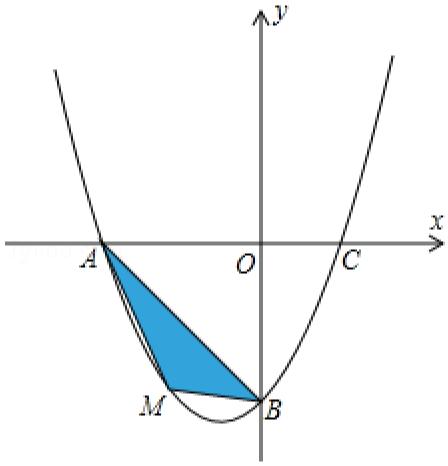
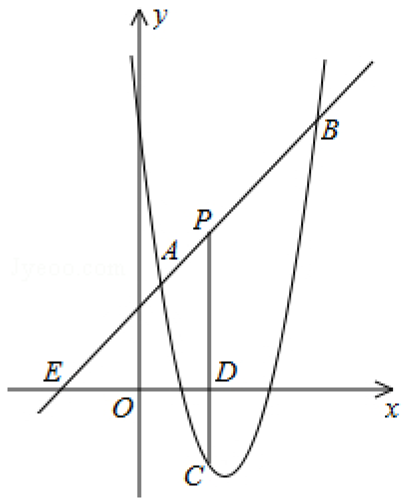
2016年中考数学压轴题汇编

一．解答题（共30小题）

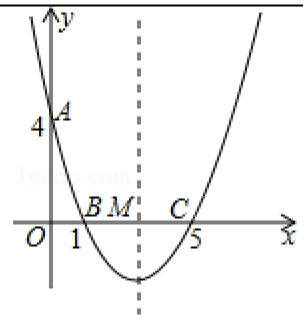
1．（2016•贵阳模拟）在平面直角坐标系中，已知抛物线经过A（﹣4，0），B（0，﹣4），C（2，0）三点．
（1）求抛物线的解析式；
（2）若点M为第三象限内抛物线上一动点，点M的横坐标为m，△AMB的面积为S．求S关于m的函数关系式，并求出S的最大值．
（3）若点P是抛物线上的动点，点Q是直线y=﹣x上的动点，判断有几个位置能够使得点P、Q、B、O为顶点的四边形为平行四边形，直接写出相应的点Q的坐标．



2．（2015•枣庄）如图，直线y=x+2与抛物线$y=ax^2+bx+6$（a≠0）相交于A（$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{2}$）和B（4，m），点P是线段AB上异于A、B的动点，过点P作PC⊥x轴于点D，交抛物线于点C．
（1）求抛物线的解析式；
（2）是否存在这样的P点，使线段PC的长有最大值？若存在，求出这个最大值；若不存在，请说明理由；
（3）求△PAC为直角三角形时点P的坐标．



3．（2015•酒泉）如图，在直角坐标系中，抛物线经过点A（0，4），B（1，0），C（5，0），其对称轴与x轴相交于点M．（1）求抛物线的解析式和对称轴；
（2）在抛物线的对称轴上是否存在一点P，使△PAB的周长最小？若存在，请求出点P的坐标；若不存在，请说明理由；（3）连接AC，在直线AC的下方的抛物线上，是否存在一点N，使△NAC的面积最大？若存在，请求出点N的坐标；若不存在，请说明理由．

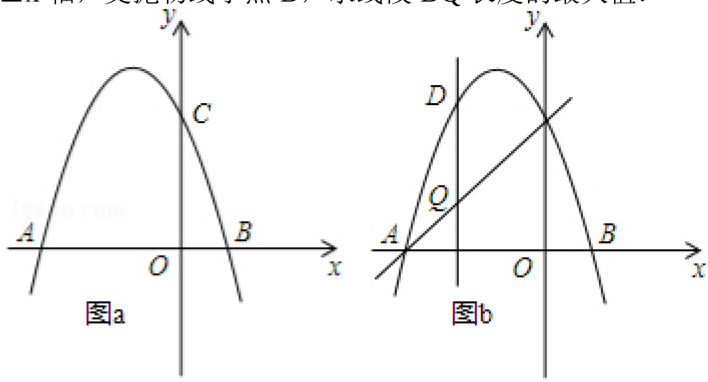


4.（2015•阜新）如图，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 交 x 轴于点 A（﹣3，0）和点 B，交 y 轴于点 C（0，3）.

（1）求抛物线的函数表达式；

（2）若点 P 在抛物线上，且 $S_{\triangle AOP}=4S_{BOC}$，求点 P 的坐标；

（3）如图 b，设点 Q 是线段 AC 上的一动点，作 DQ⊥x 轴，交抛物线于点 D，求线段 DQ 长度的最大值.

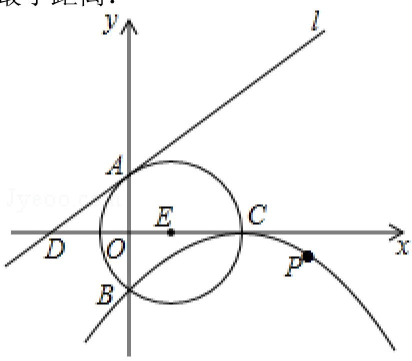


5.（2015•济宁）如图，⊙E 的圆心 E（3，0），半径为 5，⊙E 与 y 轴相交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的上方），与 x 轴的正半轴交于点 C，直线 l 的解析式为 $y=\frac{3}{4}x+4$，与 x 轴相交于点 D，以点 C 为顶点的抛物线过点 B.

（1）求抛物线的解析式；

（2）判断直线 l 与⊙E 的位置关系，并说明理由；

（3）动点 P 在抛物线上，当点 P 到直线 l 的距离最小时．求出点 P 的坐标及最小距离.

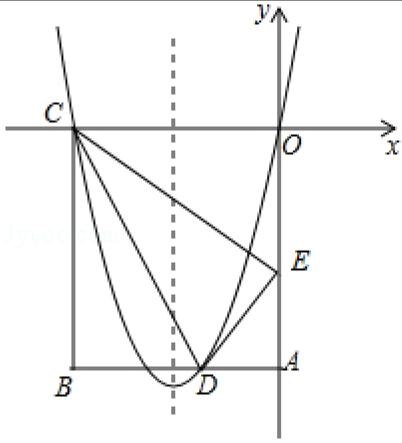


6.（2015•荆门）如图，在矩形 OABC 中，OA=5，AB=4，点 D 为边 AB 上一点，将△BCD 沿直线 CD 折叠，使点 B 恰好落在边 OA 上的点 E 处，分别以 OC，OA 所在的直线为 x 轴，y 轴建立平面直角坐标系.

（1）求 OE 的长及经过 O，D，C 三点抛物线的解析式；

（2）一动点 P 从点 C 出发，沿 CB 以每秒 2 个单位长度的速度向点 B 运动，同时动点 Q 从 E 点出发，沿 EC 以每秒 1 个单位长度的速度向点 C 运动，当点 P 到达点 B 时，两点同时停止运动，设运动时间为 t 秒，当 t 为何值时，DP=DQ；

（3）若点 N 在（1）中抛物线的对称轴上，点 M 在抛物线上，是否存在这样的点 M 与点 N，使 M，N，C，E 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，请求出 M 点坐标；若不存在，请说明理由.



7.（2015•盘锦）如图 1，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 交 x 轴于 A（﹣1，0）和 B（5，0）两点，交 y 轴于点 C，点 D 是线段 OB 上一动点，连接 CD，将线段 CD 绕点 D 顺时针旋转 90°得到线段 DE，过点 E 作直线 l⊥x 轴于 H，过点 C 作 CF⊥l 于 F．

（1）求抛物线解析式；

（2）如图 2，当点 F 恰好在抛物线上时，求线段 OD 的长；

（3）在（2）的条件下：

①连接 DF，求 tan∠ FDE 的值；

②试探究在直线 l 上，是否存在点 G，使∠ EDG=45°？若存在，请直接写出点 G 的坐标；若不存在，请说明理由．

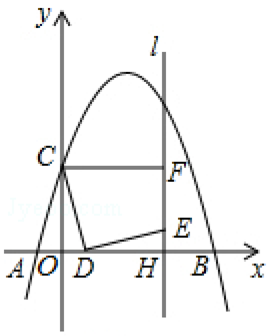


图1

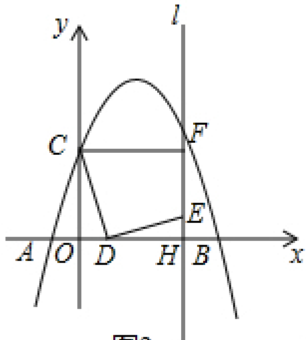
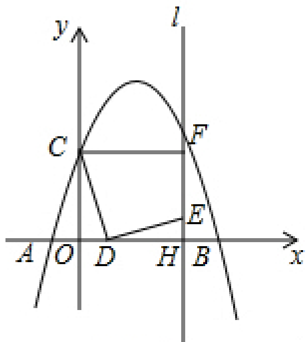


图2



备用图

8.（2015•益阳）已知抛物线 E_1：$y=x^2$ 经过点 A（1，m），以原点为顶点的抛物线 E_2 经过点 B（2，2），点 A、B 关于 y 轴的对称点分别为点 A′，B′．

（1）求 m 的值及抛物线 E_2 所表示的二次函数的表达式；

（2）如图 1，在第一象限内，抛物线 E_1 上是否存在点 Q，使得以点 Q、B、B′为顶点的三角形为直角三角形？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）如图 2，P 为第一象限内的抛物线 E_1 上与点 A 不重合的一点，连接 OP 并延长与抛物线 E_2 相交于点 P′，求△ PAA′与△ P′BB′的面积之比．

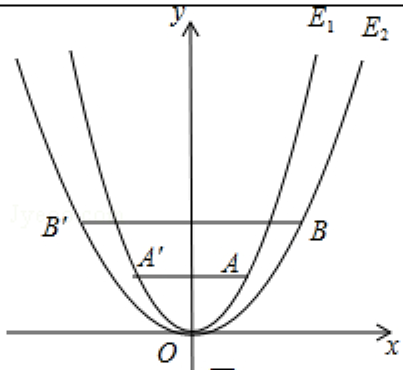


图1

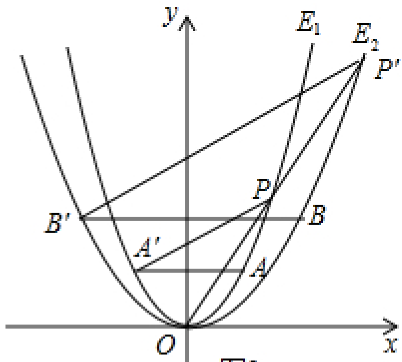


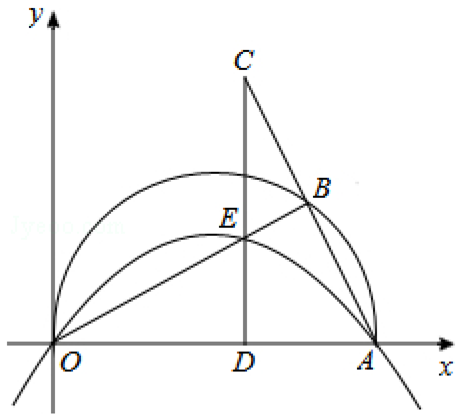
图2

9.（2015•徐州）如图，在平面直角坐标系中，点 A（10，0），以 OA 为直径在第一象限内作半圆，B 为半圆上一点，连接 AB 并延长至 C，使 BC=AB，过 C 作 CD⊥x 轴于点 D，交线段 OB 于点 E，已知 CD=8，抛物线经过 O、E、A 三点．

（1）∠OBA=____________°．

（2）求抛物线的函数表达式．

（3）若 P 为抛物线上位于第一象限内的一个动点，以 P、O、A、E 为顶点的四边形面积记作 S，则 S 取何值时，相应的点 P 有且只有 3 个？



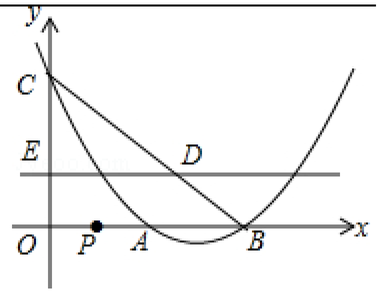
10.（2015•乌鲁木齐）抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+2$ 与 x 轴交于 A，B 两点（OA＜OB），与 y 轴交于点 C．

（1）求点 A，B，C 的坐标；

（2）点 P 从点 O 出发，以每秒 2 个单位长度的速度向点 B 运动，同时点 E 也从点 O 出发，以每秒 1 个单位长度的速度向点 C 运动，设点 P 的运动时间为 t 秒（0＜t＜2）．

①过点 E 作 x 轴的平行线，与 BC 相交于点 D（如图所示），当 t 为何值时，$\frac{1}{OP}+\frac{1}{ED}$的值最小，求出这个最小值并写出此时点 E，P 的坐标；

②在满足①的条件下，抛物线的对称轴上是否存在点 F，使△EFP 为直角三角形？若存在，请直接写出点 F 的坐标；若不存在，请说明理由．



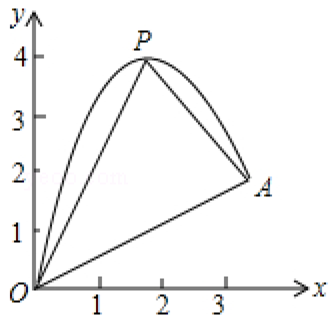
11．（2015•佛山）如图，一小球从斜坡 O 点处抛出，球的抛出路线可以用二次函数 $y=-x^2+4x$ 刻画，斜坡可以用一次函数 $y=\frac{1}{2}x$ 刻画．

（1）请用配方法求二次函数图象的最高点 P 的坐标；

（2）小球的落点是 A，求点 A 的坐标；

（3）连接抛物线的最高点 P 与点 O、A 得△POA，求△POA 的面积；

（4）在 OA 上方的抛物线上存在一点 M（M 与 P 不重合），△MOA 的面积等于△POA 的面积．请直接写出点 M 的坐标．

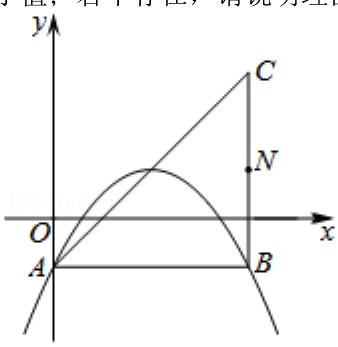


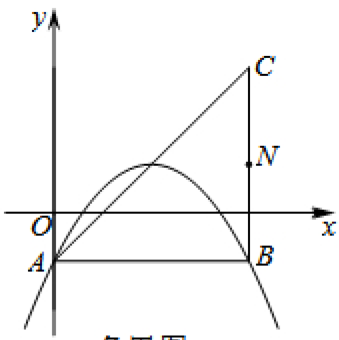
12．（2015•天水）在平面直角坐标系中，已知 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$（b、c 为常数）的顶点为 P，等腰直角三角形 ABC 的顶点 A 的坐标为（0，﹣1），点 C 的坐标为（4，3），直角顶点 B 在第四象限．

（1）如图，若抛物线经过 A、B 两点，求抛物线的解析式．

（2）平移（1）中的抛物线，使顶点 P 在直线 AC 上并沿 AC 方向滑动距离为$\sqrt{2}$时，试证明：平移后的抛物线与直线 AC 交于 x 轴上的同一点．

（3）在（2）的情况下，若沿 AC 方向任意滑动时，设抛物线与直线 AC 的另一交点为 Q，取 BC 的中点 N，试探究 NP+BQ 是否存在最小值？若存在，求出该最小值；若不存在，请说明理由．

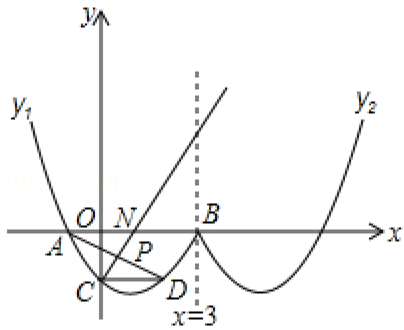




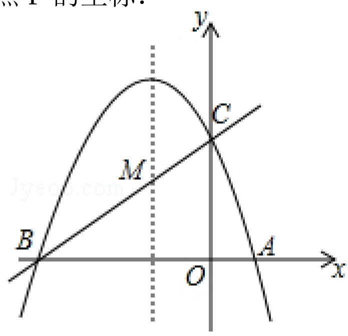
备用图

13．（2015•常德）如图，曲线 y_1 抛物线的一部分，且表达式为：$y_1=\frac{\sqrt{3}}{3}(x^2-2x-3)$（$x\le 3$）曲线 y_2 与曲线 y_1 关于直线 x=3 对称．

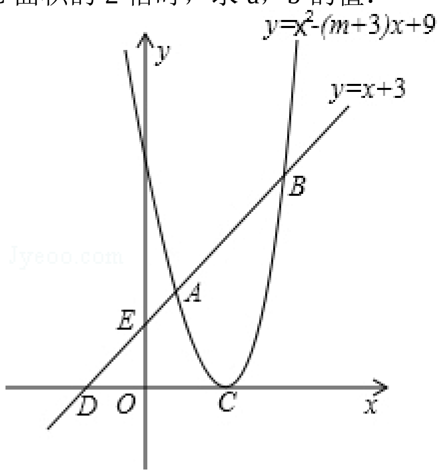
（1）求 A、B、C 三点的坐标和曲线 y_2 的表达式；
（2）过点 D 作 CD∥x 轴交曲线 y_1 于点 D，连接 AD，在曲线 y_2 上有一点 M，使得四边形 ACDM 为筝形（如果一个四边形的一条对角线被另一条对角线垂直平分，这样的四边形为筝形），请求出点 M 的横坐标；
（3）设直线 CM 与 x 轴交于点 N，试问在线段 MN 下方的曲线 y_2 上是否存在一点 P，使△PMN 的面积最大？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由．



14．（2015•自贡）如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$（$a\neq0$）的对称轴为直线 $x=-1$，且抛物线经过 A（1，0），C（0，3）两点，与 x 轴交于点 B.
（1）若直线 $y=mx+n$ 经过 B、C 两点，求直线 BC 和抛物线的解析式；
（2）在抛物线的对称轴 $x=-1$ 上找一点 M，使点 M 到点 A 的距离与到点 C 的距离之和最小，求出点 M 的坐标；
（3）设点 P 为抛物线的对称轴 $x=-1$ 上的一个动点，求使△BPC 为直角三角形的点 P 的坐标．

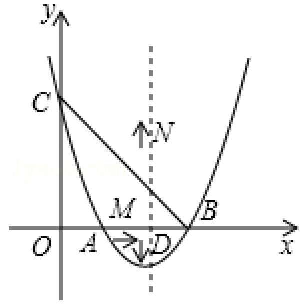


15．（2015•凉山州）如图，已知抛物线 $y=x^2-(m+3)x+9$ 的顶点 C 在 x 轴正半轴上，一次函数 $y=x+3$ 与抛物线交于 A、B 两点，与 x、y 轴交于 D、E 两点．
（1）求 m 的值．
（2）求 A、B 两点的坐标．
（3）点 P（a，b）（$-3<a<1$）是抛物线上一点，当△PAB 的面积是△ABC 面积的 2 倍时，求 a，b 的值．



16．（2015•铜仁市）如图，关于 x 的二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于点 A（1，0）和点 B 与 y 轴交于点 C（0，3），抛物线的对称轴与 x 轴交于点 D.
（1）求二次函数的表达式；

（2）在 y 轴上是否存在一点 P，使△PBC 为等腰三角形？若存在．请求出点 P 的坐标）；
（3）有一个点 M 从点 A 出发，以每秒 1 个单位的速度在 AB 上向点 B 运动，另一个点 N 从 点 D 与点 M 同时出发，以每秒 2 个单位的速度在抛物线的对称轴上运动，当点 M 到达点 B 时，点 M、N 同时停止运动，问点 M、N 运动到何处时，△MNB 面积最大，试求出最大面积．



17．（2015•资阳）已知直线 y=kx+b（k≠0）过点 F（0，1），与抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 相交于 B、C 两点．

（1）如图 1，当点 C 的横坐标为 1 时，求直线 BC 的解析式；
（2）在（1）的条件下，点 M 是直线 BC 上一动点，过点 M 作 y 轴的平行线，与抛物线交于点 D，是否存在这样的点 M，使得以 M、D、O、F 为顶点的四边形为平行四边形？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由；
（3）如图 2，设 B（m．n）（m<0），过点 E（0．﹣1）的直线 l∥x 轴，BR⊥l 于 R，CS⊥l 于 S，连接 FR、FS．试判断△RFS 的形状，并说明理由．

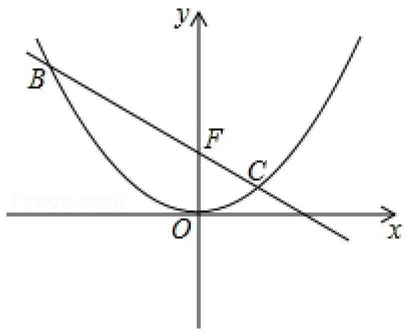


图1

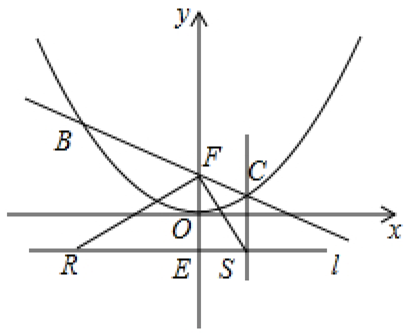
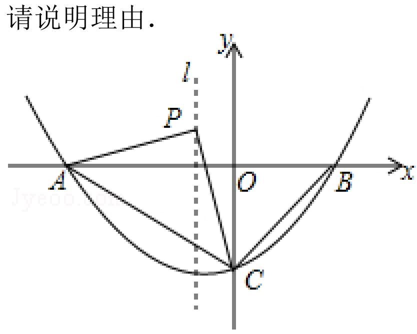


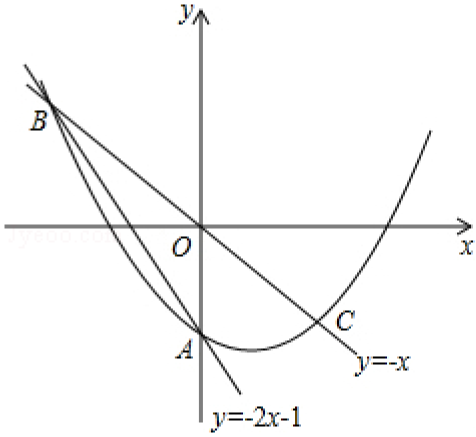
图2

18．（2015•苏州）如图，已知二次函数 $y=x^2+(1-m)x-m$（其中 0<m<1）的图象与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C，对称轴为直线 l．设 P 为对称轴 l 上的点，连接 PA、PC，PA=PC
（1）∠ABC 的度数为____________；
（2）求 P 点坐标（用含 m 的代数式表示）；
（3）在坐标轴上是否存在着点 Q（与原点 O 不重合），使得以 Q、B、C 为顶点的三角形与△PAC 相似，且线段 PQ 的长度最小？如果存在，求出所有满足条件的点 Q 的坐标；如果不存在，请说明理由．

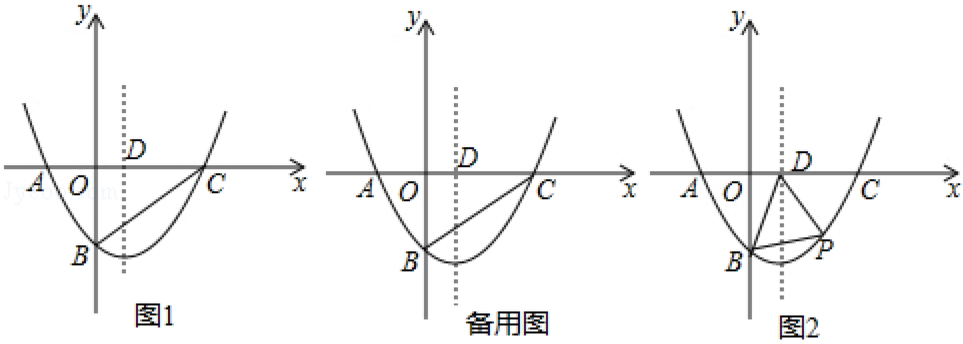


19．（2015•临沂）在平面直角坐标系中，O 为原点，直线 y=﹣2x﹣1 与 y 轴交于点 A，与直线 y=﹣x 交于点 B，点 B 关于原点的对称点为点 C．

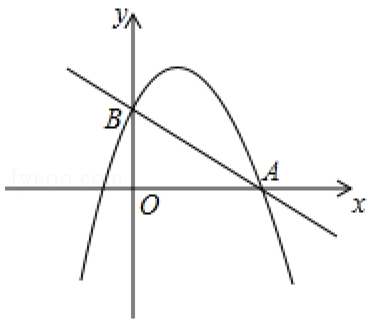
（1）求过 A，B，C 三点的抛物线的解析式；
（2）P 为抛物线上一点，它关于原点的对称点为 Q.
①当四边形 PBQC 为菱形时，求点 P 的坐标；
②若点 P 的横坐标为 t（﹣1<t<1），当 t 为何值时，四边形 PBQC 面积最大？并说明理由.



