及以下的为甲型,重量在 85 克及以上的为乙型,已知该批零件有甲型 2 件.

(1)从该批零件中任选 1 件,若选出的零件重量在 $[95,100]$ 内的概率为 0.26,求 m 得值;

(2)从重量在 $[80,85)$ 的 5 件零件中,任选 2 件,求其中恰好有 1 件为甲型的概率.

考点:统计与概率

解析:(1).由已知可知 $\frac{n}{50} = 0.26$, $5 + m + 12 + n = 50$,解得 $n = 13$, $m = 20$.

(2).设事件“从重量在 $[80,85)$ 的 5 件零件中,任选 2 件,其中恰好有 1 件为甲型”为事件 A .

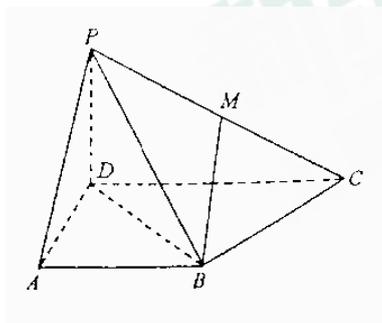
$$P(A) = \frac{C_2^1 C_3^1}{C_5^2} = \frac{3}{5}.$$

答案:(1). 20;(2). $\frac{3}{5}$.

19. 如图, 已知四棱锥的侧棱 $PD \perp$ 底面 $ABCD$, 底面 $ABCD$ 是直角梯形, $AD \perp CD, AB \parallel CD, AB = AD = \frac{1}{2}CD = 2$.

(1) 求证: $BC \perp$ 平面 BDP ;

(2) 若侧棱 PC 与底面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\frac{1}{2}$, 点 M 为侧棱 PC 的中点, 求一面直线 BM 与 PA 所成角的余弦值



证明:(1) $\because PD \perp$ 底面 $ABCD \therefore PD \perp BC$.

又底面 $ABCD$ 是直角梯形, $AD \perp CD, AB \parallel CD, AB = AD = \frac{1}{2}CD = 2$.

故 $BD \perp BC$. 从而 $BC \perp$ 平面 BDP .

解:(2) $\because PD \perp$ 底面 $ABCD$, 侧棱 PC 与底面 $ABCD$ 所成角的正切值为 $\frac{1}{2}$,

$\therefore \tan \angle PCD = \frac{1}{2} \therefore PD = 2$.

连接 AC , 设 AC 的中点为 O , 连接 BO, MO . 由点 M 为侧棱 PC 的中点知直线 BM 与 PA 所成角即为直线 BM 与 MO 所成角即 $\angle BMO$.

在三角形 BMO 中, $MO = \sqrt{2}$, $BM = \sqrt{5}$, $BO = 1$. 利用余弦定理知 $\cos \angle BMO = \frac{BM^2 + MO^2 - BO^2}{2 \cdot BM \cdot MO} = \frac{3\sqrt{10}}{10}$.

20. 已知椭圆 $M: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{3} = 1 (a > 0)$ 的一个焦点为 $F(-1, 0)$, 左右顶点分别为 A, B . 经过点 F 的直线 l 与椭圆 M 交于 C, D 两点.

(1) 当直线 l 的倾斜角为 45° 时, 求线段 CD 的长;

(2) 记 $\triangle DABD$ 与 $\triangle DABC$ 的面积分别为 S_1 和 S_2 , 求 $|S_1 - S_2|$ 的最大值.

解: (1) 根据题意有 $c = 1$, 故 $a^2 = 3 + 1 = 4$, 所以 $a = 2$, 则椭圆的方程为

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

直线 l 的斜率为 1, 方程为 $y = x + 1$. 设 $C(x_1, y_1), D(x_2, y_2)$, 联立 $y = x + 1$ 和 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ 消去 x 得

$$7x^2 + 8x - 8 = 0.$$

$$\therefore x_1 + x_2 = -\frac{8}{7}, x_1 x_2 = -\frac{8}{7}.$$

$$\therefore CD = \sqrt{1+1^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{2} \cdot \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{12\sqrt{2}}{7}.$$