20.（2015•巴中）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y=ax^2+bx-4$（a≠0）的图象与 x 轴交于 A（﹣2，0）、C（8，0）两点，与 y 轴交于点 B，其对称轴与 x 轴交于点 D.
（1）求该二次函数的解析式；
（2）如图 1，连结 BC，在线段 BC 上是否存在点 E，使得△CDE 为等腰三角形？若存在，求出所有符合条件的点 E 的坐标；若不存在，请说明理由；
（3）如图 2，若点 P（m，n）是该二次函数图象上的一个动点（其中 m>0，n<0），连结 PB，PD，BD，求△BDP 面积的最大值及此时点 P 的坐标.



21.（2015•黔东南州）如图，已知二次函数 $y_1=-x^2+\frac{13}{4}x+c$ 的图象与 x 轴的一个交点为 A（4，0），与 y 轴的交点为 B，过 A、B 的直线为 $y_2=kx+b$.
（1）求二次函数 y_1 的解析式及点 B 的坐标；
（2）由图象写出满足 $y_1<y_2$ 的自变量 x 的取值范围；
（3）在两坐标轴上是否存在点 P，使得△ABP 是以 AB 为底边的等腰三角形？若存在，求出 P 的坐标；若不存在，说明理由.



22.（2015•孝感）在平面直角坐标系中，抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 A，B，与 y 轴交于点 C，直线 $y=x+4$ 经过 A，C 两点．

（1）求抛物线的解析式；

（2）在 AC 上方的抛物线上有一动点 P．

①如图 1，当点 P 运动到某位置时，以 AP，AO 为邻边的平行四边形第四个顶点恰好也在抛物线上，求出此时点 P 的坐标；

②如图 2，过点 O，P 的直线 $y=kx$ 交 AC 于点 E，若 PE：OE=3：8，求 k 的值．

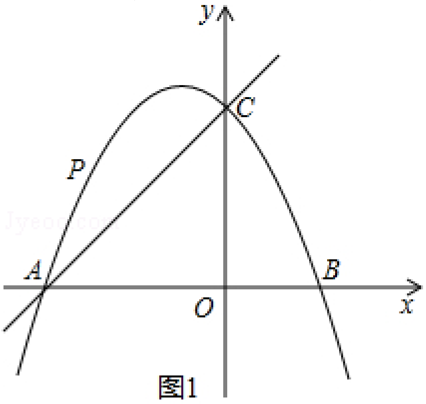


图1

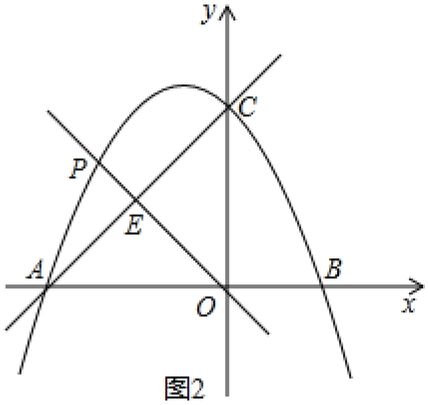


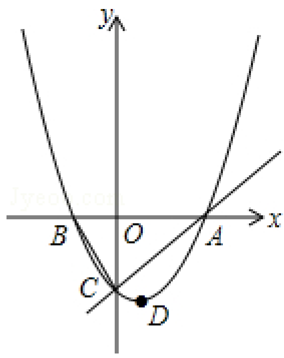
图2

23.（2015•眉山）如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点 D 的坐标为（1，$-\frac{9}{2}$），且与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于 C 点，A 点的坐标为（4，0）．P 点是抛物线上的一个动点，且横坐标为 m．

（l）求抛物线所对应的二次函数的表达式；

（2）若动点 P 满足∠PAO 不大于 45°，求 P 点的横坐标 m 的取值范围；

（3）当 P 点的横坐标 m＜0 时，过 P 点作 y 轴的垂线 PQ，垂足为 Q．问：是否存在 P 点，使∠QPO=∠BCO？若存在，请求出 P 点的坐标；若不存在，请说明理由．

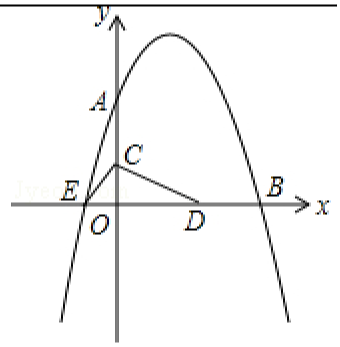


24.（2015•桂林）如图，已知抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 与坐标轴分别交于点 A（0，8）、B（8，0）和点 E，动点 C 从原点 O 开始沿 OA 方向以每秒 1 个单位长度移动，动点 D 从点 B 开始沿 BO 方向以每秒 1 个单位长度移动，动点 C、D 同时出发，当动点 D 到达原点 O 时，点 C、D 停止运动．

（1）直接写出抛物线的解析式：____________；

（2）求△CED 的面积 S 与 D 点运动时间 t 的函数解析式；当 t 为何值时，△CED 的面积最大？最大面积是多少？

（3）当△CED 的面积最大时，在抛物线上是否存在点 P（点 E 除外），使△PCD 的面积等于△CED 的最大面积？若存在，求出 P 点的坐标；若不存在，请说明理由．

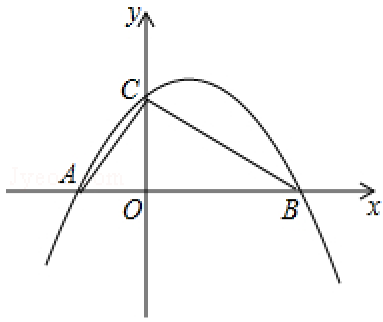


25.（2015•遂宁）如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 A（﹣2，0），B（4，0），C（0，3）三点．

（1）求该抛物线的解析式；

（2）在 y 轴上是否存在点 M，使△ACM 为等腰三角形？若存在，请直接写出所有满足要求的点 M 的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）若点 P（t，0）为线段 AB 上一动点（不与 A，B 重合），过 P 作 y 轴的平行线，记该直线右侧与△ABC 围成的图形面积为 S，试确定 S 与 t 的函数关系式．

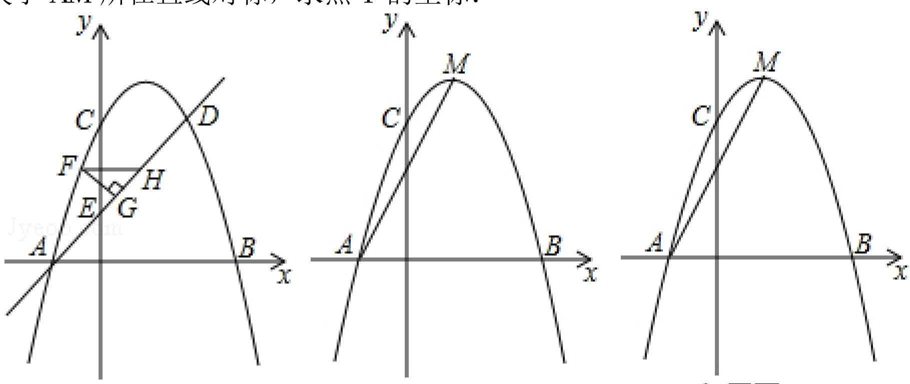


26.（2015•重庆）如图，抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左边），与 y 轴交于点 C，点 D 和点 C 关于抛物线的对称轴对称，直线 AD 与 y 轴交于点 E．

（1）求直线 AD 的解析式；

（2）如图 1，直线 AD 上方的抛物线上有一点 F，过点 F 作 FG⊥AD 于点 G，作 FH 平行于 x 轴交直线 AD 于点 H，求△FGH 周长的最大值；

（3）点 M 是抛物线的顶点，点 P 是 y 轴上一点，点 Q 是坐标平面内一点，以 A，M，P，Q 为顶点的四边形是以 AM 为边的矩形．若点 T 和点 Q 关于 AM 所在直线对称，求点 T 的坐标．



备用图1　　备用图2

27.（2015•兰州）已知二次函数 $y=ax^2$ 的图象经过点（2，1）．

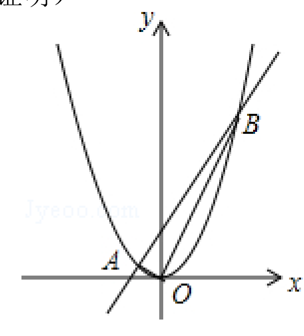
（1）求二次函数 $y=ax^2$ 的解析式；

（2）一次函数 $y=mx+4$ 的图象与二次函数 $y=ax^2$ 的图象交于点 A（x_1、y_1）、B（x_2、y_2）两点．

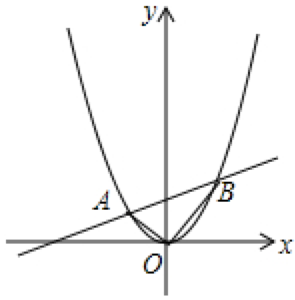
①当 m=$\frac{3}{2}$时（图①），求证：△AOB 为直角三角形；

②试判断当 m≠$\frac{3}{2}$时（图②），△AOB 的形状，并证明；

（3）根据第（2）问，说出一条你能得到的结论．（不要求证明）



图①



图②

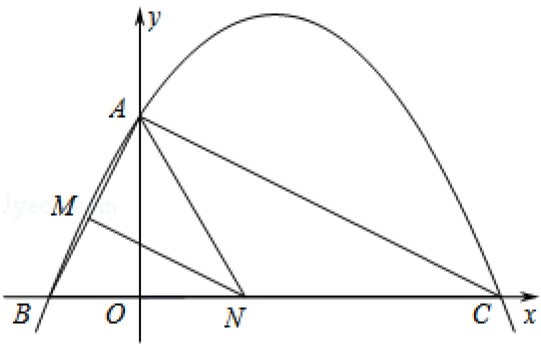
28．（2015•丹东）如图，已知二次函数 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$ 的图象与 y 轴交于点 A（0，4），与 x 轴交于点 B、C，点 C 坐标为（8，0），连接 AB、AC．

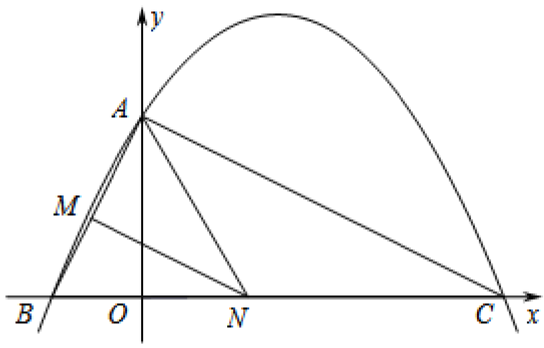
（1）请直接写出二次函数 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$ 的表达式；

（2）判断△ABC 的形状，并说明理由；

（3）若点 N 在 x 轴上运动，当以点 A、N、C 为顶点的三角形是等腰三角形时，请直接写出此时点 N 的坐标；

（4）若点 N 在线段 BC 上运动（不与点 B、C 重合），过点 N 作 NM∥AC，交 AB 于点 M，当△AMN 面积最大时，求此时点 N 的坐标．





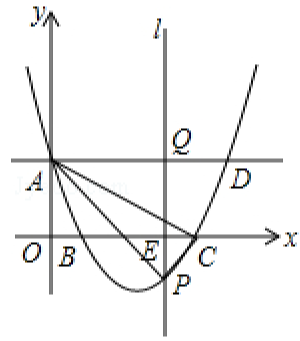
备用图

29.（2015•潍坊）如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=mx^2-8mx+4m+2$（$m>0$）与 y 轴的交点为 A，与 x 轴的交点分别为 B（x_1，0），C（x_2，0），且 $x_2-x_1=4$，直线 AD∥x 轴，在 x 轴上有一动点 E（t，0）过点 E 作平行于 y 轴的直线 l 与抛物线、直线 AD 的交点分别为 P、Q.

（1）求抛物线的解析式；

（2）当 $0<t\le 8$ 时，求△APC 面积的最大值；

（3）当 $t>2$ 时，是否存在点 P，使以 A、P、Q 为顶点的三角形与△AOB 相似？若存在，求出此时 t 的值；若不存在，请说明理由.

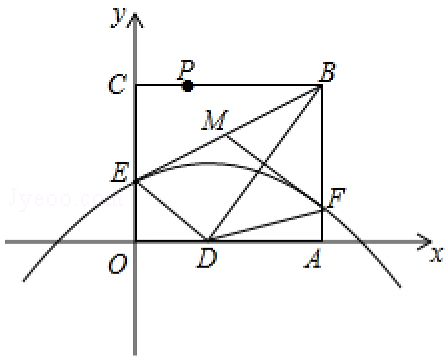


30.（2015•珠海）如图，折叠矩形 OABC 的一边 BC，使点 C 落在 OA 边的点 D 处，已知折痕 $BE=5\sqrt{5}$，且 $\frac{OD}{OE}=\frac{4}{3}$，以 O 为原点，OA 所在的直线为 x 轴建立如图所示的平面直角坐标系，抛物线 l：$y=-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}x+c$ 经过点 E，且与 AB 边相交于点 F.

（1）求证：△ABD∽△ODE；

（2）若 M 是 BE 的中点，连接 MF，求证：MF⊥BD；

（3）P 是线段 BC 上一点，点 Q 在抛物线 l 上，且始终满足 PD⊥DQ，在点 P 运动过程中，能否使得 PD=DQ？若能，求出所有符合条件的 Q 点坐标；若不能，请说明理由.



2015 年中考数学压轴题汇编（1）

参考答案与试题解析

一．解答题（共 30 小题）

1．（2016•贵阳模拟）在平面直角坐标系中，已知抛物线经过 A（－4，0），B（0，－4），C（2，0）三点．

（1）求抛物线的解析式；

（2）若点 M 为第三象限内抛物线上一动点，点 M 的横坐标为 m，△AMB 的面积为 S．求 S 关于 m 的函数关系式，并求出 S 的最大值．

（3）若点 P 是抛物线上的动点，点 Q 是直线 y=－x 上的动点，判断有几个位置能够使得点 P、Q、B、O 为顶点的四边形为平行四边形，直接写出相应的点 Q 的坐标．

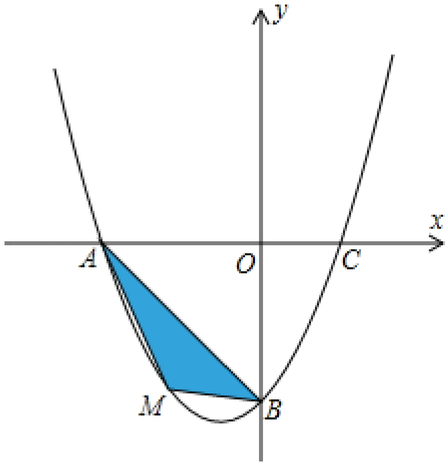
【考点】二次函数综合题；待定系数法求二次函数解析式．

【专题】压轴题．

【分析】（1）先假设出函数解析式，利用三点法求解函数解析式．

（2）设出 M 点的坐标，利用 $S=S_{\triangle AOM}+S_{\triangle OBM}-S_{\triangle AOB}$ 即可进行解答；

（3）当 OB 是平行四边形的边时，表示出 PQ 的长，再根据平行四边形的对边相等列出方程求解即可；当 OB 是对角线时，由图可知点 A 与 P 应该重合．



【解答】解：（1）设此抛物线的函数解析式为：

$y=ax^2+bx+c$（a≠0），

将 A（－4，0），B（0，－4），C（2，0）三点代入函数解析式得：

$\begin{cases}16a-4b+c=0\\c=-4\\4a+2b+c=0\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=1\\c=-4\end{cases}$，

所以此函数解析式为：$y=\frac{1}{2}x^2+x-4$；

（2）∵M 点的横坐标为 m，且点 M 在这条抛物线上，

∴M 点的坐标为：（m，$\frac{1}{2}m^2+m-4$），

∴ $S=S_{\triangle AOM}+S_{\triangle OBM}-S_{\triangle AOB}$

$=\frac{1}{2}\times4\times(-\frac{1}{2}m^2-m+4)+\frac{1}{2}\times4\times(-m)-\frac{1}{2}\times4\times4$

$=-m^2-2m+8-2m-8$

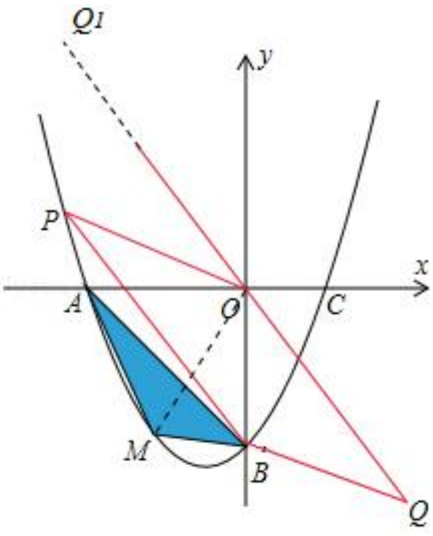
$=-m^2-4m$，

$=-(m+2)^2+4$，

∵ $-4<m<0$，

当 m=－2 时，S 有最大值为：S=－4+8=4．

答：m=－2 时 S 有最大值 S=4．



（3）设 P（x，$\frac{1}{2}x^2+x-4$）．

当 OB 为边时，根据平行四边形的性质知 PQ∥OB，且 PQ=OB，

∴Q 的横坐标等于 P 的横坐标，

又∵直线的解析式为 y=－x，

则 Q（x，－x）．

由 PQ=OB，得$|-x-(\frac{1}{2}x^2+x-4)|=4$，

解得 x=0，－4，$-2\pm2\sqrt{5}$．

x=0 不合题意，舍去．

如图，当 BO 为对角线时，知 A 与 P 应该重合，OP=4．四边形 PBQO 为平行四边形则 BQ=OP=4，Q 横坐标为 4，代入 y=－x 得出 Q 为（4，－4）．

由此可得 Q（－4，4）或（$-2+2\sqrt{5}$，$2-2\sqrt{5}$）或（$-2-2\sqrt{5}$，$2+2\sqrt{5}$）或（4，－4）．

【点评】本题考查了三点式求抛物线的方法，以及抛物线的性质和最值的求解方法．

2．（2015•枣庄）如图，直线 $y=x+2$ 与抛物线 $y=ax^2+bx+6$（$a\neq0$）相交于 A（$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{2}$）和 B（4，m），点 P 是线段 AB 上异于 A、B 的动点，过点 P 作 PC⊥x 轴于点 D，交抛物线于点 C．

（1）求抛物线的解析式；

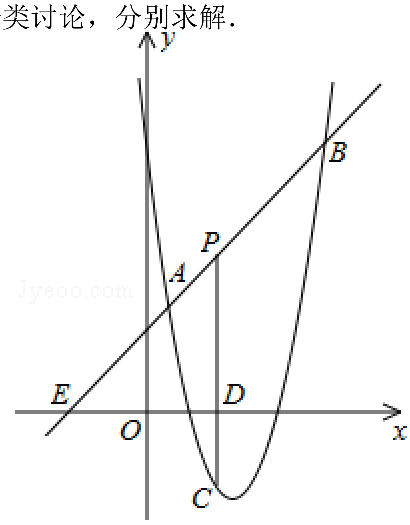
（2）是否存在这样的 P 点，使线段 PC 的长有最大值？若存在，求出这个最大值；若不存在，请说明理由；

（3）求△PAC 为直角三角形时点 P 的坐标．

【考点】二次函数综合题． 【专题】几何综合题；压轴题．

【分析】（1）已知 B（4，m）在直线 $y=x+2$ 上，可求得 m 的值，抛物线图象上的 A、B 两点坐标，可将其代入抛物线的解析式中，通过联立方程组即可求得待定系数的值．

（2）要弄清 PC 的长，实际是直线 AB 与抛物线函数值的差．可设出 P 点横坐标，根据直线 AB 和抛物线的解析式表示出 P、C 的纵坐标，进而得到关于 PC 与 P 点横坐标的函数关系式，根据函数的性质即可求出 PC 的最大值．（3）当△PAC 为直角三角形时，根据直角顶点的不同，有三种情形，需要分类讨论，分别求解．



【解答】解：（1）∵B（4，m）在直线 $y=x+2$ 上，

∴ $m=4+2=6$，∴B（4，6），∵A（$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{2}$）、B（4，6）在抛物线 $y=ax^2+bx+6$ 上，

∴ $\begin{cases}\frac{5}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^2a+\frac{1}{2}b+6\\ 6=16a+4b+6\end{cases}$，解得 $\begin{cases}a=2\\ b=-8\end{cases}$，

∴抛物线的解析式为 $y=2x^2-8x+6$．

（2）设动点 P 的坐标为（n，n+2），则 C 点的坐标为（n，$2n^2-8n+6$），

∴ $PC=(n+2)-(2n^2-8n+6)$，$=-2n^2+9n-4$，

$=-2\left(n-\frac{9}{4}\right)^2+\frac{49}{8}$，

∵PC＞0，∴当 $n=\frac{9}{4}$ 时，线段 PC 最大且为 $\frac{49}{8}$．

（3）∵△PAC 为直角三角形，i）若点 P 为直角顶点，则∠APC=90°．

由题意易知，PC∥y 轴，∠APC=45°，因此这种情形不存在；

ii）若点 A 为直角顶点，则∠PAC=90°．

如答图 3﹣1，过点 A（$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{2}$）作 AN⊥x 轴于点 N，则 $ON=\frac{1}{2}$，$AN=\frac{5}{2}$．

过点 A 作 AM⊥直线 AB，交 x 轴于点 M，则由题意易知，△AMN 为等腰直角三角形，

∴ $MN=AN=\frac{5}{2}$，∴ $OM=ON+MN=\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=3$，∴M（3，0）．

设直线 AM 的解析式为：$y=kx+b$，

则：$\begin{cases}\frac{1}{2}k+b=\frac{5}{2}\\ 3k+b=0\end{cases}$，解得 $\begin{cases}k=-1\\ b=3\end{cases}$，

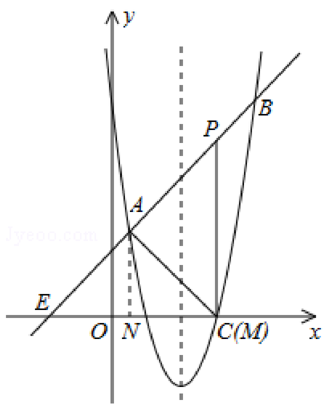
∴直线 AM 的解析式为：$y=-x+3$ ①

又抛物线的解析式为：$y=2x^2-8x+6$ ②

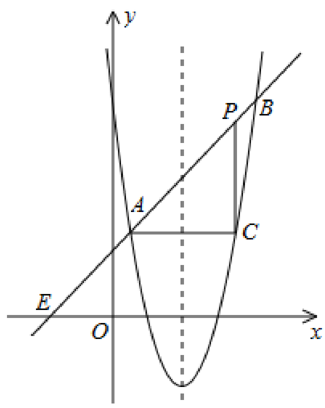
联立①②式，解得：$x=3$ 或 $x=\frac{1}{2}$（与点 A 重合，舍去）

∴C（3，0），即点 C、M 点重合．当 $x=3$ 时，$y=x+2=5$，

∴ P_1（3，5）；



答图3-1



答图3-2

iii）若点 C 为直角顶点，则∠ACP=90°．

∵ $y=2x^2-8x+6=2(x-2)^2-2$，∴抛物线的对称轴为直线 $x=2$．

如答图 3﹣2，作点 A（$\frac{1}{2}$，$\frac{5}{2}$）关于对称轴 $x=2$ 的对称点 C，

则点 C 在抛物线上，且 C（$\frac{7}{2}$，$\frac{5}{2}$）．当 $x=\frac{7}{2}$ 时，$y=x+2=\frac{11}{2}$．

∴ P_2（$\frac{7}{2}$，$\frac{11}{2}$）．∵ 点 P_1（3，5）、P_2（$\frac{7}{2}$，$\frac{11}{2}$）均在线段 AB 上，

∴ 综上所述，△ PAC 为直角三角形时，点 P 的坐标为（3，5）或（$\frac{7}{2}$，$\frac{11}{2}$）．

【点评】此题主要考查了二次函数解析式的确定、二次函数最值的应用以及直角三角形的判定、函数图象交点坐标的求法等知识．

3．（2015•酒泉）如图，在直角坐标系中，抛物线经过点 A（0，4），B（1，0），C（5，0），其对称轴与 x 轴相交于点 M．（1）求抛物线的解析式和对称轴；

（2）在抛物线的对称轴上是否存在一点 P，使△ PAB 的周长最小？若存在，请求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）连接 AC，在直线 AC 的下方的抛物线上，是否存在一点 N，使△ NAC 的面积最大？若存在，请求出点 N 的坐标；若不存在，请说明理由．

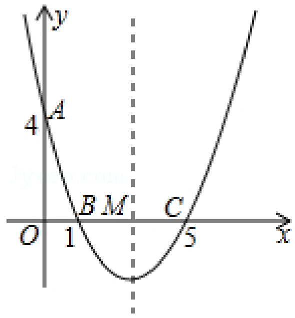
【考点】二次函数综合题．　【专题】压轴题．

【分析】（1）抛物线经过点 A（0，4），B（1，0），C（5，0），可利用两点式法设抛物线的解析式为 y=a（x﹣1）（x﹣5），代入 A（0，4）即可求得函数的解析式，则可求得抛物线的对称轴；

（2）点 A 关于对称轴的对称点 A′的坐标为（6，4），连接 BA′交对称轴于点 P，连接 AP，此时△ PAB 的周长最小，可求出直线 BA′的解析式，即可得出点 P 的坐标．

（3）在直线 AC 的下方的抛物线上存在点 N，使△ NAC 面积最大．设 N 点的横坐标为 t，此时点 N（t，$\frac{4}{5}t^2-\frac{24}{5}t+4$）（0＜t＜5），再求得直线 AC 的解析式，即可求得 NG 的长与△ ACN 的面积，由二次函数最大值的问题即可求得答案．

【解答】解：（1）根据已知条件可设抛物线的解析式为 y=a（x﹣1）（x﹣5），



把点 A（0，4）代入上式得：$a=\frac{4}{5}$，

∴ $y=\frac{4}{5}(x-1)(x-5)=\frac{4}{5}x^2-\frac{24}{5}x+4=\frac{4}{5}(x-3)^2-\frac{16}{5}$，

∴ 抛物线的对称轴是：x=3；

（2）P 点坐标为（3，$\frac{8}{5}$）．

理由如下：∵ 点 A（0，4），抛物线的对称轴是 x=3，

∴ 点 A 关于对称轴的对称点 A′的坐标为（6，4）

如图 1，连接 BA′交对称轴于点 P，连接 AP，此时△ PAB 的周长最小．

设直线 BA′的解析式为 y=kx+b，

把 A′（6，4），B（1，0）代入得$\begin{cases}4=6k+b\\0=k+b\end{cases}$，

解得$\begin{cases}k=\frac{4}{5}\\b=-\frac{4}{5}\end{cases}$，∴ $y=\frac{4}{5}x-\frac{4}{5}$，

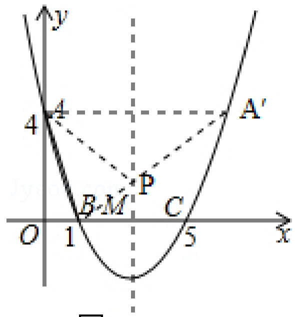


图1

∵ 点 P 的横坐标为 3，∴ $y=\frac{4}{5}\times3-\frac{4}{5}=\frac{8}{5}$，

∴ P（3，$\frac{8}{5}$）．

（3）在直线 AC 的下方的抛物线上存在点 N，使△ NAC 面积最大．

设 N 点的横坐标为 t，此时点 N（t，$\frac{4}{5}t^2-\frac{24}{5}t+4$）（0＜t＜5），

如图 2，过点 N 作 NG∥ y 轴交 AC 于 G；作 AD⊥NG 于 D，

由点 A（0，4）和点 C（5，0）可求出直线 AC 的解析式为：$y=-\frac{4}{5}x+4$，

把 x=t 代入得：$y=-\frac{4}{5}t+4$，则 G（t，$-\frac{4}{5}t+4$），

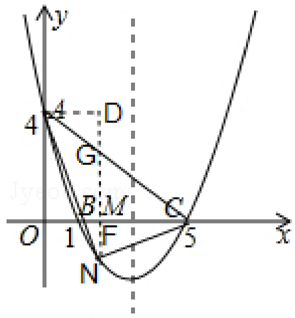


图2

此时：NG= $-\frac{4}{5}t+4-\left(\frac{4}{5}t^2-\frac{24}{5}t+4\right)=-\frac{4}{5}t^2+4t$，∵ AD+CF=CO=5，

∴ $S_{\triangle ACN}=S_{\triangle ANG}+S_{\triangle CGN}=\frac{1}{2}AD\times NG+\frac{1}{2}NG\times CF=\frac{1}{2}NG\bullet OC=\frac{1}{2}\times\left(-\frac{4}{5}t^2+4t\right)\times5=-2t^2+10t=-2\left(t-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$，

∴ 当 $t=\frac{5}{2}$时，△ CAN 面积的最大值为$\frac{25}{2}$，

由 $t=\frac{5}{2}$，得：$y=\frac{4}{5}t^2-\frac{24}{5}t+4=-3$，∴ N（$\frac{5}{2}$，－3）.

【点评】本题主要考查了二次函数与方程、几何知识的综合应用，解题的关键是方程思想与数形结合思想的灵活应用.

4.（2015•阜新）如图，抛物线 $y=-x^2+bx+c$ 交 x 轴于点 A（－3，0）和点 B，交 y 轴于点 C（0，3）.

（1）求抛物线的函数表达式；

（2）若点 P 在抛物线上，且 $S_{\triangle AOP}=4S_{BOC}$，求点 P 的坐标；

（3）如图 b，设点 Q 是线段 AC 上的一动点，作 DQ⊥x 轴，交抛物线于点 D，求线段 DQ 长度的最大值.

【考点】二次函数综合题. 【专题】压轴题.

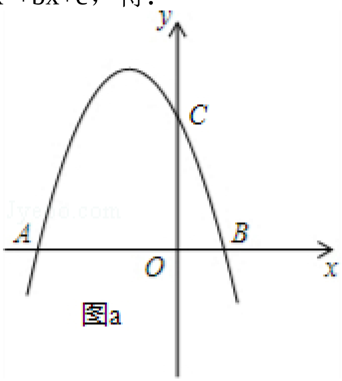
【分析】（1）把点 A、C 的坐标分别代入函数解析式，列出关于系数的方程组，通过解方程组求得系数的值；

（2）设 P 点坐标为（x，$-x^2-2x+3$），根据 $S_{\triangle AOP}=4S_{\triangle BOC}$ 列出关于 x 的方程，解方程求出 x 的值，进而得到点 P 的坐标；（3）先运用待定系数法求出直线 AC 的解析式为 y=x+3，再设 Q 点坐标为（x，x+3），则 D 点坐标为（x，x^2+2x-3），然后用含 x 的代数式表示 QD，根据二次函数的性质即可求出线段 QD 长度的最大值.

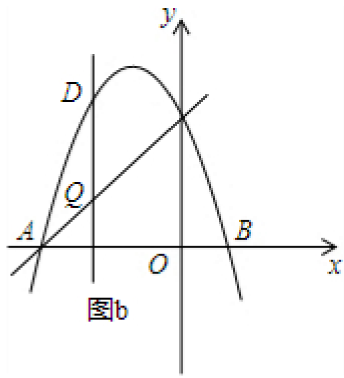
【解答】解：（1）把 A（－3，0），C（0，3）代入 $y=-x^2+bx+c$，得：

$\begin{cases}0=-9-3b+c\\3=c\end{cases}$，解得$\begin{cases}b=-2\\c=3\end{cases}$.

故该抛物线的解析式为：$y=-x^2-2x+3$.



图a



图b

（2）由（1）知，该抛物线的解析式为 $y=-x^2-2x+3$，则易得 B（1，0）.

∵ $S_{\triangle AOP}=4S_{\triangle BOC}$，

∴ $\frac{1}{2}\times3\times|-x^2-2x+3|=4\times\frac{1}{2}\times1\times3$.

整理，得 $(x+1)^2=0$ 或 $x^2+2x-7=0$，

解得 x=－1 或 $x=-1\pm2\sqrt{2}$.

则符合条件的点 P 的坐标为：（－1，4）或（$-1+2\sqrt{2}$，－4）或（$-1-2\sqrt{2}$，－4）；

（3）设直线 AC 的解析式为 y=kx+t，将 A（－3，0），C（0，3）代入，

得$\begin{cases}-3k+t=0\\t=3\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=1\\t=3\end{cases}$. 即直线 AC 的解析式为 y=x+3.

设 Q 点坐标为（x，x+3），（$-3\leq x\leq0$），则 D 点坐标为（x，$-x^2-2x+3$），

$QD=(-x^2-2x+3)-(x+3)=-x^2-3x=-\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$，

∴ 当 $x=-\frac{3}{2}$时，QD 有最大值$\frac{9}{4}$.

【点评】此题考查了待定系数法求二次函数、一次函数的解析式，二次函数的性质以及三角形面积、线段长度问题．此题难度适中，解题的关键是运用方程思想与数形结合思想.

5．（2015•济宁）如图，⊙E 的圆心 E（3，0），半径为 5，⊙E 与 y 轴相交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的上方），与 x 轴的正半轴交于点 C，直线 l 的解析式为 $y=\frac{3}{4}x+4$，与 x 轴相交于点 D，以点 C 为顶点的抛物线过点 B.

（1）求抛物线的解析式；

（2）判断直线 l 与⊙E 的位置关系，并说明理由；

（3）动点 P 在抛物线上，当点 P 到直线 l 的距离最小时．求出点 P 的坐标及最小距离．

【考点】二次函数综合题．　【专题】压轴题．

【分析】（1）连接 AE，由已知得：AE=CE=5，OE=3，利用勾股定理求出 OA 的长，结合垂径定理求出 OC 的长，从而得到 C 点坐标，进而得到抛物线的解析式；

（2）求出点 D 的坐标为（$-\frac{16}{3}$，0），根据△AOE∽△DOA，求出∠DAE=90°，判断出直线 l 与⊙E 相切与 A．

（3）过点 P 作直线 l 的垂线段 PQ，垂足为 Q，过点 P 作直线 PM 垂直于 x 轴，交直线 l 于点 M．设 M（m，$\frac{3}{4}$m+4），P（m，$-\frac{1}{16}m^2+m-4$），得到 PM=$\frac{3}{4}m+4-(-\frac{1}{16}m^2+m-4)=\frac{1}{16}m^2-\frac{1}{4}m+8=\frac{1}{16}(m-2)^2+\frac{31}{4}$，根据△PQM 的三个内角固定不变，得到 PQ 最小=$PM_{最小}$•sin∠QMP=$PM_{最小}$•sin∠AEO=$\frac{31}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{31}{5}$，从而得到最小距离．

【解答】解：（1）如图 1，连接 AE，由已知得：AE=CE=5，OE=3，

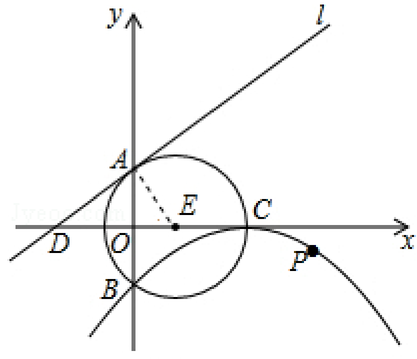


图1

在 Rt△AOE 中，由勾股定理得，OA=$\sqrt{AE^2-OE^2}=\sqrt{5^2-3^2}$=4，

∵OC⊥AB，∴由垂径定理得，OB=OA=4，

OC=OE+CE=3+5=8，

∴A（0，4），B（0，－4），C（8，0），

∵抛物线的定点为 C，∴设抛物线的解析式为 $y=a(x-8)^2$，

将点 B 的坐标代入上解析的式，得 64a=－4，故 a=$-\frac{1}{16}$，

∴$y=-\frac{1}{16}(x-8)^2$，

∴$y=-\frac{1}{16}x^2+x-4$ 为所求抛物线的解析式，

（2）在直线 l 的解析式 $y=\frac{3}{4}x+4$ 中，令 y=0，得 $\frac{3}{4}x+4=0$，解得 $x=-\frac{16}{3}$，

∴点 D 的坐标为（$-\frac{16}{3}$，0），当 x=0 时，y=4，

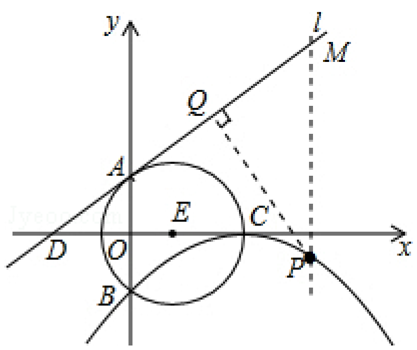


图2

∴点 A 在直线 l 上，在 Rt△AOE 和 Rt△DOA 中，

∵$\frac{OE}{OA}=\frac{3}{4}$，$\frac{OA}{OD}=\frac{3}{4}$，∴$\frac{OE}{OA}=\frac{OA}{OD}$，

∵∠AOE=∠DOA=90°，

∴△AOE∽△DOA，∴∠AEO=∠DAO，

∵∠AEO+∠EAO=90°，

∴∠DAO+∠EAO=90°，即∠DAE=90°，因此，直线 l 与⊙E 相切与 A.

（3）如图 2，过点 P 作直线 l 的垂线段 PQ，垂足为 Q，过点 P 作直线 PM 垂直于 x 轴，交直线 l 于点 M.

设 M（m，$\frac{3}{4}$m+4），P（m，$-\frac{1}{16}$m²+m－4），则 PM=$\frac{3}{4}$m+4－（$-\frac{1}{16}$m²+m－4）=$\frac{1}{16}m^2-\frac{1}{4}m+8=\frac{1}{16}(m-2)^2+\frac{31}{4}$，

当 m=2 时，PM 取得最小值$\frac{31}{4}$，此时，P（2，$-\frac{9}{4}$），

对于△PQM，∵PM⊥x 轴，∴∠QMP=∠DAO=∠AEO，

又∠PQM=90°，∴△PQM 的三个内角固定不变，

∴在动点 P 运动的过程中，△PQM 的三边的比例关系不变，

∴当 PM 取得最小值时，PQ 也取得最小值，

PQ 最小=PM $_{最小}$•sin∠QMP=PM $_{最小}$•sin∠AEO=$\frac{31}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{31}{5}$，

∴当抛物线上的动点 P 的坐标为（2，$-\frac{9}{4}$）时，点 P 到直线 l 的距离最小，其最小距离为$\frac{31}{5}$.

【点评】本题考查了二次函数综合题，涉及勾股定理、待定系数法求二次函数解析式、切线的判定和性质、二次函数的最值等知识，在解答（3）时要注意点 P、点 M 坐标的设法，以便利用二次函数的最值求解.

6.（2015•荆门）如图，在矩形 OABC 中，OA=5，AB=4，点 D 为边 AB 上一点，将△BCD 沿直线 CD 折叠，使点 B 恰好落在边 OA 上的点 E 处，分别以 OC，OA 所在的直线为 x 轴，y 轴建立平面直角坐标系.

（1）求 OE 的长及经过 O，D，C 三点抛物线的解析式；

（2）一动点 P 从点 C 出发，沿 CB 以每秒 2 个单位长度的速度向点 B 运动，同时动点 Q 从 E 点出发，沿 EC 以每秒 1 个单位长度的速度向点 C 运动，当点 P 到达点 B 时，两点同时停止运动，设运动时间为 t 秒，当 t 为何值时，DP=DQ；

（3）若点 N 在（1）中抛物线的对称轴上，点 M 在抛物线上，是否存在这样的点 M 与点 N，使 M，N，C，E 为顶点的四边形是平行四边形？若存在，请求出 M 点坐标；若不存在，请说明理由.

【考点】二次函数综合题． 【专题】压轴题.

【分析】（1）由折叠的性质可求得 CE、CO，在 Rt△COE 中，由勾股定理可求得 OE，设 AD=m，在 Rt△ADE 中，由勾股定理可求得 m 的值，可求得 D 点坐标，结合 C、O 两点，利用待定系数法可求得抛物线解析式；

（2）用 t 表示出 CP、BP 的长，可证明△DBP≌△DEQ，可得到 BP=EQ，可求得 t 的值；

（3）可设出 N 点坐标，分三种情况①EN 为对角线，②EM 为对角线，③EC 为对角线，根据平行四边形的性质可求得对角线的交点横坐标，从而可求得 M 点的横坐标，再代入抛物线解析式可求得 M 点的坐标.

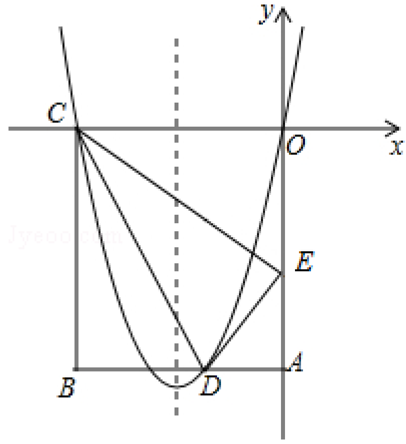
【解答】解：（1）∵CE=CB=5，CO=AB=4，

∴在 Rt△COE 中，OE=$\sqrt{CE^2-CO^2}=\sqrt{5^2-4^2}$=3，

设 AD=m，则 DE=BD=4－m，∵OE=3，∴AE=5－3=2，

在 Rt△ADE 中，由勾股定理可得 AD²+AE²=DE²，即 m²+2²=（4－m）²，解得 m=$\frac{3}{2}$，

∴D（$-\frac{3}{2}$，－5），∵C（－4，0），O（0，0），



∴设过 O、D、C 三点的抛物线为 y=ax（x+4），

∴ －5=$-\frac{3}{2}$a（$-\frac{3}{2}$+4），解得 a=$\frac{4}{3}$，

∴抛物线解析式为 y=$\frac{4}{3}$x（x+4）=$\frac{4}{3}x^2+\frac{16}{3}x$；

（2）∵CP=2t，∴BP=5－2t，在 Rt△DBP 和 Rt△DEQ 中，

$\begin{cases}DP=DQ\\BD=ED\end{cases}$，∴Rt△DBP≌Rt△DEQ（HL），∴BP=EQ，∴5－2t=t，

∴t=$\frac{5}{3}$；

（3）∵抛物线的对称为直线 x=－2，∴设 N（－2，n），

又由题意可知 C（－4，0），E（0，－3），设 M（m，y），

①当 EN 为对角线，即四边形 ECNM 是平行四边形时，

则线段 EN 的中点横坐标为$\frac{0+(-2)}{2}=-1$，线段 CM 中点横坐标为$\frac{m+(-4)}{2}$，

∵ EN，CM 互相平分，∴$\frac{m+(-4)}{2}=-1$，解得 m=2，又 M 点在抛物线上，

∴ $y=\frac{4}{3}\times 2^2+\frac{16}{3}\times 2=16$，∴ M（2，16）；

②当 EM 为对角线，即四边形 ECMN 是平行四边形时，

则线段 EM 的中点横坐标为$\frac{m+0}{2}$，线段 CN 中点横坐标为$\frac{(-2)+(-4)}{2}=-3$，

∵ EN，CM 互相平分，∴$\frac{m}{2}=-3$，解得 m=﹣6，又∵ M 点在抛物线上，∴ $y=\frac{4}{3}\times(-6)^2+\frac{16}{3}\times(-6)=16$，

∴ M（﹣6，16）；

③当 CE 为对角线，即四边形 EMCN 是平行四边形时，

则 M 为抛物线的顶点，即 M（﹣2，$-\frac{16}{3}$）.

综上可知，存在满足条件的点 M，其坐标为（2，16）或（﹣6，16）或（﹣2，$-\frac{16}{3}$）.

【点评】本题主要考查二次函数的综合应用，涉及待定系数法、全等三角形的判定和性质、折叠的性质、平行四边形的性质等知识点．在（1）中求得 D 点坐标是解题的关键，在（2）中证得全等，得到关于 t 的方程是解题的关键，在（3）中注意分类讨论思想的应用．本题考查知识点较多，综合性较强，难度适中．

7．（2015•盘锦）如图 1，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 交 x 轴于 A（﹣1，0）和 B（5，0）两点，交 y 轴于点 C，点 D 是线段 OB 上一动点，连接 CD，将线段 CD 绕点 D 顺时针旋转 90°得到线段 DE，过点 E 作直线 l⊥x 轴于 H，过点 C 作 CF⊥l 于 F．

（1）求抛物线解析式；（2）如图 2，当点 F 恰好在抛物线上时，求线段 OD 的长；

（3）在（2）的条件下：①连接 DF，求 tan∠FDE 的值；

②试探究在直线 l 上，是否存在点 G，使∠EDG=45°？若存在，请直接写出点 G 的坐标；若不存在，请说明理由．【考点】二次函数综合题．　【专题】压轴题．

【分析】（1）利用待定系数法求得即可；（2）根据 C 的纵坐标求得 F 的坐标，然后通过△OCD≌△HDE，得出 DH=OC=3，即可求得 OD 的长；（3）①先确定 C、D、E、F 四点共圆，根据圆周角定理求得∠ECF=∠EDF，由于 $\tan\angle ECF=\frac{EF}{CF}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$，即可求得 $\tan\angle FDE=\frac{1}{2}$；②连接 CE，得出△CDE 是等腰直角三角形，得出∠CED=45°，过 D 点作 DG_1∥CE，交直线 l 于 G_1，过 D 点作 DG_2⊥CE，交直线 l 于 G_2，则∠EDG_1=45°，∠EDG_2=45°，求得直线 CE 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+3$，即可设出直线 DG_1 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+m$，直线 DG_2 的解析式为 $y=2x+n$，把 D 的坐标代入即可求得 m、n，从而求得解析式，进而求得 G 的坐标．

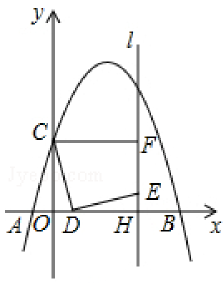


图1

【解答】解：（1）如图 1，∵ 抛物线 $y=ax^2+bx+3$ 交 x 轴于 A（﹣1，0）和 B（5，0）两点，

∴ $\begin{cases}a-b+3=0\\25a+5b+3=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=-\frac{3}{5}\\b=\frac{12}{5}\end{cases}$．∴ 抛物线解析式为 $y=-\frac{3}{5}x^2+\frac{12}{5}x+3$；

（2）如图 2，∵ 点 F 恰好在抛物线上，C（0，3），∴ F 的纵坐标为 3，

把 y=3 代入 $y=-\frac{3}{5}x^2+\frac{12}{5}x+3$ 得，$3=-\frac{3}{5}x^2+\frac{12}{5}x+3$；

解得 x=0 或 x=4，∴ F（4，3），∴ OH=4，

∵∠CDE=90°，∴∠ODC+∠EDH=90°，∴∠OCD=∠EDH，

在△OCD 和△HDE 中，

$\begin{cases}\angle OCD=\angle EDH\\\angle COD=\angle DHE=90°\\CD=DE\end{cases}$，∴△OCD≌△HDE（AAS），∴ DH=OC=3，

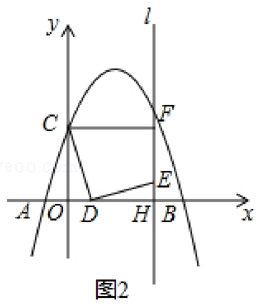


图2

∴ OD=4﹣3=1；

（3）①如图 3，连接 CE，∵△OCD≌△HDE，

∴ HE=OD=1，∵ BF=OC=3，∴ EF=3﹣1=2，

∵∠CDE=∠CFE=90°，∴ C、D、E、F 四点共圆，

∴∠ECF=∠EDF，在 RT△CEF 中，∵ CF=OH=4，

∴ tan∠ECF=$\frac{EF}{CF}$=$\frac{2}{4}$=$\frac{1}{2}$，∴ tan∠FDE=$\frac{1}{2}$；

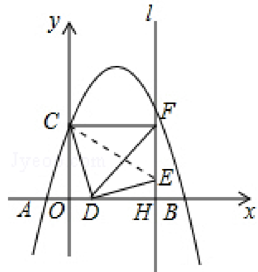


图3

②如图 4，连接 CE，∵ CD=DE，∠CDE=90°，

∴∠CED=45°，过 D 点作 DG_1∥CE，交直线 l 于 G_1，过 D 点作 DG_2⊥CE，交直线 l 于 G_2，则∠EDG_1=45°，∠EDG_2=45°

∵ EH=1，OH=4，∴ E（4，1），∵ C（0，3），

∴ 直线 CE 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+3$，设直线 DG_1 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+m$，

∵ D（1，0），∴ $0=-\frac{1}{2}\times1+m$，解得 $m=\frac{1}{2}$，∴ 直线 DG_1 的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，

当 x=4 时，$y=-\frac{1}{2}\times4+\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}$，∴ G_1（4，$-\frac{3}{2}$）；

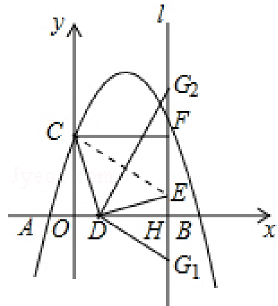


图4

设直线 DG_2 的解析式为 y=2x+n，∵ D（1，0），∴ 0=2×1+n，解得 n=﹣2，

∴ 直线 DG_2 的解析式为 y=2x﹣2，

当 x=4 时，y=2×4﹣2=6，

∴ G_2（4，6）；

综上，在直线 l 上，是否存在点 G，使∠EDG=45°，点 G 的坐标为（4，$-\frac{3}{2}$）或（4，6）.