(2) 由 (1) 知 $|AB| = 4$, 所以 $S_1 = 2|y_2|, S_2 = 2|y_1|$,

$$|S_1 - S_2| = 2||y_2| - |y_1|| = 2|y_1 + y_2|.$$

若直线的斜率不存在, 则 $S_1 = S_2$. 若直线的斜率存在, 设为 k , 直线方程为 $y = k(x + 1) (k \neq 0)$. 将其代入椭圆

方程, 消去 x 得 $(3 + 4k^2)y^2 - 6ky - 9k^2 = 0$, 则

$$y_1 + y_2 = \frac{6k}{3 + 4k^2}, \text{ 从而}$$

$$|S_1 - S_2| = 2|y_1 + y_2| = 2 \left| \frac{6k}{3 + 4k^2} \right| = 2 \left| \frac{6}{\frac{3}{k} + 4k} \right| \leq 2 \frac{6}{2\sqrt{\frac{3}{k} \cdot 4k}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 当且仅当 } k = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 时等号成立.}$$

所以 $|S_1 - S_2|$ 的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21. 已知函数 $f(x) = 2\ln x - x^2 + ax$ ($a \in \mathbb{R}$)

(1) 若函数 $f(x)$ 的图象在 $x = 2$ 处切线的斜率为 -1, 且不等式 $f(x) \geq 2x + m$ 在 $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ 上有解, 求实数 m 的取值范围;

(2) 若函数 $f(x)$ 的图象与 x 轴有两个不同的交点 $A(x_1, 0), B(x_2, 0)$, 且 $0 < x_1 < x_2$, 求证: $f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) < 0$

考察知识点：导数的几何意义，函数的极值及应用，不等式证明；

重难点：利用导数解决恒成立问题；

解析：(1) 由 $f'(x) = \frac{2}{x} - 2x + a$, 得切线的斜率 $k = f'(2) = a - 3 = -1$,

$\therefore a = 2$, 故 $f(x) = 2\ln x - x^2 + 2x$,

由 $f(x) \geq 2x + m$, 得: $m \leq 2\ln x - x^2$,

即 $m \leq (2\ln x - x^2)_{\max}$,

令 $g(x) = 2\ln x - x^2$,

$\because x \in \left[\frac{1}{e}, e\right]$, $g'(x) = 0$ 时 $x = 1$, 故 $g(x)$ 在 $x = 1$ 取得最大值为 $g(1) = -1$,

$\therefore m \leq -1$.

(2) 由题意, 方程 $2\ln x - x^2 + ax = 0$ 的两根为 x_1, x_2 , 则 $\begin{cases} 2\ln x_1 - x_1^2 + ax_1 = 0 \\ 2\ln x_2 - x_2^2 + ax_2 = 0 \end{cases}$

$$a = (x_1 + x_2) - \frac{2(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_1 - x_2},$$

$$\text{又 } f'(x) = \frac{2}{x} - 2x + a,$$

$$\text{则 } f'\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \frac{4}{(x_1 + x_2)} - \frac{2(\ln x_1 - \ln x_2)}{x_1 - x_2},$$

设 $t = \frac{x_1}{x_2}$, $0 < t < 1$, 即证 $h(t) = \frac{2(1-t)}{t+1} + \ln t < 0$ 在 $0 < t < 1$ 上恒成立,

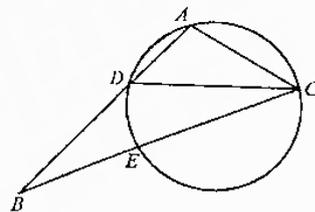
$$h'(t) = \frac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}, \therefore h'(t) > 0, h(t) \text{ 在 } 0 < t < 1 \text{ 上为增函数},$$

所以 $h(t) < h(1) = 0$, 得证。

22. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, CD 是 $\angle ACB$ 的角平分线, $\triangle ADC$ 的外接圆交 BC 与点 E , $AB = 2AC$.

(1) 求证: $BE = 2AD$;

(2) 当 $AC = 3, EC = 6$ 时, 求 AD 的长.