【点评】本题是二次函数的综合题，考查了待定系数法求二次函数的解析式，一次函数的解析式，三角形全等的判定和性质，等腰直角三角形的性质，平行线的性质等，数形结合思想的应用是解题的关键.

8.（2015•益阳）已知抛物线 E_1：$y=x^2$ 经过点 A（1，m），以原点为顶点的抛物线 E_2 经过点 B（2，2），点 A、B 关于 y 轴的对称点分别为点 A′，B′.

（1）求 m 的值及抛物线 E_2 所表示的二次函数的表达式；

（2）如图 1，在第一象限内，抛物线 E_1 上是否存在点 Q，使得以点 Q、B、B′为顶点的三角形为直角三角形？若存在，求出点 Q 的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）如图 2，P 为第一象限内的抛物线 E_1 上与点 A 不重合的一点，连接 OP 并延长与抛物线 E_2 相交于点 P′，求△PAA′与△P′BB′的面积之比.

【考点】二次函数综合题. 【专题】压轴题.

【分析】（1）直接将（2，2）代入函数解析式进而求出 a 的值；

（2）由题意可得，在第一象限内，抛物线 E_1 上存在点 Q，使得△QBB′为直角三角形，由图象可知直角顶点只能为点 B 或点 Q，分别利用当点 B 为直角顶点时以及当点 Q 为直角顶点时求出 Q 点坐标即可；

（3）首先设 P（c，c^2）、P′（d，$\frac{1}{2}d^2$），进而得出 c 与 d 的关系，再表示出△PAA′与△P′BB′的面积进而得出答案.

【解答】解：（1）∵ 抛物线 E_1 经过点 A（1，m），

∴ $m=1^2=1$. ∵ 抛物线 E_2 的顶点在原点，可设它对应的函数表达式为 $y=ax^2$（a≠0），

又∵ 点 B（2，2）在抛物线 E_2 上，∴ $2=a\times2^2$，

解得：$a=\frac{1}{2}$，∴ 抛物线 E_2 所对应的二次函数表达式为 $y=\frac{1}{2}x^2$.

（2）如图 1，假设在第一象限内，抛物线 E_1 上存在点 Q，使得△QBB′为直角三角形，

由图象可知直角顶点只能为点 B 或点 Q.

①当点 B 为直角顶点时，过 B 作 QB⊥BB′交抛物线 E_1 于 Q，

则点 Q 与 B 的横坐标相等且为 2，将 x=2 代入 $y=x^2$ 得 y=4，

∴ 点 Q 的坐标为（2，4）.

②当点 Q 为直角顶点时，则有 $QB'^2+QB^2=B'B^2$，过点 Q 作 GQ⊥BB′于 G，

设点 Q 的坐标为（t，t^2）（t＞0），

则有 $(t+2)^2+(t^2-2)^2+(2-t)^2+(t^2-2)^2=4$，

整理得：$t^4-3t^2=0$，

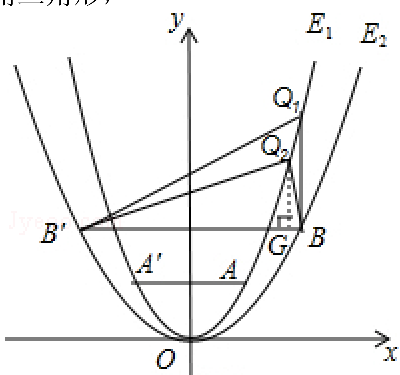


图1

$\because t>0$，$\therefore t^2-3=0$，解得 $t_1=\sqrt{3}$，$t_2=-\sqrt{3}$（舍去），

$\therefore$ 点 Q 的坐标为（$\sqrt{3}$，3），

综合①②，存在符合条件的点 Q 坐标为（2，4）与（$\sqrt{3}$，3）；

（3）如图 2，过点 P 作 PC⊥x 轴，垂足为点 C，PC 交直线 AA′于点 E，

过点 P′作 P′D⊥x 轴，垂足为点 D，P′D 交直线 BB′于点 F，

依题意可设 P（c，c^2）、P′（d，$\frac{1}{2}d^2$）（c＞0，c≠q），

$\because \tan\angle POC=\tan\angle P'OD$，$\therefore \frac{c^2}{c}=\frac{\frac{1}{2}d^2}{d}$，$\therefore d=2c$．

$\because AA'=2$，$BB'=4$，

$\therefore \frac{S_{\triangle PAA'}}{S_{P'BB'}}=\frac{\frac{1}{2}AA'\cdot PE}{\frac{1}{2}BB'\cdot P'F}=\frac{\frac{1}{2}\times2\times|c^2-1|}{\frac{1}{2}\times4\times|\frac{1}{2}d^2-2|}=\frac{|c^2-1|}{2\times|2c^2-2|}=\frac{1}{4}$．

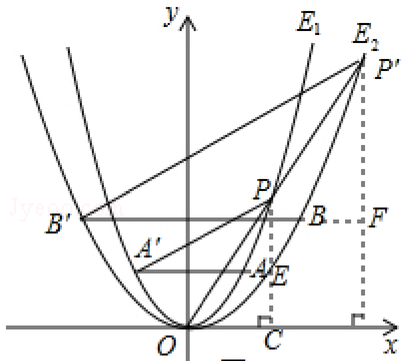


图2

【点评】此题主要考查了二次函数综合以及直角三角形的性质和三角形面积求法，根据题意利用分类讨论得出是解题关键．

9．（2015•徐州）如图，在平面直角坐标系中，点 A（10，0），以 OA 为直径在第一象限内作半圆，B 为半圆上一点，连接 AB 并延长至 C，使 BC=AB，过 C 作 CD⊥x 轴于点 D，交线段 OB 于点 E，已知 CD=8，抛物线经过 O、E、A 三点．（1）∠OBA=___90___°．（2）求抛物线的函数表达式．

（3）若 P 为抛物线上位于第一象限内的一个动点，以 P、O、A、E 为顶点的四边形面积记作 S，则 S 取何值时，相应的点 P 有且只有 3 个？

【考点】二次函数综合题．【专题】压轴题．

【解答】解：（1）∵OA 是⊙O 的直径，∴∠OBA=90°，故答案为：90；

（2）连接 OC，如图 1 所示，

∵由（1）知 OB⊥AC，又 AB=BC，∴OB 是 AC 的垂直平分线，

∴OC=OA=10，在 Rt△OCD 中，OC=10，CD=8，

∴OD=6，∴C（6，8），B（8，4）∴OB 所在直线的函数关系为 $y=\frac{1}{2}x$，

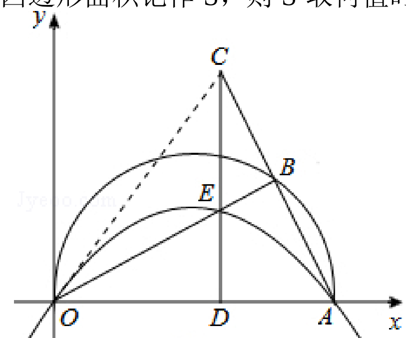


图1

又∵E 点的横坐标为 6，∴E 点纵坐标为 3，即 E（6，3），

抛物线过 O（0，0），E（6，3），A（10，0），

∴设此抛物线的函数关系式为 y=ax（x﹣10），把 E 点坐标代入得：

$3=6a(6-10)$，解得 $a=-\frac{1}{8}$．

∴此抛物线的函数关系式为 $y=-\frac{1}{8}x(x-10)$，即 $y=-\frac{1}{8}x^2+\frac{5}{4}x$；

（3）设点 P（p，$-\frac{1}{8}p^2+\frac{5}{4}p$），

①若点 P 在 CD 的左侧，延长 OP 交 CD 于 Q，如右图 2，

OP 所在直线函数关系式为：$y=(-\frac{1}{8}p+\frac{5}{4})x$

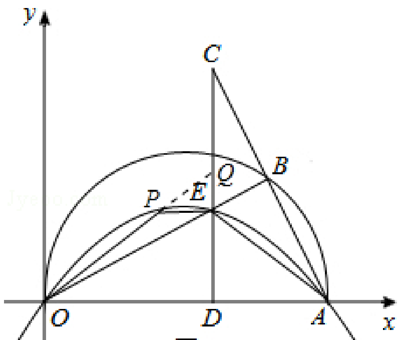
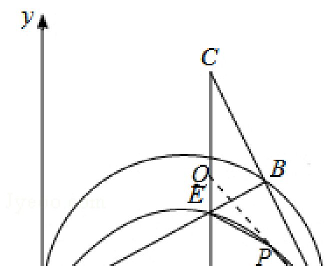


图2

∴当 x=6 时，$y=-\frac{3}{4}p+\frac{15}{2}$，即 Q 点纵坐标为 $-\frac{3}{4}p+\frac{15}{2}$，

∴$QE=-\frac{3}{4}p+\frac{15}{2}-3=-\frac{3}{4}p+\frac{9}{2}$，



$S_{四边形POAE}=S_{\triangle OAE}+S_{\triangle OPE}=S_{\triangle OAE}+S_{\triangle OQE}-S_{\triangle PQE}$

$=\frac{1}{2}\bullet OA\bullet DE+\frac{1}{2}QE\bullet OD-\frac{1}{2}\bullet QE\bullet P_x\bullet$

$=\frac{1}{2}\times10\times3+\frac{1}{2}\times(-\frac{3}{4}p+\frac{9}{2})\times6-\frac{1}{2}\bullet(-\frac{3}{4}p+\frac{9}{2})\bullet(6-p)$，

$=-\frac{3}{8}p^2+\frac{9}{4}p+15$

②若点 P 在 CD 的右侧，延长 AP 交 CD 于 Q，如右图 3，P（p，$-\frac{1}{8}p^2+\frac{5}{4}p$），A（10，0）

∴设 AP 所在直线方程为：y=kx+b，把 P 和 A 坐标代入得，

$\begin{cases}10k+b=0\\pk+b=-\frac{1}{8}p^2+\frac{5}{4}p\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=-\frac{1}{8}p\\b=\frac{5}{4}p\end{cases}$．∴AP 所在直线方程为：$y=-\frac{1}{8}px+\frac{5}{4}p$，

∴当 x=6 时，$y=-\frac{1}{8}p\bullet6+\frac{5}{4}p=\frac{1}{2}P$，即 Q 点纵坐标为$\frac{1}{2}P$，∴$QE=\frac{1}{2}P-3$，

∴$S_{四边形POAE}=S_{\triangle OAE}+S_{\triangle APE}=S_{\triangle OAE}+S_{\triangle AQE}-S_{\triangle PQE}$

$=\frac{1}{2}\bullet OA\bullet DE+\frac{1}{2}\bullet QE\bullet DA-\frac{1}{2}\bullet QE\bullet(P_x-6)=\frac{1}{2}\times10\times3+\frac{1}{2}\bullet QE\bullet(DA-P_x+6)$

$=15+\frac{1}{2}\bullet(\frac{1}{2}p-3)\bullet(10-p)=-\frac{1}{4}p^2+4p=-\frac{1}{4}(p-8)^2+16$，

∴当 P 在 CD 右侧时，四边形 POAE 的面积最大值为 16，此时点 P 的位置就一个，令$-\frac{3}{8}p^2+\frac{9}{4}p+15=16$，

解得，$p=3\pm\frac{\sqrt{57}}{3}$，∴当 P 在 CD 左侧时，四边形 POAE 的面积等于 16 的对应 P 的位置有两个，

综上所知，以 P、O、A、E 为顶点的四边形面积 S 等于 16 时，相应的点 P 有且只有 3 个．

【点评】本题主要考查了圆周角定理及二次函数的相关问题，解决这类问题关键是善于将函数问题转化为方程问题，然后数形结合解决问题．

10．（2015•乌鲁木齐）抛物线$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+2$与 x 轴交于 A，B 两点（OA＜OB），与 y 轴交于点 C．

（1）求点 A，B，C 的坐标；

（2）点 P 从点 O 出发，以每秒 2 个单位长度的速度向点 B 运动，同时点 E 也从点 O 出发，以每秒 1 个单位长度的速度向点 C 运动，设点 P 的运动时间为 t 秒（0＜t＜2）．

①过点 E 作 x 轴的平行线，与 BC 相交于点 D（如图所示），当 t 为何值时，$\frac{1}{OP}+\frac{1}{ED}$的值最小，求出这个最小值并写出此时点 E，P 的坐标；

②在满足①的条件下，抛物线的对称轴上是否存在点 F，使△EFP 为直角三角形？若存在，请直接写出点 F 的坐标；若不存在，请说明理由．

【考点】二次函数综合题．　【专题】压轴题．

【分析】（1）在抛物线的解析式中，令 y=0，令 x=0，解方程即可得到结果；

（2）①由题意得：OP=2t，OE=t，通过△CDE∽△CBO 得到$\frac{CE}{CO}=\frac{ED}{OB}$，即$\frac{2-t}{2}=\frac{DE}{4}$，求得$\frac{1}{OP}+\frac{1}{ED}$有最小值 1，即可求得结果；②存在，求得抛物线$y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+2$的对称方程为 x=3，设 F（3，m），当△EFP 为直角三角形时，①当∠EPF=90°时，②当∠EFP=90°时，③当∠PEF=90°时，根据勾股定理列方程即可求得结果．

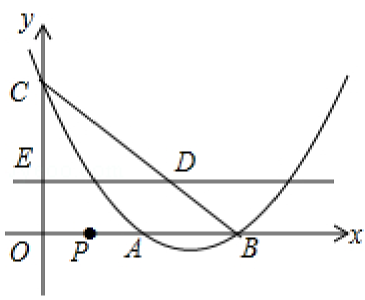
【解答】解：（1）在抛物线的解析式中，令 y=0，即$\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+2=0$，

解得：$x_1=2$，$x_2=4$，∵OA＜OB，∴A（2，0），B（4，0），

在抛物线的解析式中，令 x=0，得 y=2，∴C（0，2），

（2）①由题意得：OP=2t，OE=t，

∵DE∥OB，∴△CDE∽△CBO，



∴ $\frac{CE}{CO}=\frac{ED}{OB}$，即$\frac{2-t}{2}=\frac{DE}{4}$，

∴ DE=4 - 2t，

∴ $\frac{1}{OP}+\frac{1}{ED}=\frac{1}{2t}+\frac{1}{4-2t}=\frac{1}{-t^2+2t}=\frac{1}{1-(t-1)^2}$，

∵ 0<t<2，1 - （t - 1）^{2}始终为正数，且 t=1 时，1 - （t - 1）^{2}有最大值 1，

∴ t=1 时，$\frac{1}{1-(t-1)^2}$有最小值 1，即 t=1 时，$\frac{1}{OP}+\frac{1}{ED}$有最小值 1，此时 OP=2，OE=1，

∴ E（0，1），P（2，0）；

②存在，∵ 抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x+2$ 的对称轴方程为 x=3，设 F（3，m），

∴ $EP^2=5$，$PF^2=(3-2)^2+m^2$，$EF^2=(m-1)^2+3^2$，

当△ EFP 为直角三角形时，①当∠ EPF=90°时，$EP^2+PF^2=EF^2$，

即 $5+1+m^2=(m-1)^2+3^2$，解得：m=2，

②当∠ EFP=90°时，$EF^2+FP^2=PE^2$，即 $(m-1)^2+3+(3-2)^2+m^2=5$，

解得；m=0 或 m=1，不合题意舍去，

∴ 当∠ EFP=90°时，这种情况不存在，

③当∠ PEF=90°时，$EF^2+PE^2=PF^2$，

即 $(m-1)^2+3^2+5=(3-2)^2+m^2$，

解得：m=7，

∴ F（3，2），（3，7）.

【点评】本题考查了根据函数的解析式求点的坐标，相似三角形的判定和性质，求代数式的最值，勾股定理，存在性问题，在求有关存在性问题时要注意分析题意分情况讨论结果.

11.（2015•佛山）如图，一小球从斜坡 O 点处抛出，球的抛出路线可以用二次函数 $y=-x^2+4x$ 刻画，斜坡可以用一次函数 $y=\frac{1}{2}x$ 刻画.（1）请用配方法求二次函数图象的最高点 P 的坐标；

（2）小球的落点是 A，求点 A 的坐标；（3）连接抛物线的最高点 P 与点 O、A 得△ POA，求△ POA 的面积；

（4）在 OA 上方的抛物线上存在一点 M（M 与 P 不重合），△ MOA 的面积等于△ POA 的面积．请直接写出点 M 的坐标.

【考点】二次函数综合题．　【专题】压轴题.

【分析】（1）利用配方法抛物线的一般式化为顶点式，即可求出二次函数图象的最高点 P 的坐标；

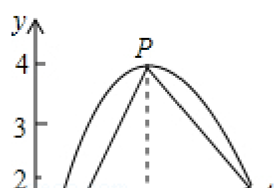
（2）联立两解析式，可求出交点 A 的坐标；

（3）作 PQ⊥x 轴于点 Q，AB⊥x 轴于点 B．根据 $S_{\triangle POA}=S_{\triangle POQ}+S_{\triangle 梯形PQBA}-S_{\triangle BOA}$，代入数值计算即可求解；

（4）过 P 作 OA 的平行线，交抛物线于点 M，连结 OM、AM，由于两平行线之间的距离相等，根据同底等高的两个三角形面积相等，可得△ MOA 的面积等于△ POA 的面积．设直线 PM 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+b$，将 P（2，4）代入，求出直线 PM 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+3$．再与抛物线的解析式联立，得到方程组$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+3 \\ y=-x^2+4x \end{cases}$，解方程组即可求出点 M 的坐标.

【解答】解：（1）由题意得，$y=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$，

故二次函数图象的最高点 P 的坐标为（2，4）；



（2）联立两解析式可得：$\begin{cases} y=-x^2+4x \\ y=\frac{1}{2}x \end{cases}$，解得：$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$，或$\begin{cases} x=\frac{7}{2} \\ y=\frac{7}{4} \end{cases}$.

故可得点 A 的坐标为（$\frac{7}{2}$，$\frac{7}{4}$）；

（3）如图，作 PQ⊥x 轴于点 Q，AB⊥x 轴于点 B.

$S_{\triangle POA}=S_{\triangle POQ}+S_{\triangle 梯形PQBA}-S_{\triangle BOA}=\frac{1}{2}\times2\times4+\frac{1}{2}\times(\frac{7}{4}+4)\times(\frac{7}{2}-2)-\frac{1}{2}\times\frac{7}{2}\times\frac{7}{4}$

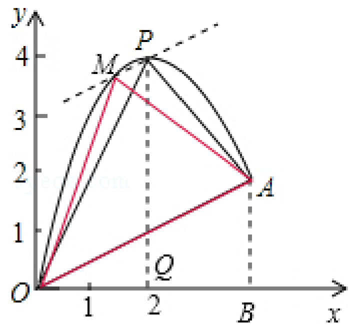
$=4+\frac{69}{16}-\frac{49}{16}=\frac{21}{4}$；

（4）过 P 作 OA 的平行线，交抛物线于点 M，连结 OM、AM，则△MOA 的面积等于△POA 的面积.

设直线 PM 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+b$，∵ P 的坐标为（2，4），∴ $4=\frac{1}{2}\times2+b$，解得 b=3，

∴ 直线 PM 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x+3$．由$\begin{cases} y=\frac{1}{2}x+3 \\ y=-x^2+4x \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$，$\begin{cases} x=\frac{3}{2} \\ y=\frac{15}{4} \end{cases}$，

∴ 点 M 的坐标为（$\frac{3}{2}$，$\frac{15}{4}$）.



【点评】本题是二次函数的综合题型，其中涉及到两函数图象交点的求解方法，二次函数顶点坐标的求解方法，三角形的面积，待定系数法求一次函数的解析式，难度适中．利用数形结合与方程思想是解题的关键.

12.（2015•天水）在平面直角坐标系中，已知 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$（b、c 为常数）的顶点为 P，等腰直角三角形 ABC 的顶点 A 的坐标为（0，－1），点 C 的坐标为（4，3），直角顶点 B 在第四象限.

（1）如图，若抛物线经过 A、B 两点，求抛物线的解析式.

（2）平移（1）中的抛物线，使顶点 P 在直线 AC 上并沿 AC 方向滑动距离为$\sqrt{2}$时，试证明：平移后的抛物线与直线 AC 交于 x 轴上的同一点.

（3）在（2）的情况下，若沿 AC 方向任意滑动时，设抛物线与直线 AC 的另一交点为 Q，取 BC 的中点 N，试探究 NP+BQ 是否存在最小值？若存在，求出该最小值；若不存在，请说明理由.

【考点】二次函数综合题．　【专题】压轴题.

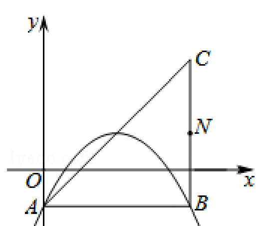
【分析】（1）先求出点 B 的坐标，然后利用待定系数法求出抛物线的函数表达式；

（2）如答题图 2，设顶点 P 在直线 AC 上并沿 AC 方向滑动距离$\sqrt{2}$时，到达 P′，作 P′M∥y 轴，PM∥x 轴，交于 M 点，根据直线 AC 的斜率求得△P′PM 是等腰直角三角形，进而求得抛物线向上平移 1 个单位，向右平移 1 个单位，从而求得平移后的解析式，进而求得与 x 轴的交点，与直线 AC 的交点，即可证得结论；

（3）如答图 3 所示，作点 B 关于直线 AC 的对称点 B′，由分析可知，当 B′、Q、F（AB 中点）三点共线时，NP+BQ 最小，最小值为线段 B′F 的长度.

【解答】解：（1）∵ 等腰直角三角形 ABC 的顶点 A 的坐标为（0，－1），C 的坐标为（4，3）

∴ 点 B 的坐标为（4，－1）．∵ 抛物线过 A（0，－1），B（4，－1）两点，



$\therefore\begin{cases}c=-1\\-\frac{1}{2}\times16+4b+c=-1\end{cases}$，解得：b=2，c=－1，

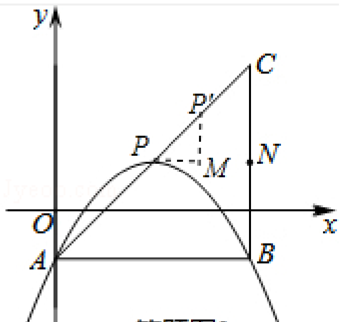
∴抛物线的函数表达式为：$y=-\frac{1}{2}x^2+2x-1$.

（2）如答题图 2，设顶点 P 在直线 AC 上并沿 AC 方向滑动距离$\sqrt{2}$时，到达 P′，作 P′M∥y 轴，PM∥x 轴，交于 M 点，

∵点 A 的坐标为（0，－1），点 C 的坐标为（4，3），∴直线 AC 的解析式为 y=x－1，

∵直线的斜率为 1，∴△P′PM 是等腰直角三角形，∵$PP'=\sqrt{2}$，

∴P′M=PM=1，∴抛物线向上平移 1 个单位，向右平移 1 个单位，



答题图2

∵$y=-\frac{1}{2}x^2+2x-1=-\frac{1}{2}(x-2)^2+1$，

∴平移后的抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+2$，

令 y=0，则 $0=-\frac{1}{2}(x-3)^2+2$，

解得 $x_1=1$，$x=5_2$，

∴平移后的抛物线与 x 轴的交点为（1，0），（5，0），

解$\begin{cases}y=-\frac{1}{2}(x-3)^2+2\\y=x-1\end{cases}$，得$\begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$或$\begin{cases}x=3\\y=2\end{cases}$

∴平移后的抛物线与 AC 的交点为（1，0），

∴平移后的抛物线与直线 AC 交于 x 轴上的同一点（1，0）.

（3）如答图 3，取点 B 关于 AC 的对称点 B′，

易得点 B′的坐标为（0，3），BQ=B′Q，取 AB 中点 F，

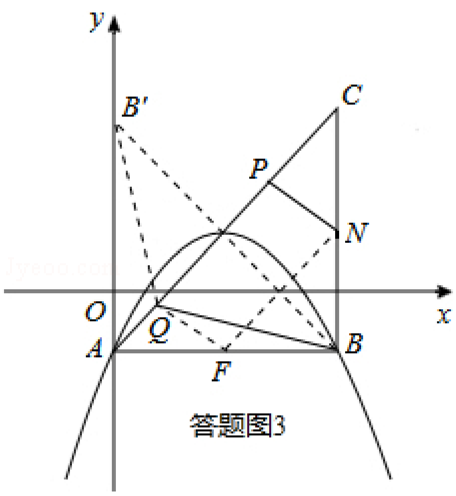
连接 QF，FN，QB′，易得 FN∥PQ，且 FN=PQ，

∴四边形 PQFN 为平行四边形.

∴NP=FQ.

∴$NP+BQ=FQ+B'Q\geq FB'=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$.

∴当 B′、Q、F 三点共线时，NP+BQ 最小，最小值为 $2\sqrt{5}$.



答题图3

【点评】本题为二次函数中考压轴题，考查了二次函数的图象与性质、待定系数法、一次函数、几何变换（平移，对称）、等腰直角三角形、平行四边形、轴对称－最短路线问题等知识点，考查了存在型问题和分类讨论的数学思想，试题难度较大.

13.（2015•常德）如图，曲线 y_1 抛物线的一部分，且表达式为：$y_1=\frac{\sqrt{3}}{3}(x^2-2x-3)(x\leq3)$ 曲线 y_2 与曲线 y_1 关于直线 x=3 对称.（1）求 A、B、C 三点的坐标和曲线 y_2 的表达式；

（2）过点 D 作 CD∥x 轴交曲线 y_1 于点 D，连接 AD，在曲线 y_2 上有一点 M，使得四边形 ACDM 为筝形（如果一个四边形的一条对角线被另一条对角线垂直平分，这样的四边形为筝形），请求出点 M 的横坐标；

（3）设直线 CM 与 x 轴交于点 N，试问在线段 MN 下方的曲线 y_2 上是否存在一点 P，使△PMN 的面积最大？若存在，求出点 P 的坐标；若不存在，请说明理由.

【考点】二次函数综合题.　【专题】压轴题.

【分析】（1）对点 A、B、C 坐标的意义要明白，点 A 与点 B 是二次函数与横轴的交点，点 C 是纵轴的交点，关于 x=3 意义的理解，就是将 $y_1=\frac{\sqrt{3}}{3}(x^2-2x-3)$（$x\leqslant3$）进行了平移，从而可求得抛物线 y_2 的解析式；

（2）要理解，只有当 CM 垂直平分 AD 时，才能在 y_2 找到点 M，故点 M 即为直线（C 与 AD 的中点 P 连线）的交点；

（3）显然 MN 的值固定，即在 y_2 上的点，到 CM 的距离最大的点，即与 CM 平行的直线与 y_2 只有一个交点时，即为所求．

【解答】解：（1）在 $y_1=\frac{\sqrt{3}}{3}(x^2-2x-3)$ 中，令 $y_1=0$，则有 $0=\frac{\sqrt{3}}{3}(x^2-2x-3)$，解得 $x=-1$ 或 $x=3$，

∴ A（﹣1，0），B（3，0），

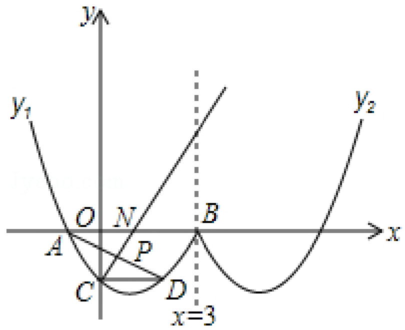
又∵ C 为与 y 轴的交点，

∴ C（0，$-\sqrt{3}$），

又曲线 y_2 与曲线 y_1 关于直线 x=3 对称，

∴ 曲线 y_2 可由曲线 y_1 关向右平移 3 个单位得到，

∴ $y_2=\frac{\sqrt{3}}{3}(x^2-10x+21)$ （x≥3）；



（2）若 AD 垂直平分 CM，则可知 CDMA 为菱形，

此时点 M（1，0），显然不在 y_2 上；

故直线 CM 垂直平分 AD，取 AD 中点 P，易求其坐标为（1，$-\frac{\sqrt{3}}{2}$），

故直线 CN 的解析式为：$y_{CN}=\sqrt{3}x-\sqrt{3}$，

求其与 y_2 的交点坐标：$\begin{cases} y=\sqrt{3}x-\sqrt{3} \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x^2-10x+21) \end{cases}$，

解得：$x_1=\frac{13+\sqrt{73}}{2}$，$x_2=\frac{13-\sqrt{73}}{2}$（不合舍去），

∴ $x=\frac{13+\sqrt{73}}{2}$；

（3）因为 MN 的长度固定，故点 P 到 MN 的距离最大时，△PMN 的面积最大，

∴ 可设另一直线 $y=\sqrt{3}x+b$ 与 y_2 相交于点 P，很显然它们只有一个交点时，满足条件．

即：$\begin{cases} y=\sqrt{3}x+b \\ y=\frac{\sqrt{3}}{3}(x^2-10x+21) \end{cases}$ 只有唯一一个解的时候，这个点就是点 P，

即方程 $\sqrt{3}x+b=\frac{\sqrt{3}}{3}(x^2-10x+21)$ 有唯一一个解，

解得：$x=\frac{13}{2}$，

将 $x=\frac{13}{2}$ 代入 $y_2=\frac{\sqrt{3}}{3}(x^2-10x+21)$，解得 $y=-\frac{7\sqrt{3}}{12}$

故点 P 的坐标为 $(\frac{13}{2},-\frac{7\sqrt{3}}{12})$．

【点评】本题主要考查二次函数的综合应用，涉及二次函数与一元二次方程的关系、图象的平移、菱形的性质等知识点．在（1）中确定出曲线 y_2 可由曲线 y_1 关向右平移 3 个单位得到是解题的关键，在（2）中确定出直线 CM 垂直平分 AD 是解题的关键，在（3）中确定出 P 点的位置是解题的关键．本题考查知识点较多，综合性质较强，难度较大．

14．（2015•自贡）如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$（a≠0）的对称轴为直线 x=﹣1，且抛物线经过 A（1，0），C（0，3）两点，与 x 轴交于点 B．（1）若直线 y=mx+n 经过 B、C 两点，求直线 BC 和抛物线的解析式；

（2）在抛物线的对称轴 x=﹣1 上找一点 M，使点 M 到点 A 的距离与到点 C 的距离之和最小，求出点 M 的坐标；

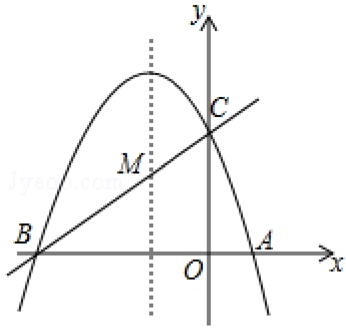
（3）设点 P 为抛物线的对称轴 x=﹣1 上的一个动点，求使△BPC 为直角三角形的点 P 的坐标．

【考点】二次函数综合题．　【专题】压轴题．

【分析】（1）先把点 A，C 的坐标分别代入抛物线解析式得到 a 和 b，c 的关系式，再根据抛物线的对称轴方程可得 a 和 b 的关系，再联立得到方程组，解方程组，求出 a，b，c 的值即可得到抛物线解析式；把 B、C 两点的坐标代入直线 y=mx+n，解方程组求出 m 和 n 的值即可得到直线解析式；

（2）设直线 BC 与对称轴 x=﹣1 的交点为 M，则此时 MA+MC 的值最小．把 x=﹣1 代入直线 y=x+3 得 y 的值，即可求出点 M 坐标；

（3）设 P（﹣1，t），又因为 B（﹣3，0），C（0，3），所以可得 $BC^2=18$，$PB^2=(-1+3)^2+t^2=4+t^2$，$PC^2=(-1)^2+(t-3)^2=t^2-6t+10$，再分三种情况分别讨论求出符合题意 t 值即可求出点 P 的坐标．



【解答】解：（1）依题意得：$\begin{cases}-\dfrac{b}{2a}=-1\\ a+b+c=0\\ c=3\end{cases}$，解之得：$\begin{cases}a=-1\\ b=-2\\ c=3\end{cases}$，

∴抛物线解析式为 $y=-x^2-2x+3$

∵对称轴为 x=﹣1，且抛物线经过 A（1，0），

∴把 B（﹣3，0）、C（0，3）分别代入直线 y=mx+n，

得$\begin{cases}-3m+n=0\\ n=3\end{cases}$，解之得：$\begin{cases}m=1\\ n=3\end{cases}$，

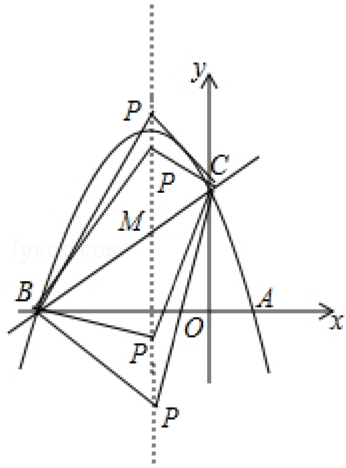
∴直线 y=mx+n 的解析式为 y=x+3；

（2）设直线 BC 与对称轴 x=﹣1 的交点为 M，则此时 MA+MC 的值最小．

把 x=﹣1 代入直线 y=x+3 得，y=2，

∴M（﹣1，2），

即当点 M 到点 A 的距离与到点 C 的距离之和最小时 M 的坐标为（﹣1，2）；



（3）设 P（﹣1，t），

又∵B（﹣3，0），C（0，3），

∴$BC^2=18$，$PB^2=(-1+3)^2+t^2=4+t^2$，$PC^2=(-1)^2+(t-3)^2=t^2-6t+10$，

①若点 B 为直角顶点，则 $BC^2+PB^2=PC^2$

即：$18+4+t^2=t^2-6t+10$ 解之得：t=﹣2；

②若点 C 为直角顶点，则 $BC^2+PC^2=PB^2$

即：$18+t^2-6t+10=4+t^2$ 解之得：t=4，

③若点 P 为直角顶点，则 $PB^2+PC^2=BC^2$

即：$4+t^2+t^2-6t+10=18$ 解之得：$t_1=\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$，$t_2=\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$；

综上所述 P 的坐标为（﹣1，﹣2）或（﹣1，4）或（﹣1，$\dfrac{3+\sqrt{17}}{2}$）或（﹣1，$\dfrac{3-\sqrt{17}}{2}$）．

【点评】本题综合考查了二次函数的图象与性质、待定系数法求函数（二次函数和一次函数）的解析式、利用轴对称性质确定线段的最小长度、难度不是很大，是一道不错的中考压轴题．

15．（2015•凉山州）如图，已知抛物线 $y=x^2-(m+3)x+9$ 的顶点 C 在 x 轴正半轴上，一次函数 y=x+3 与抛物线交于 A、B 两点，与 x、y 轴交于 D、E 两点．

（1）求 m 的值．

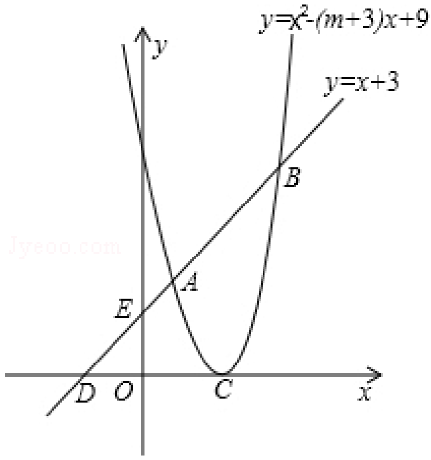
（2）求 A、B 两点的坐标．

（3）点 P（a，b）（﹣3＜a＜1）是抛物线上一点，当△PAB 的面积是△ABC 面积的 2 倍时，求 a，b 的值．

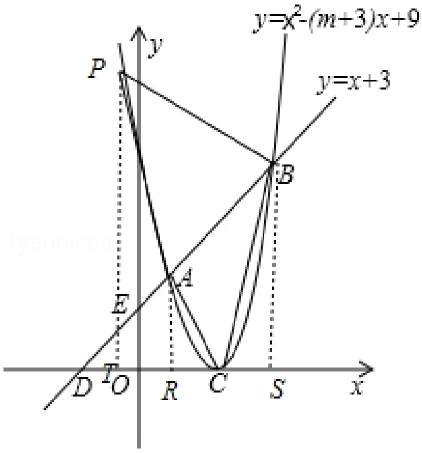
【考点】二次函数综合题．

【专题】压轴题．

【分析】（1）抛物线的顶点在 x 轴的正半轴上可知其对应的一元二次方程有两个相等的实数根，根据判别式等于 0 可求得 m 的值；
（2）由（1）可求得抛物线解析式，联立一次函数和抛物线解析式可求得 A、B 两点的坐标；
（3）分别过 A、B、P 三点作 x 轴的垂线，垂足分别为 R、S、T，可先求得△ABC 的面积，再利用 a、b 表示出△PAB 的面积，根据面积之间的关系可得到 a、b 之间的关系，再结合 P 点在抛物线上，可得到关于 a、b 的两个方程，可求得 a、b 的值．



【解答】解：
（1）∵抛物线 $y=x^2-(m+3)x+9$ 的顶点 C 在 x 轴正半轴上，
∴方程 $x^2-(m+3)x+9=0$ 有两个相等的实数根，
∴ $(m+3)^2-4\times9=0$，解得 m=3 或 m=﹣9，
又抛物线对称轴大于 0，即 m+3＞0，∴m=3；
（2）由（1）可知抛物线解析式为 $y=x^2-6x+9$，联立一次函数 y=x+3，
可得 $\begin{cases}y=x^2-6x+9\\y=x+3\end{cases}$，解得 $\begin{cases}x=1\\y=4\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=6\\y=9\end{cases}$，
∴A（1，4），B（6，9）；
（3）如图，分别过 A、B、P 三点作 x 轴的垂线，垂足分别为 R、S、T，
∵A（1，4），B（6，9），C（3，0），P（a，b），
∴AR=4，BS=9，RC=3﹣1=2，CS=6﹣3=3，RS=6﹣1=5，PT=b，RT=1﹣a，ST=6﹣a，
∴ $S_{\triangle ABC}=S_{梯形ABSR}-S_{\triangle ARC}-S_{\triangle BCS}=\frac{1}{2}\times(4+9)\times5-\frac{1}{2}\times2\times4-\frac{1}{2}\times3\times9=15$，
$S_{\triangle PAB}=S_{梯形PBST}-S_{梯形ABSR}-S_{梯形ARTP}$
$=\frac{1}{2}(9+b)(6-a)-\frac{1}{2}(b+4)(1-a)-\frac{1}{2}\times(4+9)\times5=\frac{1}{2}(5b-5a-15)$，
又 $S_{\triangle PAB}=2S_{\triangle ABC}$，
∴ $\frac{1}{2}(5b-5a-15)=30$，即 b﹣a=15，
∴b=15+a，
∵P 点在抛物线上，
∴ $b=a^2-6a+9$，
∴ $15+a=a^2-6a+9$，解得 $a=\frac{7\pm\sqrt{73}}{2}$，
∵﹣3＜a＜1，
∴ $a=\frac{7-\sqrt{73}}{2}$，
∴ $b=15+\frac{7-\sqrt{73}}{2}=\frac{37-\sqrt{73}}{2}$．



【点评】本题主要考查二次函数的综合应用，涉及待定系数法、二次函数与一元二次方程的关系、函数图象的交点及三角形的面积等知识点．在（1）中由顶点在 x 轴的正半轴上把问题转化为二元一次方程根的问题是解题的关键，在（2）中注意函数图象交点的求法，在（3）中用 P 点坐标表示出△PAB 的面积是解题的关键．本题涉及知识点较多，计算量较大，有一定的难度．

16.（2015•铜仁市）如图，关于 x 的二次函数 $y=x^2+bx+c$ 的图象与 x 轴交于点 A（1，0）和点 B 与 y 轴交于点 C（0，3），抛物线的对称轴与 x 轴交于点 D．（1）求二次函数的表达式；
（2）在 y 轴上是否存在一点 P，使△PBC 为等腰三角形？若存在．请求出点 P 的坐标）；

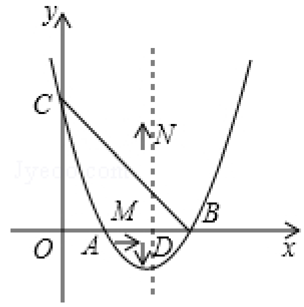
（3）有一个点 M 从点 A 出发，以每秒 1 个单位的速度在 AB 上向点 B 运动，另一个点 N 从 点 D 与点 M 同时出发，以每秒 2 个单位的速度在抛物线的对称轴上运动，当点 M 到达点 B 时，点 M、N 同时停止运动，问点 M、N 运动到何处时，△ MNB 面积最大，试求出最大面积.

【考点】二次函数综合题. 【专题】压轴题.

【分析】（1）代入 A（1，0）和 C（0，3），解方程组即可；

（2）求出点 B 的坐标，再根据勾股定理得到 BC，当△ PBC 为等腰三角形时分三种情况进行讨论：①CP=CB；②BP=BC；③PB=PC；

（3）设 AM=t 则 DN=2t，由 AB=2，得 BM=2 - t，S△ MNB=$\frac{1}{2}$×（2 - t）×2t= - t^2+2t，运用二次函数的顶点坐标解决问题；此时点 M 在 D 点，点 N 在对称轴上 x 轴上方 2 个单位处或点 N 在对称轴上 x 轴下方 2 个单位处.



【解答】解：（1）把 A（1，0）和 C（0，3）代入 $y=x^2+bx+c$，

$\begin{cases}1+b+c=0\\c=3\end{cases}$ 解得：b= - 4，c=3，

∴ 二次函数的表达式为：$y=x^2-4x+3$；

（2）令 y=0，则 $x^2-4x+3=0$，解得：x=1 或 x=3，

∴ B（3，0），∴ BC=$3\sqrt{2}$，

点 P 在 y 轴上，当△ PBC 为等腰三角形时分三种情况进行讨论：如图 1，

①当 CP=CB 时，PC=$3\sqrt{2}$，

∴ OP=OC+PC=3+$3\sqrt{2}$或 OP=PC - OC=$3\sqrt{2}$ - 3

∴ P_1（0，3+$3\sqrt{2}$），P_2（0，3 - $3\sqrt{2}$）；

②当 PB=PC 时，OP=OB=3，

∴ P_3（0， - 3）；

③当 BP=BC 时，

∵ OC=OB=3

∴ 此时 P 与 O 重合，

∴ P_4（0，0）；

综上所述，点 P 的坐标为：（0，3+$3\sqrt{2}$）或（0，3 - $3\sqrt{2}$）或（0， - 3）或（0，0）；

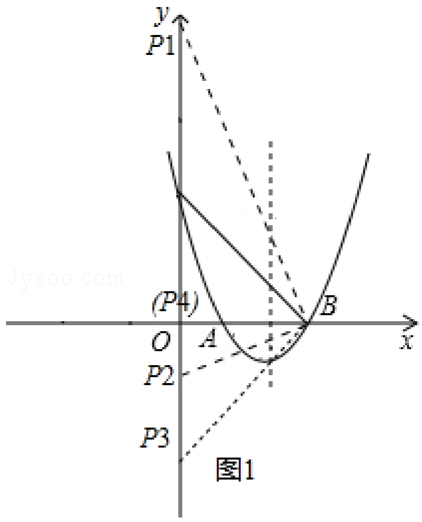


图1

（3）如图 2，设 AM=t，由 AB=2，得 BM=2 - t，则 DN=2t，

∴ S△ MNB=$\frac{1}{2}$×（2 - t）×2t= - t^2+2t= - （t - 1）^{2}+1，

即当 M（2，0）、N（2，2）或（2， - 2）时△ MNB 面积最大，最大面积是 1.

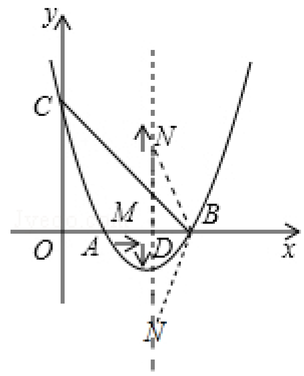


图2

【点评】本题是二次函数的综合题型，其中涉及到运用待定系数法求二次函数，等腰三角形的性质，轴对称的性质等知识，运用数形结合、分类讨论及方程思想是解题的关键.