解析: (1) 连接 DE , $\because ACED$ 是圆内接四边形,

$$\therefore \angle BDE = \angle BCA$$

$$\text{又 } \because \angle DBE = \angle CBA, \therefore \triangle DBE \sim \triangle CBA, \text{ 即有 } \frac{BE}{BA} = \frac{DE}{DA}$$

$$\text{又 } \because AB = 2AC, \therefore BE = 2DE \quad \text{又 } \because CD \text{ 是 } \angle ACB \text{ 的角平分线}$$

$$\therefore AD = DE, \therefore BE = 2AD$$

(2) 由条件知 $AB = 2AC = 6$, 设 $AD = t$, 则 $BE = 2t, BC = 2t + 6$

根据割线定理得 $BD \cdot BA = BE \cdot BC$, 即 $(6-t) \times t = 2t \cdot (2t+6)$

即 $2t^2 + 9t - 18 = 0$, 解得 $t = \frac{3}{2}$ 或 $t = -6$ (舍去), 则 $AD = \frac{3}{2}$

答案： $AD = \frac{3}{2}$

23. 在平面直角坐标系 xOy 中, 以 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立的极坐标系中, 直线 l 的极坐标方程为 $\rho = \frac{p}{4}(r \hat{=} R)$,

程为 $\rho = \frac{p}{4}(r \hat{=} R)$,

曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos q \\ y = \sin q \end{cases}$.

(1) 写出直线 l 及曲线 C 的直角坐标方程;

(2) 过点 M 平行于直线 l 的直线与曲线 C 交于 A, B 两点, 若 $|MA| \cdot |MB| = \frac{8}{3}$, 求点 M 轨迹的直角坐标方程.

解析: (1) 由题得直线 l 的直角坐标方程为 $y = x$, 曲线 C 的直角坐标方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$.

(2) 设点 $M(x_0, y_0)$, 则过点 $M(x_0, y_0)$ 且与直线 l 平行的直线 l' 的参数方程为 $\begin{cases} x = x_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = y_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases}$ (t 为参

数), 由题, 将直线 l' 的参数方程代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 整理得 $\frac{3}{2}t^2 + (\sqrt{2}x_0 + 2\sqrt{2}y_0)t + (x_0^2 + 2y_0^2 - 2) = 0$

则 $t_1 \cdot t_2 = \frac{x_0^2 + 2y_0^2 - 2}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}(x_0^2 + 2y_0^2 - 2)$

$\therefore |MA| \cdot |MB| = \frac{2}{3}|x_0^2 + 2y_0^2 - 2|$, $\because |MA| \cdot |MB| = \frac{8}{3}$, $\therefore \frac{2}{3}|x_0^2 + 2y_0^2 - 2| = \frac{8}{3}$, $\therefore |x_0^2 + 2y_0^2 - 2| = 4$,

$\therefore x_0^2 + 2y_0^2 = 6$ 或 $x_0^2 + 2y_0^2 = -2$ (舍去)

$\therefore \frac{x_0^2}{6} + \frac{y_0^2}{3} = 1$, 表示椭圆.

取 $y = x + m$ 代入 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ 得 $3x^2 + 4mx + 2m^2 - 2 = 0$ ，由 $\Delta > 0$ 得 $-\sqrt{3} < m < \sqrt{3}$

所以，点 M 轨迹是椭圆 $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{3} = 1$ 夹在平行直线 $y = x \pm \sqrt{3}$ 之间的两段椭圆弧。

24. 已知函数 $f(x) = |2x - a| + |2x + 3|$, $g(x) = |x - 1| + 2$

(1) 解不等式: $|g(x)| < 5$;

(2) 若对于任意的 $x_1 \in R$, 都有 $x_2 \in R$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

答案: $x \in (-2, 4)$, $a \geq -1$ 或 $a \leq -5$

考点: 绝对值不等式的求解和含参范围的求解

解析: (1) 因为 $|x - 1| + 2 < 5$, 得 $-5 < |x - 1| + 2 < 5$, 所以, $-7 < |x - 1| < 3$, $-2 < x < 4$, 故 $x \in (-2, 4)$.

(2) 对于任意的 $x_1 \in R$, 都有 $x_2 \in R$, 使得 $f(x_1) = g(x_2)$ 成立, 可知 $\{y | y = f(x)\} \subseteq \{y | y = g(x)\}$

$f(x) = |2x - a| + |2x + 3| \geq |2x - a - (2x + 3)| = |a + 3|$, $g(x) = |x - 1| + 2 \geq 2$

所以, $|a + 3| \geq 2$

$a \geq -1$ 或 $a \leq -5$