17．（2015•资阳）已知直线 $y=kx+b$（$k\neq0$）过点 F（0，1），与抛物线 $y=\frac{1}{4}x^2$ 相交于 B、C 两点．

（1）如图 1，当点 C 的横坐标为 1 时，求直线 BC 的解析式；

（2）在（1）的条件下，点 M 是直线 BC 上一动点，过点 M 作 y 轴的平行线，与抛物线交于点 D，是否存在这样的点 M，使得以 M、D、O、F 为顶点的四边形为平行四边形？若存在，求出点 M 的坐标；若不存在，请说明理由；（3）如图 2，设 B（m．n）（m＜0），过点 E（0．－1）的直线 l∥ x 轴，BR⊥l 于 R，CS⊥l 于 S，连接 FR、FS．试判断△ RFS 的形状，并说明理由．

【考点】二次函数综合题．　【专题】压轴题．

【分析】（1）首先求出 C 的坐标，然后由 C、F 两点用待定系数法求解析式即可；

（2）因为 DM∥ OF，要使以 M、D、O、F 为顶点的四边形为平行四边形，则 DM=OF，设 M（x，$-\frac{3}{4}x+1$），则 D（x，$\frac{1}{4}x^2$），表示出 DM，分类讨论列方程求解；

（3）根据勾股定理求出 BR=BF，再由 BR∥ EF 得到∠ RFE=∠ BFR，同理可得∠ EFS=∠ CFS，所以∠ RFS=$\frac{1}{2}$∠ BFC=90°，所以△ RFS 是直角三角形．

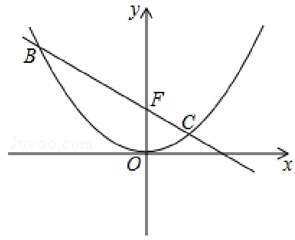


图1

【解答】解：（1）因为点 C 在抛物线上，所以 C（1，$\frac{1}{4}$），

又∵ 直线 BC 过 C、F 两点，故得方程组：$\begin{cases}b=1\\k+b=\frac{1}{4}\end{cases}$解之，得$\begin{cases}k=-\frac{3}{4}\\b=1\end{cases}$，

所以直线 BC 的解析式为：$y=-\frac{3}{4}x+1$；

（2）要使以 M、D、O、F 为顶点的四边形为平行四边形，则 MD=OF，如图 1 所示，

设 M（x，$-\frac{3}{4}x+1$），则 D（x，$\frac{1}{4}x^2$），

∵ MD∥ y 轴，∴ MD=$-\frac{3}{4}x+1-\frac{1}{4}x^2$，

由 MD=OF，可得$|-\frac{3}{4}x+1-\frac{1}{4}x^2|=1$，

①当 $-\frac{3}{4}x+1-\frac{1}{4}x^2=1$ 时，解得 $x_1=0$（舍）或 $x_1=-3$，所以 M（-3，$\frac{13}{4}$），

②当 $-\frac{3}{4}x+1-\frac{1}{4}x^2$，$=-1$ 时，解得，$x=\frac{-3\pm\sqrt{41}}{2}$，

所以 M（$\frac{-3-\sqrt{41}}{2}$，$\frac{17+3\sqrt{41}}{8}$）或 M（$\frac{-3+\sqrt{41}}{2}$，$\frac{17-3\sqrt{41}}{8}$），

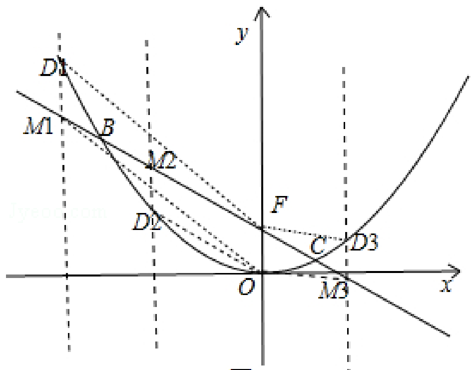


图1

综上所述，存在这样的点 M，使以 M、D、O、F 为顶点的四边形为平行四边形，

M 点坐标为（-3，$\frac{13}{4}$）或（$\frac{-3-\sqrt{41}}{2}$，$\frac{17+3\sqrt{41}}{8}$）或（$\frac{-3+\sqrt{41}}{2}$，$\frac{17-3\sqrt{41}}{8}$）；

（3）过点 F 作 FT⊥BR 于点 T，如图 2 所示，

∵ 点 B（m，n）在抛物线上，∴ $m^2=4n$，

在 Rt△ BTF 中，$BF=\sqrt{BT^2+TF^2}=\sqrt{(n-1)^2+m^2}=\sqrt{(n-1)^2+4n}$

$=\sqrt{(n+1)^2}$，

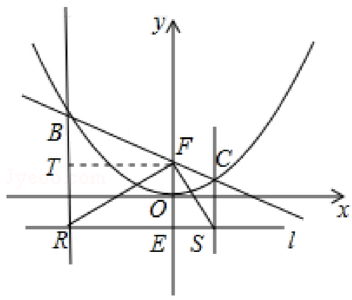


图2

∵ n＞0，∴ BF=n+1，

又∵ BR=n+1，∴ BF=BR．

∴∠ BRF=∠ BFR，又∵ BR⊥l，EF⊥l，

∴ BR∥ EF，∴∠ BRF=∠ RFE，

∴∠ RFE=∠ BFR，

同理可得∠ EFS=∠ CFS，

∴∠RFS=$\frac{1}{2}$∠BFC=90°，

∴△RFS 是直角三角形．

【点评】本题主要考查了待定系数法求解析式，平行四边形的判定，平行线的性质，勾股定理以及分类讨论和数形结合等数学思想．

18．（2015•苏州）如图，已知二次函数 $y=x^2+(1-m)x-m$（其中 $0<m<1$）的图象与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左侧），与 y 轴交于点 C，对称轴为直线 l．设 P 为对称轴 l 上的点，连接 PA、PC，PA=PC

（1）∠ABC 的度数为<u> 45° </u>；（2）求 P 点坐标（用含 m 的代数式表示）；

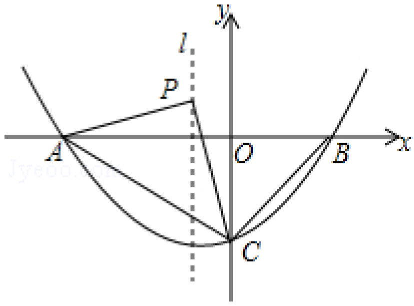
（3）在坐标轴上是否存在着点 Q（与原点 O 不重合），使得以 Q、B、C 为顶点的三角形与△PAC 相似，且线段 PQ 的长度最小？如果存在，求出所有满足条件的点 Q 的坐标；如果不存在，请说明理由．

【考点】二次函数综合题． 【专题】压轴题．

【分析】（1）首先求出 B 点坐标，进而得出 OB=OC=m，再利用等腰直角三角形的性质求出即可；

（2）作 PD⊥y 轴，垂足为 D，设 l 与 x 轴交于点 E，利用勾股定理 $AE^2+PE^2=CD^2+PD^2$，得出 P 点坐标即可；

（3）根据题意得出△QBC 是等腰直角三角形，可得满足条件的点 Q 的坐标为：（﹣m，0）或（0，m），进而分别分析求出符合题意的答案．



【解答】解：（1）令 x=0，则 y=﹣m，C 点坐标为：（0，﹣m），

令 y=0，则 $x^2+(1-m)x-m=0$，解得：$x_1=-1$，$x_2=m$，

∵$0<m<1$，点 A 在点 B 的左侧，∴B 点坐标为：（m，0），

∴OB=OC=m，∵∠BOC=90°，

∴△BOC 是等腰直角三角形，∠ABC=45°；故答案为：45°；

（2）如图 1，作 PD⊥y 轴，垂足为 D，设 l 与 x 轴交于点 E，

由题意得，抛物线的对称轴为：$x=\frac{-1+m}{2}$，设点 P 坐标为：（$\frac{-1+m}{2}$，n），

∵PA=PC，∴$PA^2=PC^2$，即 $AE^2+PE^2=CD^2+PD^2$，

∴ $\left(\frac{-1+m}{2}+1\right)^2+n^2=(n+m)^2+\left(\frac{1-m}{2}\right)^2$，解得：$n=\frac{1-m}{2}$，

∴P 点的坐标为：（$\frac{-1+m}{2}$，$\frac{1-m}{2}$）；

（3）存在点 Q 满足题意，∵P 点的坐标为：（$\frac{-1+m}{2}$，$\frac{1-m}{2}$），

∴ $PA^2+PC^2=AE^2+PE^2+CD^2+PD^2=\left(\frac{-1+m}{2}+1\right)^2+\left(\frac{1-m}{2}\right)^2+\left(\frac{1-m}{2}+m\right)^2+\left(\frac{1-m}{2}\right)^2=1+m^2$，

∵$AC^2=1+m^2$，∴$PA^2+PC^2=AC^2$，∴∠APC=90°，∴△PAC 是等腰直角三角形，

∵以 Q、B、C 为顶点的三角形与△PAC 相似，∴△QBC 是等腰直角三角形，

∴由题意可得满足条件的点 Q 的坐标为：（﹣m，0）或（0，m），

①如图 1，当 Q 点坐标为：（﹣m，0）时，若 PQ 与 x 轴垂直，

则$\frac{-1+m}{2}=-m$，解得：$m=\frac{1}{3}$，$PQ=\frac{1}{3}$，

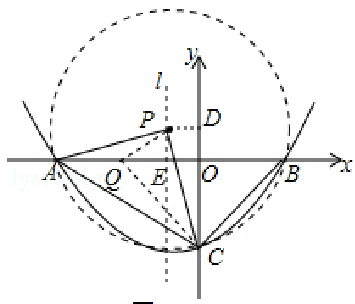


图1

若 PQ 与 x 轴不垂直，则 $PQ^2=PE^2+EQ^2=\left(\frac{1-m}{2}\right)^2+\left(\frac{-1+m}{2}+m\right)^2$

$$=\frac{5}{2}m^2-2m+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\left(m-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{10}$$

∵$0<m<1$，∴当 $m=\frac{2}{5}$时，PQ^2 取得最小值$\frac{1}{10}$，PQ 取得最小值$\frac{\sqrt{10}}{10}$，

∵$\frac{\sqrt{10}}{10}<\frac{1}{3}$，∴当 $m=\frac{2}{5}$，即 Q 点的坐标为：（$-\frac{2}{5}$，0）时，PQ 的长度最小，

②如图 2，当 Q 点的坐标为：（0，m）时，若 PQ 与 y 轴垂直，则$\frac{1-m}{2}=m$，解得：$m=\frac{1}{3}$，$PQ=\frac{1}{3}$，

若 PQ 与 y 轴不垂直，则 $PQ^2=PD^2+DQ^2=\left(\frac{1-m}{2}\right)^2+\left(m-\frac{1-m}{2}\right)^2=\frac{5}{2}m^2-2m+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}\left(m-\frac{2}{5}\right)^2+\frac{1}{10}$，

∵ $0<m<1$，∴ 当 $m=\frac{2}{5}$时，PQ^2 取得最小值$\frac{1}{10}$，PQ 取得最小值$\frac{\sqrt{10}}{10}$，

∵ $\frac{\sqrt{10}}{10}<\frac{1}{3}$，∴ 当 $m=\frac{2}{5}$，即 Q 点的坐标为：（0，$\frac{2}{5}$）时，PQ 的长度最小，

综上所述：当 Q 点坐标为：（$-\frac{2}{5}$，0）或（0，$\frac{2}{5}$）时，PQ 的长度最小．

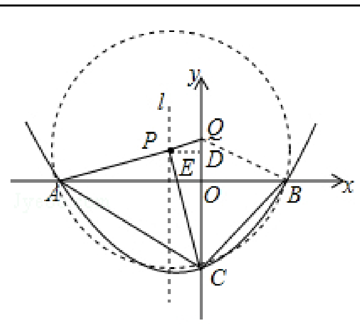


图2

【点评】此题主要考查了二次函数综合以及勾股定理和二次函数最值求法等知识，利用分类讨论得出 Q 点坐标是解题关键．

19．（2015•临沂）在平面直角坐标系中，O 为原点，直线 $y=-2x-1$ 与 y 轴交于点 A，与直线 $y=-x$ 交于点 B，点 B 关于原点的对称点为点 C．（1）求过 A，B，C 三点的抛物线的解析式；

（2）P 为抛物线上一点，它关于原点的对称点为 Q．

①当四边形 PBQC 为菱形时，求点 P 的坐标；

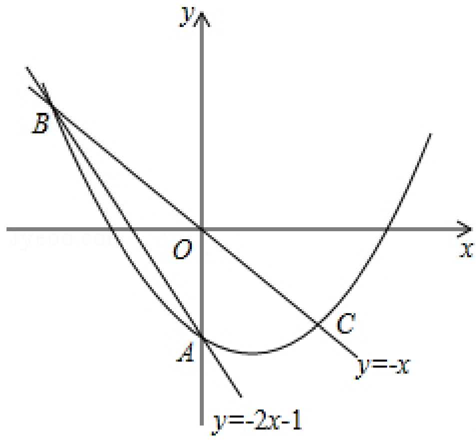
②若点 P 的横坐标为 t（$-1<t<1$），当 t 为何值时，四边形 PBQC 面积最大？并说明理由．

【考点】二次函数综合题．　【专题】压轴题．

【分析】（1）联立两直线解析式可求得 B 点坐标，由关于原点对称可求得 C 点坐标，由直线 $y=-2x-1$ 可求得 A 点坐标，再利用待定系数法可求得抛物线解析式；

（2）①当四边形 PBQC 为菱形时，可知 PQ⊥BC，则可求得直线 PQ 的解析式，联立抛物线解析式可求得 P 点坐标；②过 P 作 PD⊥BC，垂足为 D，作 x 轴的垂线，交直线 BC 于点 E，由∠PED=∠AOC，可知当 PE 最大时，PD 也最大，用 t 可表示出 PE 的长，可求得取最大值时的 t 的值．

【解答】解：



（1）联立两直线解析式可得$\begin{cases} y=-x \\ y=-2x-1 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$，

∴ B 点坐标为（－1，1），又 C 点为 B 点关于原点的对称点，

∴ C 点坐标为（1，－1），∵ 直线 $y=-2x-1$ 与 y 轴交于点 A，

∴ A 点坐标为（0，－1），设抛物线解析式为 $y=ax^2+bx+c$，

把 A、B、C 三点坐标代入可得$\begin{cases} -1=c \\ 1=a-b+c \\ -1=a+b+c \end{cases}$，解得$\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=-1 \end{cases}$，

∴ 抛物线解析式为 $y=x^2-x-1$；

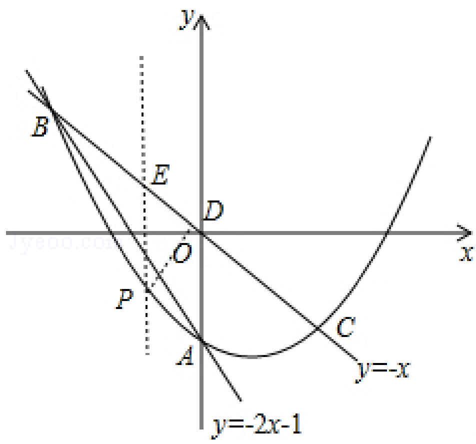
（2）①当四边形 PBQC 为菱形时，则 PQ⊥BC，

∵ 直线 BC 解析式为 $y=-x$，∴ 直线 PQ 解析式为 $y=x$，

联立抛物线解析式可得$\begin{cases} y=x \\ y=x^2-x-1 \end{cases}$，解得$\begin{cases} x=1-\sqrt{2} \\ y=1-\sqrt{2} \end{cases}$或$\begin{cases} x=1+\sqrt{2} \\ y=1+\sqrt{2} \end{cases}$，

∴ P 点坐标为（$1-\sqrt{2}$，$1-\sqrt{2}$）或（$1+\sqrt{2}$，$1+\sqrt{2}$）；

②当 t=0 时，四边形 PBQC 的面积最大．理由如下：



如图，过 P 作 PD⊥BC，垂足为 D，作 x 轴的垂线，交直线 BC 于点 E，

则 $S_{\text{四边形}PBQC}=2S_{\triangle PBC}=2\times\frac{1}{2}BC\bullet PD=BC\bullet PD$，

∵ 线段 BC 长固定不变，

∴ 当 PD 最大时，四边形 PBQC 面积最大，

又∠PED=∠AOC（固定不变），

∴ 当 PE 最大时，PD 也最大，

∵ P 点在抛物线上，E 点在直线 BC 上，

∴ P 点坐标为（t，t^2-t-1），E 点坐标为（t，－t），

∴ $PE=-t-(t^2-t-1)=-t^2+1$，

∴当 t=0 时，PE 有最大值 1，此时 PD 有最大值，即四边形 PBQC 的面积最大.

【点评】本题主要考查二次函数的综合应用，涉及待定系数法、点的对称、菱形的判定和性质、三角形的面积和二次函数的最值等知识点．在（1）中求得 A、B、C 三点的坐标是解题的关键，在（2）①中得出直线 PQ 的解析式是解题的关键，在②中确定出四边形 PBQC 面积最大的条件是解题的关键．本题涉及知识点较多，综合性较强，其中第（2）②小题是难点.

20.（2015•巴中）如图，在平面直角坐标系 xOy 中，二次函数 $y=ax^2+bx-4$（$a\neq0$）的图象与 x 轴交于 A（﹣2，0）、C（8，0）两点，与 y 轴交于点 B，其对称轴与 x 轴交于点 D.（1）求该二次函数的解析式；

（2）如图 1，连结 BC，在线段 BC 上是否存在点 E，使得△CDE 为等腰三角形？若存在，求出所有符合条件的点 E 的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）如图 2，若点 P（m，n）是该二次函数图象上的一个动点（其中 m＞0，n＜0），连结 PB，PD，BD，求△BDP 面积的最大值及此时点 P 的坐标.

【考点】二次函数综合题．　【专题】压轴题.

【分析】（1）采用待定系数法求得二次函数的解析式；

（2）先求得直线 BC 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x-4$，则可设 E（m，$\frac{1}{2}m-4$），然后分三种情况讨论即可求得；

（3）利用△PBD 的面积 $S=S_{梯形}-S_{\triangle BOD}-S_{\triangle PFD}$ 即可求得.

【解答】解：（1）∵二次函数 $y=ax^2+bx-4$（$a\neq0$）的图象与 x 轴交于 A（﹣2，0）、C（8，0）两点，

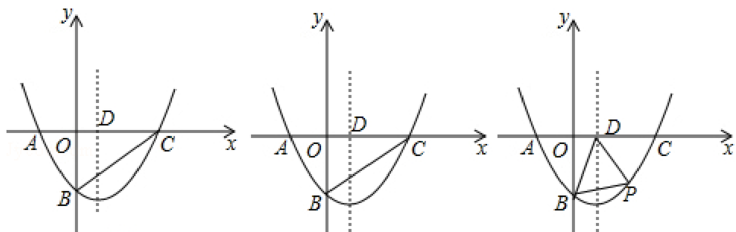


图1　备用图　图2

∴$\begin{cases}4a-2b-4=0\\64a+8b-4=0\end{cases}$，解得$\begin{cases}a=\frac{1}{4}\\b=-\frac{3}{2}\end{cases}$，

∴该二次函数的解析式为 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x-4$；

（2）由二次函数 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x-4$ 可知对称轴 x=3，

∴D（3，0），∵C（8，0），∴CD=5，由二次函数 $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{2}x-4$ 可知 B（0，﹣4），

设直线 BC 的解析式为 y=kx+b，∴$\begin{cases}8k+b=0\\b=-4\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=\frac{1}{2}\\b=-4\end{cases}$，∴直线 BC 的解析式为 $y=\frac{1}{2}x-4$，

设 E（m，$\frac{1}{2}m-4$），当 DC=CE 时，$EC^2=(m-8)^2+(\frac{1}{2}m-4)^2=CD^2$，

即 $(m-8)^2+(\frac{1}{2}m-4)^2=5^2$，解得 $m_1=8-2\sqrt{5}$，$m_2=8+2\sqrt{5}$（舍去），∴E（$8-2\sqrt{5}$，$-\sqrt{5}$）；

当 DC=DE 时，$ED^2=(m-3)^2+(\frac{1}{2}m-4)^2=CD^2$，即 $(m-3)^2+(\frac{1}{2}m-4)^2=5^2$，解得 $m_3=0$，$m_4=8$（舍去），

∴E（0，﹣4）；当 EC=DE 时，$(m-8)^2+(\frac{1}{2}m-4)^2=(m-3)^2+(\frac{1}{2}m-4)^2$ 解得 $m_5=5.5$，

∴E（$\frac{11}{2}$，$-\frac{5}{4}$）．综上，存在点 E，使得△CDE 为等腰三角形，所有符合条件的

点 E 的坐标为（$8-2\sqrt{5}$，$-\sqrt{5}$）、（0，﹣4）、（$\frac{11}{2}$，$-\frac{5}{4}$）.

（3）过点 P 作 y 轴的平行线交 x 轴于点 F，∵P 点的横坐标为 m，∴P 点的纵坐标为 $\frac{1}{4}m^2-\frac{3}{2}m-4$，

∵△PBD 的面积 $S=S_{梯形}-S_{\triangle BOD}-S_{\triangle PFD}=\frac{1}{2}m[4-(\frac{1}{4}m^2-\frac{3}{2}m-4)]-\frac{1}{2}(m-3)[-(\frac{1}{4}m^2-\frac{3}{2}m-4)]-\frac{1}{2}\times3\times4$

$=-\frac{3}{8}m^2+\frac{17}{4}m=-\frac{3}{8}(m-\frac{17}{3})^2+\frac{289}{24}$

∴当 $m=\frac{17}{3}$时，△PBD 的最大面积为$\frac{289}{24}$，

∴点 P 的坐标为（$\frac{17}{3}$，$-\frac{161}{36}$）.

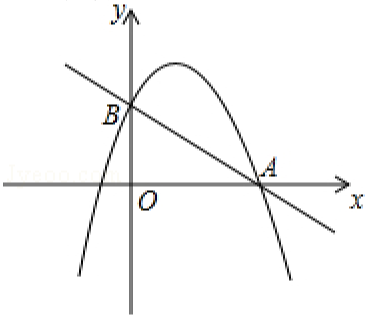
【点评】此题考查了学生的综合应用能力，要注意数形结合，认真分析，仔细识图．注意待定系数法求函数的解析式，注意函数交点坐标的求法，注意三角形面积的求法．

21．（2015•黔东南州）如图，已知二次函数 $y_1=-x^2+\frac{13}{4}x+c$ 的图象与 x 轴的一个交点为 A（4，0），与 y 轴的交点为 B，过 A、B 的直线为 $y_2=kx+b$．

（1）求二次函数 y_1 的解析式及点 B 的坐标；

（2）由图象写出满足 $y_1<y_2$ 的自变量 x 的取值范围；

（3）在两坐标轴上是否存在点 P，使得△ABP 是以 AB 为底边的等腰三角形？若存在，求出 P 的坐标；若不存在，说明理由．



【考点】二次函数综合题．

【专题】压轴题．

【分析】（1）根据待定系数法，可得函数解析式，根据自变量为零，可得 B 点坐标；

（2）根据一次函数图象在上方的部分是不等式的解集，可得答案；

（3）根据线段垂直平分线上的点到线段两点间的距离相等，可得 P 在线段的垂直平分线上，根据直线 AB，可得 AB 的垂直平分线，根据自变量为零，可得 P 在 y 轴上，根据函数值为零，可得 P 在 x 轴上．

【解答】解：（1）将 A 点坐标代入 y_1，得

$-16+13+c=0$．

解得 $c=3$，

二次函数 y_1 的解析式为 $y=-x^2+\frac{13}{4}x+3$，

B 点坐标为（0，3）；

（2）由图象得直线在抛物线上方的部分，是 $x<0$ 或 $x>4$，

∴ $x<0$ 或 $x>4$ 时，$y_1<y_2$；

（3）直线 AB 的解析式为 $y=-\frac{3}{4}x+3$，

AB 的中点为（2，$\frac{3}{2}$）

AB 的垂直平分线为 $y=\frac{4}{3}x-\frac{7}{6}$

当 x=0 时，y=－$\frac{7}{6}$，P$_1$（0，－$\frac{7}{6}$），

当 y=0 时，x=$\frac{9}{4}$，P$_2$（$\frac{7}{8}$，0），

综上所述：P$_1$（0，－$\frac{7}{6}$），P$_2$（$\frac{7}{8}$，0），使得△ABP 是以 AB 为底边的等腰三角形．

【点评】本题考察了二次函数综合题，（1）利用待定系数法求函数解析式；（2）利用函数与不等式的关系求不等式的解集；（3）利用线段垂直平分线的性质，利用直线 AB 得出 AB 的垂直平分线是解题关键．

22．（2015•孝感）在平面直角坐标系中，抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 与 x 轴交于点 A，B，与 y 轴交于点 C，直线 y=x+4 经过 A，C 两点．（1）求抛物线的解析式；

（2）在 AC 上方的抛物线上有一动点 P．

①如图 1，当点 P 运动到某位置时，以 AP，AO 为邻边的平行四边形第四个顶点恰好也在抛物线上，求出此时点 P 的坐标；②如图 2，过点 O，P 的直线 y=kx 交 AC 于点 E，若 PE：OE=3：8，求 k 的值．

【考点】二次函数综合题．　【专题】压轴题．

【分析】（1）由直线的解析式 y=x+4 易求点 A 和点 C 的坐标，把 A 和 C 的坐标分别代入 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 求出 b 和 c 的值即可得到抛物线的解析式；

（2）①若以 AP，AO 为邻边的平行四边形的第四个顶点 Q 恰好也在抛物线上，则 PQ∥AO，再根据抛物线的对称轴可求出点 P 的横坐标，由（1）中的抛物线解析式，进而可求出其纵坐标，问题得解；

②过 P 点作 PF∥OC 交 AC 于点 F，因为 PF∥OC，所以△PEF∽△OEC，由相似三角形的性质：对应边的比值相等可求出 PF 的长，进而可设点点 F（x，x+4），利用 $\left(-\frac{1}{2}x^2-x+4\right)-(x+4)=\frac{3}{2}$，可求出 x 的值，解方程求出 x 的值可得点 P 的坐标，代入直线 y=kx 即可求出 k 的值．

【解答】解：（1）∵直线 y=x+4 经过 A，C 两点，

∴A 点坐标是（－4，0），点 C 坐标是（0，4），

又∵抛物线过 A，C 两点，

∴$\begin{cases}-\frac{1}{2}\times(-4)^2-4b+c=0\\ c=4\end{cases}$，解得：$\begin{cases}b=-1\\ c=4\end{cases}$，

∴抛物线的解析式为 $y=-\frac{1}{2}x^2-x+4$．

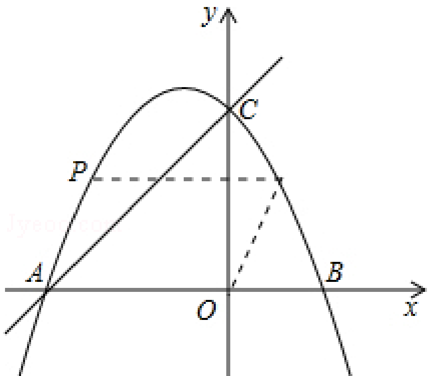


图1

（2）①如图 1∵ $y=-\frac{1}{2}x^2-x+4$，

∴抛物线的对称轴是直线 x=－1．

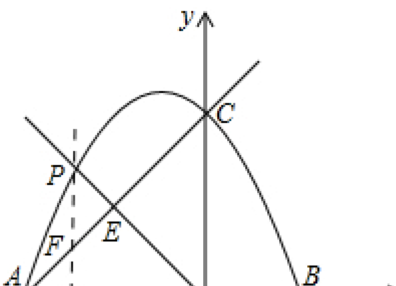
∵以 AP，AO 为邻边的平行四边形的第四个顶点 Q 恰好也在抛物线上，

∴PQ∥AO，PQ=AO=4．∵P，Q 都在抛物线上，

∴P，Q 关于直线 x=－1 对称，

∴P 点的横坐标是－3，

∴当 x=－3 时，$y=-\frac{1}{2}\times(-3)^2-(-3)+4=\frac{5}{2}$，



$\therefore$ P 点的坐标是（-3，$\frac{5}{2}$）；

②过 P 点作 PF∥OC 交 AC 于点 F，

$\because$ PF∥OC，

$\therefore$ △PEF∽△OEC，$\therefore \frac{PE}{OE}=\frac{PF}{OC}$.

又$\because \frac{PE}{OE}=\frac{3}{8}$，$OC=4$，$\therefore PF=\frac{3}{2}$，

设点 F（x，x+4），

$\therefore$ $\left(-\frac{1}{2}x^2-x+4\right)-(x+4)=\frac{3}{2}$，

化简得：$x^2+4x+3=0$，解得：$x_1=-1$，$x_2=-3$.

当 $x=-1$ 时，$y=\frac{9}{2}$；当 $x=-3$ 时，$y=\frac{5}{2}$，

即 P 点坐标是（-1，$\frac{9}{2}$）或（-3，$\frac{5}{2}$）.

又$\because$ 点 P 在直线 y=kx 上，

$\therefore k=-\frac{9}{2}$或$k=-\frac{5}{6}$.

【点评】本题是二次函数综合题，考查了待定系数法求函数解析式，平行四边形的判定和性质，相似三角形的判定和性质，解一元二次方程，题目综合性较强，难度不大，是一道很好的中考题.

23.（2015•眉山）如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 的顶点 D 的坐标为（1，$-\frac{9}{2}$），且与 x 轴交于 A、B 两点，与 y 轴交于 C 点，A 点的坐标为（4，0）. P 点是抛物线上的一个动点，且横坐标为 m.

（1）求抛物线所对应的二次函数的表达式；

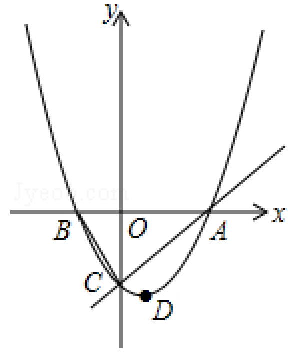
（2）若动点 P 满足∠PAO 不大于 45°，求 P 点的横坐标 m 的取值范围；

（3）当 P 点的横坐标 $m<0$ 时，过 P 点作 y 轴的垂线 PQ，垂足为 Q. 问：是否存在 P 点，使∠QPO=∠BCO？若存在，请求出 P 点的坐标；若不存在，请说明理由.

【考点】二次函数综合题.　【专题】压轴题.

【分析】（1）根据函数值相等的点关于对称轴对称，可得 B 点坐标，根据待定系数法，可得函数解析式；

（2）根据等腰直角三角形的性质，可得射线 AC、AD，根据角越小角的对边越小，可得 PA 在在射线 AC 与 AD 之间，根据解方程组，可得 E 点的横坐标，根据 E、C 点的横坐标，可得答案；



（3）根据相似三角形的判定与性质，可得$\frac{PQ}{CO}=\frac{OQ}{OB}$，根据解方程组，可得 P 点坐标.

【解答】解：（1）由 A、B 点的函数值相等，得 A、B 关于对称轴对称.

A（4－0），对称轴是 x=1，得 B（－2，0）. 将 A、B、D 点的坐标代入解析式，得

$$\begin{cases}4a-2b+c=0\\16a+4b+c=0\\a+b+c=0\end{cases}，解得\begin{cases}a=\frac{1}{2}\\b=-1\\c=-4\end{cases}，$$

抛物线所对应的二次函数的表达式 $y=\frac{1}{2}x^2-x-4$；

（2）如图 1 作 C 点关于原点的对称点 D，OC=OD=OA=4，∠OAC=∠DAO=45°，AP 在射线 AC 与 AD 之间，∠PAO＜45°，直线 AD 的解析式为 $y=-x+4$，

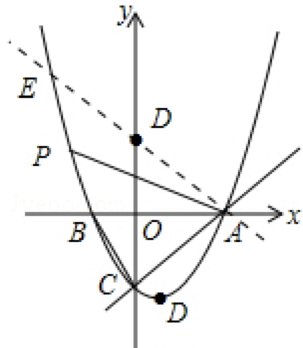


图 1

联立 AD 于抛物线，得$\begin{cases}y=-x+4\\y=\frac{1}{2}x^2-x-4\end{cases}$，解得 $x=-4$ 或 $x=4$，

$\because$ E 点的横坐标是－4，C 点的横坐标是 0，P 点的横坐标的取值范围是 $-4\le m\le 0$；

（3）存在 P 点，使∠QPO=∠BCO，如图 2，

设 P（m，$\frac{1}{2}m^2-m-4$），当点 P 在第二象限时，

由∠QPO=∠BCO，∠PQO=CBO=90°.

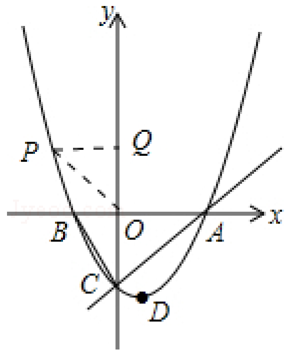


图 2

∴△PQO∽△COB，∴$\frac{PQ}{CO}=\frac{OQ}{OB}$即$\frac{-m}{4}=\frac{\frac{1}{2}m^2-m-4}{2}$，

化简，得 $m^2-3m-8=0$.

解得 $m=\frac{1-\sqrt{33}}{2}$，$m=\frac{1+\sqrt{33}}{2}$（不符合题意，舍），

$\frac{1}{2}m^2-m-4=\frac{1}{2}(\frac{1-\sqrt{33}}{2})^2-\frac{1-\sqrt{33}}{2}-4=\frac{\sqrt{33}-1}{4}$，

P 点坐标为（$\frac{1-\sqrt{33}}{2}$，$\frac{\sqrt{33}-1}{4}$）.

当点 P 在第三象限时，同理可得点 P 为（m，$\frac{1}{2}m$）

代入 $y=\frac{1}{2}x^2-x-4$，得$\frac{1}{2}m=\frac{1}{2}m^2-m-4$，解得 $m=\frac{3\pm\sqrt{41}}{2}$，

∵ $m<0$

∴P（$\frac{3-\sqrt{41}}{2}$，$\frac{3-\sqrt{41}}{4}$），

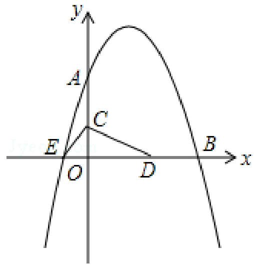
∴满足条件的点为 P（$\frac{1-\sqrt{33}}{2}$，$\frac{\sqrt{33}-1}{4}$），或 P（$\frac{3-\sqrt{41}}{2}$，$\frac{3-\sqrt{41}}{4}$）.

【点评】本题考察了二次函数综合题，利用待定系数法求函数解析式，利用了角与对边的关系：角越小角的对边越小得出 PA 在在射线 AC 与 AD 之间是解题关键，利用了相似三角形的判定与性质.

24.（2015•桂林）如图，已知抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 与坐标轴分别交于点 A（0，8）、B（8，0）和点 E，动点 C 从原点 O 开始沿 OA 方向以每秒 1 个单位长度移动，动点 D 从点 B 开始沿 BO 方向以每秒 1 个单位长度移动，动点 C、D 同时出发，当动点 D 到达原点 O 时，点 C、D 停止运动.（1）直接写出抛物线的解析式：__$y=-\frac{1}{2}x^2+3x+8$__；

（2）求△CED 的面积 S 与 D 点运动时间 t 的函数解析式；当 t 为何值时，△CED 的面积最大？最大面积是多少？

（3）当△CED 的面积最大时，在抛物线上是否存在点 P（点 E 除外），使△PCD 的面积等于△CED 的最大面积？若存在，求出 P 点的坐标；若不存在，请说明理由.



【考点】二次函数综合题.【专题】压轴题.

【解答】解：（1）将点 A（0，8）、B（8，0）代入抛物线 $y=-\frac{1}{2}x^2+bx+c$ 得：$\begin{cases}c=8\\-\frac{1}{2}\times64+8b+c=0\end{cases}$，

解得：b=3，c=8，∴抛物线的解析式为：$y=-\frac{1}{2}x^2+3x+8$，

（2）∵点 A（0，8）、B（8，0），∴OA=8，OB=8，

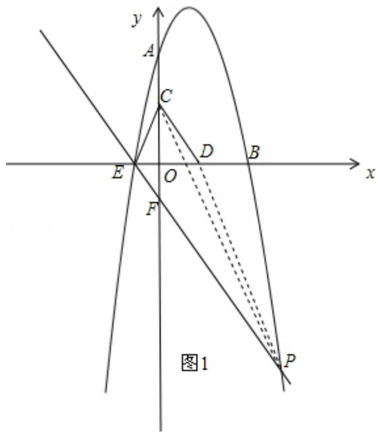


图1

令 y=0，得：$-\frac{1}{2}x^2+3x+8=0$，解得：$x_1 8$，$x_2=2$，∵点 E 在 x 轴的负半轴上，

∴点 E（－2，0），∴OE=2，根据题意得：当 D 点运动 t 秒时，BD=t，OC=t，

∴OD=8－t，∴DE=OE+OD=10－t，∴$S=\frac{1}{2}$•DE•OC=$\frac{1}{2}$•（10－t）•t=$-\frac{1}{2}t^2+5t$，

即 $S=-\frac{1}{2}t^2+5t=-\frac{1}{2}(t-5)^2+\frac{25}{2}$，∴当 t=5 时，$S_{最大}=\frac{25}{2}$；

（3）由（2）知：当 t=5 时，$S_{最大}=\frac{25}{2}$，∴当 t=5 时，OC=5，OD=3，

∴C（0，5），D（3，0），由勾股定理得：CD=$\sqrt{34}$，

设直线 CD 的解析式为：y=kx+b，将 C（0，5），D（3，0），代入上式得：$k=-\frac{5}{3}$，b=5，

∴ 直线 CD 的解析式为：$y=-\frac{5}{3}x+5$，过 E 点作 EF∥CD，交抛物线与点 P，如图 1，

设直线 EF 的解析式为：$y=-\frac{5}{3}x+b$，将 E（﹣2，0）代入得：$b=-\frac{10}{3}$，

∴ 直线 EF 的解析式为：$y=-\frac{5}{3}x-\frac{10}{3}$，将 $y=-\frac{5}{3}x-\frac{10}{3}$，与 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x+8$ 联立成方程组

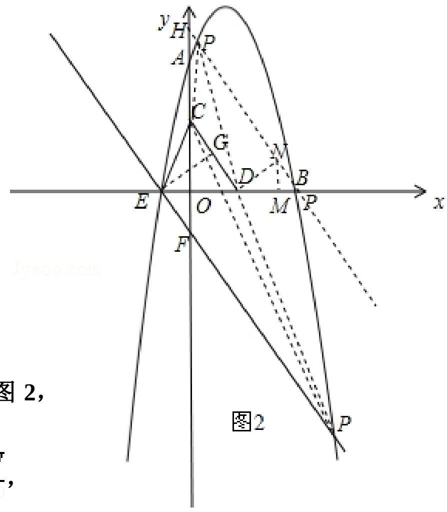


图2

得：$\begin{cases} y=-\frac{5}{3}x-\frac{10}{3} \\ y=-\frac{1}{2}x^2+3x+8 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} x_1=-2 \\ y_1=0 \end{cases}$，$\begin{cases} x_2=\frac{34}{3} \\ y_2=-\frac{200}{9} \end{cases}$，∴ P（$\frac{34}{3}$，$-\frac{200}{9}$）；

过点 E 作 EG⊥CD，垂足为 G，∵ 当 t=5 时，$S_{\triangle ECD}=\frac{1}{2}\cdot CD\cdot EG=\frac{25}{2}$，∴ $EG=\frac{25\sqrt{34}}{34}$，

过点 D 作 DN⊥CD，垂足为 N，且使 $DN=\frac{25\sqrt{34}}{34}$，过点 N 作 NM⊥x 轴，垂足为 M，如图 2，

可得△EGD∽△DMN，∴ $\frac{EG}{DM}=\frac{ED}{DN}$，即：$\frac{\frac{25\sqrt{34}}{34}}{DM}=\frac{5}{\frac{25\sqrt{34}}{34}}$，解得：$DM=\frac{125}{34}$，∴ $OM=\frac{227}{34}$，

由勾股定理得：$MN=\sqrt{DN^2-DM^2}=\frac{75}{34}$，∴ N（$\frac{227}{34}$，$\frac{75}{34}$），过点 N 作 NH∥CD，与抛物线交与点 P，如图 2，

设直线 NH 的解析式为：$y=-\frac{5}{3}x+b$，将 N（$\frac{227}{34}$，$\frac{75}{34}$），代入上式得：$b=\frac{40}{3}$，∴ 直线 NH 的解析式为：$y=-\frac{5}{3}x+\frac{40}{3}$，

将 $y=-\frac{5}{3}x+\frac{40}{3}$，与 $y=-\frac{1}{2}x^2+3x+8$ 联立成方程组得：$\begin{cases} y=-\frac{5}{3}x+\frac{40}{3} \\ y=-\frac{1}{2}x^2+3x+8 \end{cases}$，解得：$\begin{cases} x_1=8 \\ y_1=0 \end{cases}$，$\begin{cases} x_2=\frac{4}{3} \\ y_2=\frac{100}{9} \end{cases}$，

∴ P（8，0）或 P（$\frac{4}{3}$，$\frac{100}{9}$），

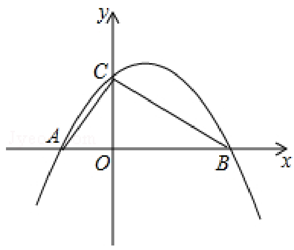
综上所述：当△CED 的面积最大时，在抛物线上存在点 P（点 E 除外），使△PCD 的面积等于△CED 的最大面积，点 P 的坐标为：P（$\frac{34}{3}$，$-\frac{200}{9}$）或 P（8，0）或 P（$\frac{4}{3}$，$\frac{100}{9}$）.

【点评】此题考查了二次函数的综合题，主要涉及了以下知识点：用待定系数法求函数关系式，函数的最值问题，三角形的面积公式及用二元一次方程组求交点问题等．解决（3）用到的知识点是两条平行线间的距离处处相等．

25．（2015•遂宁）如图，已知抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 经过 A（﹣2，0），B（4，0），C（0，3）三点．

（1）求该抛物线的解析式；（2）在 y 轴上是否存在点 M，使△ACM 为等腰三角形？若存在，请直接写出所有满足要求的点 M 的坐标；若不存在，请说明理由；

（3）若点 P（t，0）为线段 AB 上一动点（不与 A，B 重合），过 P 作 y 轴的平行线，记该直线右侧与△ABC 围成的图形面积为 S，试确定 S 与 t 的函数关系式．



【考点】二次函数综合题．　【专题】压轴题．

【解答】解：（1）把 A（﹣2，0），B（4，0），C（0，3）代入抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 得：

$\begin{cases} c=3 \\ 0=4a-2b+c \\ 0=16a+4b+c \end{cases}$，解得：$\begin{cases} a=-\frac{3}{8} \\ b=\frac{3}{4} \\ c=3 \end{cases}$，则抛物线的解析式是：$y=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{4}x+3$；

（2）如图 1，作线段 CA 的垂直平分线，交 y 轴于 M，交 AC 与 N，连结 AM_1，则△AM_1C 是等腰三角形，

∵ $AC=\sqrt{OA^2+OC^2}=\sqrt{13}$，∴ $CN=\frac{\sqrt{13}}{2}$，∵ △CNM_1∽△COA，

∴ $\frac{CN}{CO}=\frac{CM_1}{CA}$，∴ $\frac{\frac{\sqrt{13}}{2}}{3}=\frac{CM_1}{\sqrt{13}}$，∴ $CM_1=\frac{13}{6}$，∴ $OM_1=OC-CM_1=3-\frac{13}{6}=\frac{5}{6}$，∴ M_1 的坐标是（0，$\frac{5}{6}$），

当 $CA=CM_2=\sqrt{13}$时，则△AM_2C 是等腰三角形，则 $OM_2=3+\sqrt{13}$，M_2 的坐标是（0，$3+\sqrt{13}$），

当 $CA=AM_3=\sqrt{13}$时，则△AM_3C 是等腰三角形，则 $OM_3=3$，M_3 的坐标是（0，﹣3），

当 $CA=CM_4=\sqrt{13}$时，则△ AM_4C 是等腰三角形，则 $OM_4=\sqrt{13}-3$，M_4 的坐标是（0，$3-\sqrt{13}$），

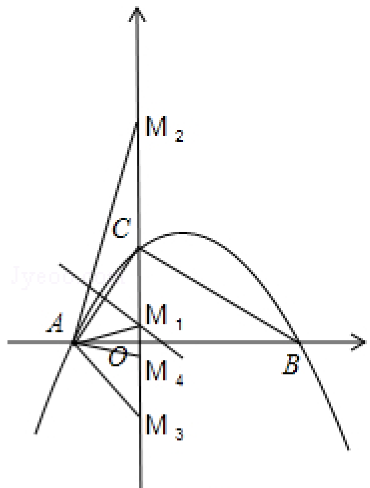


图1

（3）如图 2，当点 P 在 y 轴或 y 轴右侧时，

设直线与 BC 交与点 D，

∵ OB=4，OC=3，

∴ $S_{\triangle BOC}=6$，

∵ BP=BO﹣OP=4﹣t，

∴ $\frac{BP}{BO}=\frac{4-t}{4}$，

∵ △ BPD∽△ BOC，

∴ $\frac{S_{\triangle BDP}}{S_{\triangle BOC}}=\left(\frac{BP}{BO}\right)^2$，

∴ $\frac{S_{\triangle BPD}}{6}=\left(\frac{4-t}{4}\right)^2$，

∴ $S=S_{\triangle BPD}=\frac{3}{8}t^2-3t+6$（0≤t＜4）；

当点 P 在 y 轴左侧时，

设直线与 AC 交与点 E，

∵ OP=﹣t，AP=t+2，

∴ $\frac{AP}{AO}=\frac{t+2}{2}$，

∴ $\frac{S_{\triangle APE}}{S_{\triangle AOC}}=\left(\frac{AP}{AO}\right)^2$，

∴ $\frac{S_{\triangle APE}}{3}=\left(\frac{AP}{AO}\right)^2$，

∴ $S_{\triangle APE}=\frac{3(t+2)^2}{4}$，

∴ $S=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle APE}=9-\frac{3(t+2)^2}{4}=-\frac{3}{4}t^2-3t+6$（﹣2＜t＜0）.

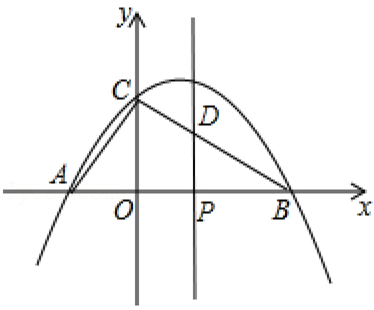


图2

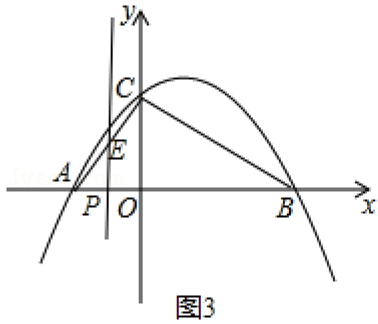


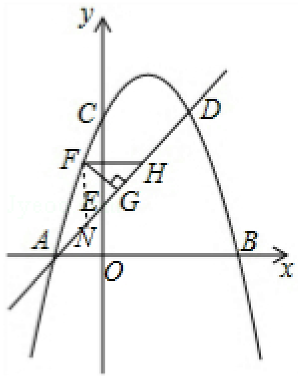
图3

【点评】此题考查了二次函数的综合，用到的知识点是二次函数的图象与性质、相似三角形的判定与性质、等腰三角形的判定、线段的垂直平分线等，关键是根据题意画出图形，作出辅助线，注意分类讨论，数形结合的数学思想方法.

26.（2015•重庆）如图，抛物线 $y=-x^2+2x+3$ 与 x 轴交于 A、B 两点（点 A 在点 B 的左边），与 y 轴交于点 C，点 D 和点 C 关于抛物线的对称轴对称，直线 AD 与 y 轴交于点 E.

（1）求直线 AD 的解析式；（2）如图 1，直线 AD 上方的抛物线上有一点 F，过点 F 作 FG⊥AD 于点 G，作 FH 平行于 x 轴交直线 AD 于点 H，求△ FGH 周长的最大值；

（3）点 M 是抛物线的顶点，点 P 是 y 轴上一点，点 Q 是坐标平面内一点，以 A，M，P，Q 为顶点的四边形是以 AM 为边的矩形．若点 T 和点 Q 关于 AM 所在直线对称，求点 T 的坐标．



【考点】二次函数综合题．　【专题】压轴题．

【解答】解：（1）当 x=0 时，$y=-x^2+2x+3=3$，则 C（0，3），

当 y=0 时，$-x^2+2x+3=0$，解得 $x_1=-1$，$x_2=3$，则 A（﹣1，0），B（3，0），

∵ $y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，∴ 抛物线对称轴为直线 x=1，

而点 D 和点 C 关于直线 x=1 对称，∴ D（2，3），设直线 AD 的解析式为 y=kx+b，

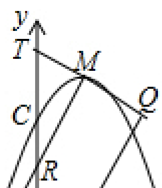
把 A（﹣1，0），D（2，3）分别代入得$\begin{cases}-k+b=0\\2k+b=3\end{cases}$，解得$\begin{cases}k=1\\b=1\end{cases}$，

∴ 直线 AD 的解析式为 y=x+1；

（2）当 x=0 时，y=x+1=1，则 E（0，1），∵ OA=OE，

∴ △ OAE 为等腰直角三角形，∴ ∠ EAO=45°，∵ FH∥ OA，

∴ △ FGH 为等腰直角三角形，过点 F 作 FN⊥x 轴交 AD 于 N，如图，



∴ FN⊥FH，∴△FNH 为等腰直角三角形，而 FG⊥HN，∴ GH=NG，

∴△FGH 周长等于△FGN 的周长，∵ $FG=GN=\frac{\sqrt{2}}{2}FN$，

∴△FGN 周长=（$1+\sqrt{2}$）FN，∴ 当 FN 最大时，△FGN 周长的最大，

设 F（x，$-x^2+2x+3$），则 N（x，x+1），

∴ $FN=-x^2+2x+3-x-1=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$，当 $x=\frac{1}{2}$时，FH 有最大值$\frac{9}{4}$，

∴△FGN 周长的最大值为（$1+\sqrt{2}$）$\times\frac{9}{4}=\frac{9+9\sqrt{2}}{4}$，

即△FGH 周长的最大值为$\frac{9+9\sqrt{2}}{4}$；

（3）直线 AM 交 y 轴于 R，$y=-x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$，则 M（1，4）

设直线 AM 的解析式为 y=mx+n，

把 A（－1，0）、M（1，4）分别代入得$\begin{cases}-m+n=0\\m+n=4\end{cases}$，解得$\begin{cases}m=2\\n=2\end{cases}$，

∴ 直线 AM 的解析式为 y=2x+2，当 x=0 时，y=2x+2=2，则 R（0，2），

当 AQ 为矩形 APQM 的对角线，如图 1，∵∠RAP=90°，而 AO⊥PR，

∴ Rt△AOR∽Rt△POA，∴ AO：OP=OR：OA，即 1：OP=2：1，解得 $OP=\frac{1}{2}$，

∴ P 点坐标为（0，$-\frac{1}{2}$），

∵ 点 A（－1，0）向上平移 4 个单位，向右平移 2 个单位得到 M（1，4），

∴ 点 P（0，$-\frac{1}{2}$）向上平移 4 个单位，向右平移 2 个单位得到 Q（2，$\frac{7}{2}$），

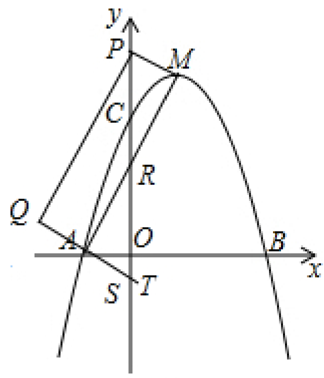
∵ 点 T 和点 Q 关于 AM 所在直线对称，∴ T 点坐标为（0，$\frac{9}{2}$）；

当 AP 为矩形 AMPQ 的对角线，反向延长 QA 交 y 轴于 S，如图 2，

同理可得 S 点坐标为（0，$-\frac{1}{2}$），∵ R 点为 AM 的中点，∴ R 点为 PS 的中点，

∴ PM=SA，P（0，$\frac{9}{2}$），∵ PM=AQ，∴ AQ=AS，∴ 点 Q 关于 AM 的对称点为 S，即 T 点坐标为（0，$-\frac{1}{2}$）.

综上所述，点 T 的坐标为（0，$\frac{9}{2}$）或（0，$-\frac{1}{2}$）.



备用图2

【点评】本题考查了二次函数的综合题：熟练掌握二次函数的性质、二次函数与 x 轴的交点问题和矩形的性质；会利用待定系数法求函数解析式；灵活运用相似三角形的性质计算线段的长；记住坐标系中点平移的规律.

27.（2015•兰州）已知二次函数 $y=ax^2$ 的图象经过点（2，1）.

（1）求二次函数 $y=ax^2$ 的解析式；

（2）一次函数 y=mx+4 的图象与二次函数 $y=ax^2$ 的图象交于点 A（x_1、y_1）、B（x_2、y_2）两点.

①当 $m=\frac{3}{2}$时（图①），求证：△AOB 为直角三角形；

②试判断当 $m\neq\frac{3}{2}$时（图②），△AOB 的形状，并证明；

（3）根据第（2）问，说出一条你能得到的结论.（不要求证明）

【考点】二次函数综合题． 【专题】压轴题．

【分析】（1）把点（2，1）代入可求得 a 的值，可求得抛物线的解析式；

（2）①可先求得 A、B 两点的坐标，过 A、B 两点作 x 轴的垂线，结合条件可证明△ACO∽△ODB，可证明∠AOB=90°，可判定△AOB 为直角三角形；②可用 m 分别表示出 A、B 两点的坐标，过 A、B 两点作 x 轴的垂线，表示出 AC、BD 的长，可证明△ACO∽△ODB，结合条件可得到∠AOB=90°，可判定△AOB 为直角三角形；

（3）结合（2）的过程可得到△AOB 恒为直角三角形等结论.

【解答】（1）解：∵ $y=ax^2$ 过点（2，1），∴ 1=4a，解得 $a=\frac{1}{4}$，∴ 抛物线解析式为 $y=\frac{1}{4}x^2$；

（2）①证明：

当 $m=\frac{3}{2}$时，联立直线和抛物线解析式可得$\begin{cases}y=\frac{3}{2}x+4\\y=\frac{1}{4}x^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=-2\\y=1\end{cases}$或$\begin{cases}x=8\\y=16\end{cases}$，

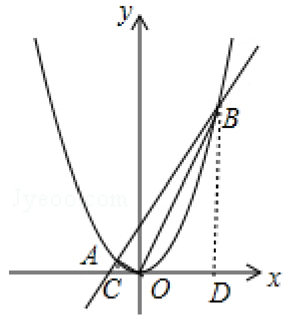


图1

∴ A（－2，1），B（8，16），

分别过 A、B 作 AC⊥x 轴，BD⊥x 轴，垂足分别为 C、D，如图 1，

∴ AC=1，OC=2，OD=8，BD=16，

∴ $\frac{AC}{OC}=\frac{OD}{BD}=\frac{1}{2}$，且∠ ACO=∠ ODB，

∴ △ ACO∽ △ ODB，∴ ∠ AOC=∠ OBD，

又∵ ∠ OBD+∠ BOD=90°，

∴ ∠ AOC+∠ BOD=90°，即∠ AOB=90°，

∴ △ AOB 为直角三角形；

②解：△ AOB 为直角三角形．证明如下：

当 $m\neq\frac{3}{2}$时，联立直线和抛物线解析式可得$\begin{cases}y=mx+4\\y=\frac{1}{4}x^2\end{cases}$，解得$\begin{cases}x=2m-2\sqrt{m^2+4}\\y=(m-\sqrt{m^2+4})^2\end{cases}$或$\begin{cases}x=2m+2\sqrt{m^2+4}\\y=(m+\sqrt{m^2+4})^2\end{cases}$，

∴ A（$2m-2\sqrt{m^2+4}$，$(m-\sqrt{m^2+4})^2$），B（$2m+2\sqrt{m^2+4}$，$(m+\sqrt{m^2+4})^2$），

分别过 A、B 作 AC⊥x 轴，BD⊥x 轴，如图 2，

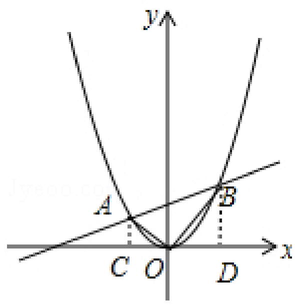


图2

∴ AC=$(m-\sqrt{m^2+4})^2$，OC=－（$2m-2\sqrt{m^2+4}$），

BD=$(m+\sqrt{m^2+4})^2$，OD=$2m+2\sqrt{m^2+4}$，

∴ $\frac{AC}{OC}=\frac{OD}{BD}=\frac{m-\sqrt{m^2+4}}{2}$，且∠ ACO=∠ ODB，

∴ △ ACO∽ △ OBD，

∴ ∠ AOC=∠ OBD，

又∵ ∠ OBD+∠ BOD=90°，

∴ ∠ AOC+∠ BOD=90°，即∠ AOB=90°，

∴ △ AOB 为直角三角形；

（3）解：由（2）可知，一次函数 y=mx+4 的图象与二次函数 $y=ax^2$ 的交点为 A、B，则△ AOB 恒为直角三角形．（答案不唯一）．

【点评】本题主要考查二次函数的综合应用，涉及待定系数法、相似三角的判定和性质、直角三角形的判定等知识点．在（1）中注意待定系数法的应用步骤，在（2）中注意表示出 A、B 两点的坐标，构造三角形相似是解题的关键，在（3）中答案不唯一，可结合（2）的过程得出．本题知识点较多，综合性很强，难度较大．

28．（2015•丹东）如图，已知二次函数 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$ 的图象与 y 轴交于点 A（0，4），与 x 轴交于点 B、C，点 C 坐标为（8，0），连接 AB、AC．

（1）请直接写出二次函数 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$ 的表达式；（2）判断△ ABC 的形状，并说明理由；

（3）若点 N 在 x 轴上运动，当以点 A、N、C 为顶点的三角形是等腰三角形时，请直接写出此时点 N 的坐标；

（4）若点 N 在线段 BC 上运动（不与点 B、C 重合），过点 N 作 NM∥ AC，交 AB 于点 M，当△ AMN 面积最大时，求此时点 N 的坐标．

【考点】二次函数综合题．　【专题】压轴题．

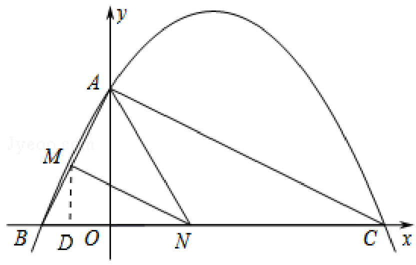
【分析】（1）根据待定系数法即可求得；

（2）根据抛物线的解析式求得 B 的坐标，然后根据勾股定理分别求得 $AB^2=20$，$AC^2=80$，BC10，然后根据勾股定理的逆定理即可证得△ ABC 是直角三角形．

（3）分别以 A、C 两点为圆心，AC 长为半径画弧，与 x 轴交于三个点，由 AC 的垂直平分线与 x 轴交于一个点，即可求得点 N 的坐标；

（4）设点 N 的坐标为（n，0），则 BN=n+2，过 M 点作 MD⊥x 轴于点 D，根据三角形相似对应边成比例求得 $MD=\frac{2}{5}(n+2)$，然后根据 $S_{\triangle AMN}=S_{\triangle ABN}-S_{\triangle BMN}$

得出关于 n 的二次函数，根据函数解析式求得即可．



【解答】解：（1）∵ 二次函数 $y=ax^2+\frac{3}{2}x+c$ 的图象与 y 轴交于点 A（0，4），

与 x 轴交于点 B、C，点 C 坐标为（8，0），

$\therefore \begin{cases} c=4 \\ 64a+12+c=0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=-\frac{1}{4} \\ c=4 \end{cases}$．

∴ 抛物线表达式：$y=-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+4$；

（2）△ ABC 是直角三角形．令 y=0，则 $-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+4=0$，

解得 $x_1=8$，$x_2=-2$，∴ 点 B 的坐标为（﹣2，0），

由已知可得，

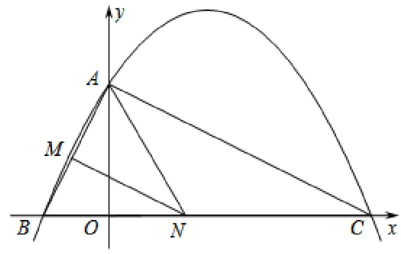
在 Rt△ ABO 中 $AB^2=BO^2+AO^2=2^2+4^2=20$，

在 Rt△ AOC 中 $AC^2=AO^2+CO^2=4^2+8^2=80$，

又∵ BC=OB+OC=2+8=10，

∴ 在△ ABC 中 $AB^2+AC^2=20+80=10^2=BC^2$

∴ △ ABC 是直角三角形．



备用图

（3）∵ A（0，4），C（8，0），∴ $AC=\sqrt{4^2+8^2}=4\sqrt{5}$，

①以 A 为圆心，以 AC 长为半径作圆，交 x 轴于 N，此时 N 的坐标为（﹣8，0），

②以 C 为圆心，以 AC 长为半径作圆，交 x 轴于 N，此时 N 的坐标为（$8-4\sqrt{5}$，0）或（$8+4\sqrt{5}$，0）

③作 AC 的垂直平分线，交 x 轴于 N，此时 N 的坐标为（3，0），

综上，若点 N 在 x 轴上运动，当以点 A、N、C 为顶点的三角形是等腰三角形时，点 N 的坐标分别为（﹣8，0）、（$8-4\sqrt{5}$，0）、（3，0）、（$8+4\sqrt{5}$，0）．

（4）设点 N 的坐标为（n，0），则 BN=n+2，过 M 点作 MD⊥x 轴于点 D，

∴ MD∥OA，∴ △ BMD∽△ BAO，∴ $\frac{BM}{BA}=\frac{MD}{OA}$，

∵ MN∥AC．∴ $\frac{BM}{BA}=\frac{BN}{BC}$，∴ $\frac{MD}{OA}=\frac{BN}{BC}$，

∵ OA=4，BC=10，BN=n+2．∴ $MD=\frac{2}{5}(n+2)$，

∵ $S_{\triangle AMN}=S_{\triangle ABN}-S_{\triangle BMN}=\frac{1}{2}BN\bullet OA-\frac{1}{2}BN\bullet MD=\frac{1}{2}(n+2)\times4-\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}(n+2)^2=-\frac{1}{5}(n-3)^2+5$，

∴ 当△ AMN 面积最大时，N 点坐标为（3，0）．

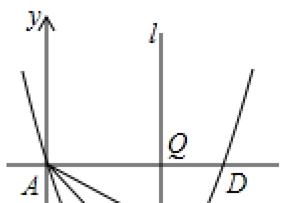
【点评】本题是二次函数的综合题，考查了待定系数法求解析式，勾股定理和逆定理，等腰三角形的性质，三角形相似的判定和性质以及函数的最值等，熟练掌握性质定理是解题的关键．

29．（2015•潍坊）如图，在平面直角坐标系中，抛物线 $y=mx^2-8mx+4m+2$（m＞0）与 y 轴的交点为 A，与 x 轴的交点分别为 B（x_1，0），C（x_2，0），且 $x_2-x_1=4$，直线 AD∥x 轴，在 x 轴上有一动点 E（t，0）过点 E 作平行于 y 轴的直线 l 与抛物线、直线 AD 的交点分别为 P、Q．

（1）求抛物线的解析式；（2）当 0＜t≤8 时，求△ APC 面积的最大值；

（3）当 t＞2 时，是否存在点 P，使以 A、P、Q 为顶点的三角形与△ AOB 相似？若存在，求出此时 t 的值；若不存在，请说明理由．【考点】二次函数综合题．　【专题】压轴题．

【解答】解：（1）由题意知 x_1、x_2 是方程 $mx^2-8mx+4m+2=0$ 的两根，



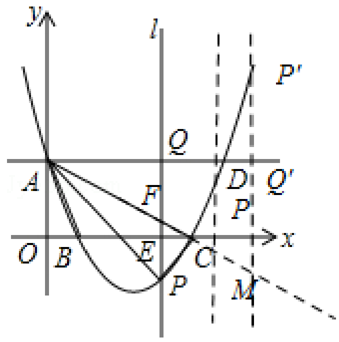
$\therefore x_1+x_2=8$，由$\begin{cases}x_1+x_2=8\\x_2-x_1=4\end{cases}$解得：$\begin{cases}x_1=2\\x_2=6\end{cases}$$\therefore$ B（2，0）、C（6，0）

则 $4m-16m+4m+2=0$，解得：$m=\frac{1}{4}$，$\therefore$ 该抛物线解析式为：$y=\frac{1}{4}x^2-2x+3$；

（2）可求得 A（0，3）设直线 AC 的解析式为：$y=kx+b$，

$\because\begin{cases}b=3\\6k+b=0\end{cases}$ $\therefore\begin{cases}k=-\frac{1}{2}\\b=3\end{cases}$ $\therefore$ 直线 AC 的解析式为：$y=-\frac{1}{2}x+3$，

要构成△APC，显然 $t\neq6$，分两种情况讨论：



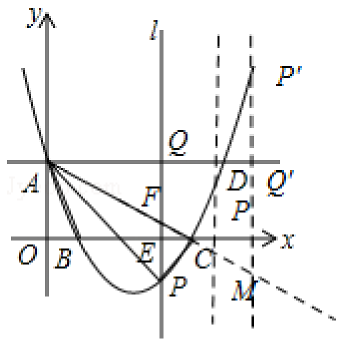
①当 $0<t<6$ 时，设直线 l 与 AC 交点为 F，则：F（t，$-\frac{1}{2}t+3$），

$\because$ P（t，$\frac{1}{4}t^2-2t+3$），$\therefore PF=-\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{2}t$，

$\therefore S_{\triangle APC}=S_{\triangle APF}+S_{\triangle CPF}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{2}t\right)\cdot t+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{2}t\right)\cdot(6-t)$

$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}t^2+\frac{3}{2}t\right)\cdot 6=-\frac{3}{4}(t-3)^2+\frac{27}{4}$，

此时最大值为：$\frac{27}{4}$，



②当 $6<t\leq8$ 时，设直线 l 与 AC 交点为 M，则：M（t，$-\frac{1}{2}t+3$），

$\because$ P（t，$\frac{1}{4}t^2-2t+3$），$\therefore PM=\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{2}t$，

$\therefore S_{\triangle APC}=S_{\triangle APM}-S_{\triangle CPM}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{2}t\right)t-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}t^2-\frac{3}{2}t\right)(t-6)$

$=\frac{3}{4}t^2-\frac{9}{2}t=\frac{3}{4}(t-3)^2-\frac{27}{4}$，

当 $t=8$ 时，取最大值，最大值为：12，

综上可知，当 $0<t\leq8$ 时，△APC 面积的最大值为 12；

（3）如图，连接 AB，则△AOB 中，∠AOB=90°，AO=3，BO=2，Q（t，3），P（t，$\frac{1}{4}t^2-2t+3$），

①当 $2<t<8$ 时，$AQ=t$，$PQ=-\frac{1}{4}t^2+2t$，若：△AOB∽△AQP，则：$\frac{AO}{AQ}=\frac{BO}{PQ}$，即：$\frac{3}{t}=\frac{2}{-\frac{1}{4}t^2+2t}$，

$\therefore t=0$（舍），或 $t=\frac{16}{3}$，若△AOB∽△PQA，则：$\frac{AO}{PQ}=\frac{OB}{AQ}$，即：$\frac{3}{-\frac{1}{4}t^2+2t}=\frac{2}{t}$，

$\therefore t=0$（舍）或 $t=2$（舍），

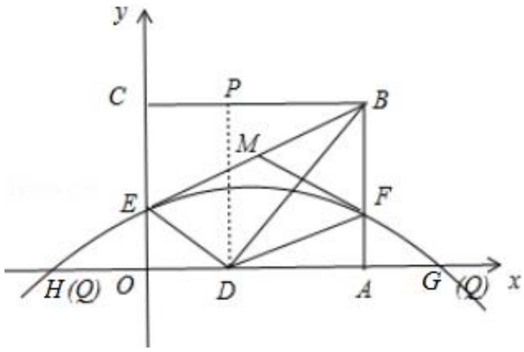
②当 $t>8$ 时，$AQ'=t$，$PQ'=\frac{1}{4}t^2-2t$，若：△AOB∽△AQP，则：$\frac{AO}{AQ'}=\frac{BO}{P'Q'}$，即：$\frac{3}{t}=\frac{2}{\frac{1}{4}t^2-2t}$，

$\therefore t=0$（舍），或 $t=\frac{32}{3}$，

若△AOB∽△PQA，则：$\frac{AO}{P'Q'}=\frac{BO}{AQ'}$，即：$\frac{2}{t}=\frac{3}{\frac{1}{4}t^2-2t}$，$\therefore t=0$（舍）或 $t=14$，$\therefore t=\frac{16}{3}$或 $t=\frac{32}{3}$或 $t=14$．

【点评】本题主要考查了抛物线解析式的求法，以及利用配方法等知识点求最值的问题，还考查了三角形相似的问题，是一道二次函数与几何问题结合紧密的题目，要注意认真总结．

30.（2015•珠海）如图，折叠矩形 OABC 的一边 BC，使点 C 落在 OA 边的点 D 处，已知折痕 BE=$5\sqrt{5}$，且$\frac{OD}{OE}=\frac{4}{3}$，以 O 为原点，OA 所在的直线为 x 轴建立如图所示的平面直角坐标系，抛物线 l：$y=-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}x+c$ 经过点 E，且与 AB 边相交于点 F.（1）求证：△ABD∽△ODE；（2）若 M 是 BE 的中点，连接 MF，求证：MF⊥BD；（3）P 是线段 BC 上一点，点 Q 在抛物线 l 上，且始终满足 PD⊥DQ，在点 P 运动过程中，能否使得 PD=DQ？若能，求出所有符合条件的 Q 点坐标；若不能，请说明理由.



【考点】二次函数综合题．　【专题】压轴题．

【解答】（1）证明：

∵四边形 ABCO 为矩形，且由折叠的性质可知△BCE≌△BDE，

∴∠BDE=∠BCE=90°，∵∠BAD=90°，

∴∠EDO+∠BDA=∠BDA+∠DAB=90°，

∴∠EDO=∠DBA，且∠EOD=∠BAD=90°，

∴△ABD∽△ODE；

（2）证明：∵$\frac{OD}{OE}=\frac{4}{3}$，

∴设 OD=4x，OE=3x，则 DE=5x，∴CE=DE=5x，

∴AB=OC=CE+OE=8x，又∵△ABD∽△ODE，∴$\frac{DA}{AB}=\frac{OE}{OD}=\frac{3}{4}$，

∴DA=6x，∴BC=OA=10x，

在 Rt△BCE 中，由勾股定理可得 $BE^2=BC^2+CE^2$，即 $(5\sqrt{5})^2=(10x)^2+(5x)^2$，解得 x=1，

∴OE=3，OD=4，DA=6，AB=8，OA=10，

∴抛物线解析式为 $y=-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}x+3$，当 x=10 时，代入可得 $y=\frac{7}{4}$，

∴AF=$\frac{7}{4}$，BF=AB－AF=$8-\frac{7}{4}=\frac{25}{4}$，

在 Rt△AFD 中，由勾股定理可得 $DF=\sqrt{AF^2+AD^2}=\sqrt{(\frac{7}{4})^2+6^2}=\frac{25}{4}$，

∴BF=DF，又 M 为 Rt△BDE 斜边上的中点，

∴MD=MB，∴MF 为线段 BD 的垂直平分线，

∴MF⊥BD；

（3）解：由（2）可知抛物线解析式为 $y=-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}x+3$，设抛物线与 x 轴的两个交点为 H、G，

令 y=0，可得 $0=-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{2}x+3$，解得 x=－4 或 x=12，∴H（－4，0），G（12，0），

①当 PD⊥x 轴时，由于 PD=8，DM=DN=8，

故点 Q 的坐标为（－4，0）或（12，0）时，△PDQ 是以 P 为直角顶点的等腰直角三角形；

②当 PD 不垂直与 x 轴时，分别过 P，Q 作 x 轴的垂线，

垂足分别为 N，I，则 Q 不与 G 重合，从而 I 不与 G 重合，即 DI≠8.

∵PD⊥DQ，

∴∠QDI=90°－∠PDN=∠DPN，

∴Rt△PDN∽Rt△DQI，

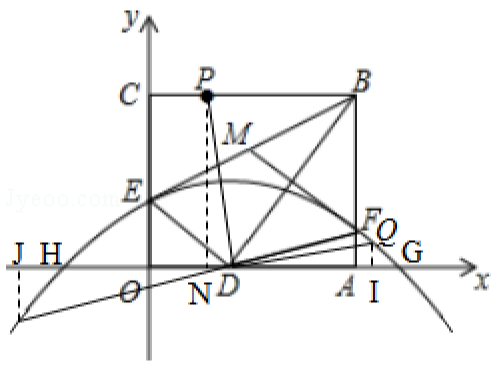
∵PN=8，

∴PN≠DI，

∴Rt△PDN 与 Rt△DQI 不全等，

∴PD≠DQ，另一侧同理 PD≠DQ.

综合①，②所有满足题设条件的点 Q 的坐标为（－4，0）或（12，0）.



【点评】本题主要考查二次函数的综合应用，涉及矩形的性质、折叠的性质、相似三角形的判定和性质、垂直平分线的判定和抛物线与坐标轴的交点等知识．在（1）中利用折叠的性质得到∠EDB=90°是解题的关键，在（2）

中，求得 E、F 的坐标，求得相应线段的长是解题的关键，在（3）中确定出 Q 点的位置是解题的关键．本题考查知识点较多，综合性很强，难度适中．