【新课标】高中数学必修 1-5 知识总结

高中数学 必修 1 知识点

第一章　集合与函数概念

〖1.1〗集合

【1.1.1】集合的含义与表示

（1）集合的概念

集合中的元素具有确定性、互异性和无序性.

（2）常用数集及其记法

N 表示自然数集，N^* 或 N_+ 表示正整数集，Z 表示整数集，Q 表示有理数集，R 表示实数集.

（3）集合与元素间的关系

对象 a 与集合 M 的关系是 $a\in M$，或者 $a\notin M$，两者必居其一.

（4）集合的表示法

①自然语言法：用文字叙述的形式来描述集合.

②列举法：把集合中的元素一一列举出来，写在大括号内表示集合.

③描述法：$\{x \mid x$ 具有的性质$\}$，其中 x 为集合的代表元素.

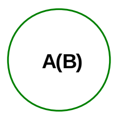
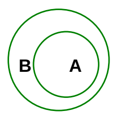
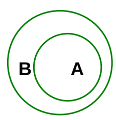
④图示法：用数轴或韦恩图来表示集合.

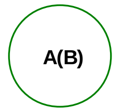
（5）集合的分类

①含有有限个元素的集合叫做有限集.②含有无限个元素的集合叫做无限集.③不含有任何元素的集合叫做空集($\varnothing$).

【1.1.2】集合间的基本关系

（6）子集、真子集、集合相等

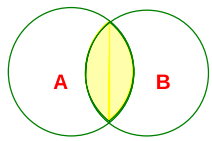
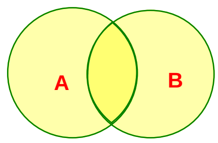
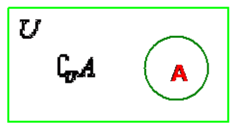
名称	记号	意义	性质	示意图
子集	$A\subseteq B$（或 $B\supseteq A$)	A 中的任一元素都属于 B	(1) $A\subseteq A$ (2) $\varnothing\subseteq A$ (3) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$ (4) 若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则 $A=B$	 或 
真子集	$A\subsetneq B$（或 $B\supsetneq A$）	$A\subseteq B$，且 B 中至少有一元素不属于 A	（1）$\varnothing\subsetneq A$（A 为非空子集） (2) 若 $A\subsetneq B$ 且 $B\subsetneq C$，则 $A\subsetneq C$	

集合相等	$A=B$	A 中的任一元素都属于 B，B 中的任一元素都属于 A	(1) A $\subseteq$ B (2) B $\subseteq$ A	

（7）已知集合 A 有 $n(n\geq 1)$ 个元素，则它有 2^n 个子集，它有 2^n-1 个真子集，它有 2^n-1 个非空子集，它有 2^n-2 非空真子集.

【1.1.3】集合的基本运算

（8）交集、并集、补集

名称	记号	意义	性质	示意图
交集	$A\cap B$	$\{x\mid x\in A,$ 且 $x\in B\}$	（1） $A\cap A=A$ （2） $A\cap\varnothing=\varnothing$ （3） $A\cap B\subseteq A$ $A\cap B\subseteq B$	
并集	$A\cup B$	$\{x\mid x\in A,$ 或 $x\in B\}$	（1） $A\cup A=A$ （2） $A\cup\varnothing=A$ （3） $A\cup B\supseteq A$ $A\cup B\supseteq B$	
补集	$\complement_U A$	$\{x\mid x\in U,$ 且 $x\notin A\}$	$\complement_U(A\cap B)=(\complement_U A)\cup(\complement_U B)$ $\complement_U(A\cup B)=(\complement_U A)\cap(\complement_U B)$ 1 $A\cap(\complement_U A)=\varnothing$ 2 $A\cup(\complement_U A)=U$	

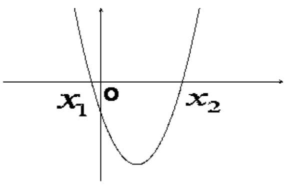
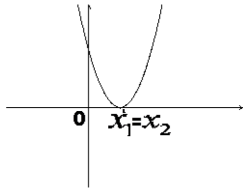
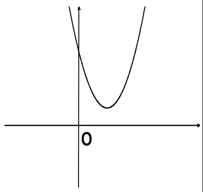
【补充知识】含绝对值的不等式与一元二次不等式的解法

（1）含绝对值的不等式的解法

不等式	解集
$\lvert x\rvert<a(a>0)$	$\{x\mid -a<x<a\}$
$\lvert x\rvert>a(a>0)$	$x\mid x<-a$ 或 $x>a\}$
$\lvert ax+b\rvert<c,\lvert ax+b\rvert>c(c>0)$	把 $ax+b$ 看成一个整体，化成 $\lvert x\rvert<a$ ，$\lvert x\rvert>a(a>0)$ 型不等式来求解

（2）一元二次不等式的解法

判别式 $\Delta=b^2-4ac$	$\Delta>0$	$\Delta=0$	$\Delta<0$

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a>0)$ 的图象			
一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 的根	$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ （其中 $x_1<x_2$)	$x_1=x_2=-\dfrac{b}{2a}$	无实根
$ax^2+bx+c>0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x<x_1$ 或 $x>x_2\}$	$\{x\mid x\neq -\dfrac{b}{2a}\}$	R
$ax^2+bx+c<0(a>0)$ 的解集	$\{x\mid x_1<x<x_2\}$	$\varnothing$	$\varnothing$

〖1.2〗函数及其表示

【1.2.1】函数的概念

（1）函数的概念

①设 A、B 是两个非空的数集，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中任何一个数 x，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么这样的对应（包括集合 A，B 以及 A 到 B 的对应法则 f）叫做集合 A 到 B 的一个函数，记作 $f:A\to B$.

②函数的三要素:定义域、值域和对应法则.

③只有定义域相同，且对应法则也相同的两个函数才是同一函数.

（2）区间的概念及表示法

①设 a,b 是两个实数，且 $a<b$，满足 $a\le x\le b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间，记做 $[a,b]$；满足 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫做开区间，记做 (a,b)；满足 $a\le x<b$，或 $a<x\le b$ 的实数 x 的集合叫做半开半闭区间，分别记做 $[a,b)$，$(a,b]$；满足 $x\ge a,x>a,x\le b,x<b$ 的实数 x 的集合分别记做 $[a,+\infty),(a,+\infty),(-\infty,b],(-\infty,b)$.

注意：对于集合 $\{x\mid a<x<b\}$ 与区间 (a,b)，前者 a 可以大于或等于 b，而后者必须
$a<b$.

（3）求函数的定义域时，一般遵循以下原则：

① $f(x)$ 是整式时，定义域是全体实数.

② $f(x)$是分式函数时，定义域是使分母不为零的一切实数.

③ $f(x)$是偶次根式时，定义域是使被开方式为非负值时的实数的集合.

④对数函数的真数大于零，当对数或指数函数的底数中含变量时，底数须大于零且不等于 1.

⑤ $y=\tan x$中，$x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}(k\in Z)$.

⑥零（负）指数幂的底数不能为零.

⑦若$f(x)$是由有限个基本初等函数的四则运算而合成的函数时，则其定义域一般是各基本初等函数的定义域的交集.

⑧对于求复合函数定义域问题，一般步骤是：若已知$f(x)$的定义域为$[a,b]$，其复合函数$f[g(x)]$的定义域应由不等式$a\leq g(x)\leq b$解出.

⑨对于含字母参数的函数，求其定义域，根据问题具体情况需对字母参数进行分类讨论.

⑩由实际问题确定的函数，其定义域除使函数有意义外，还要符合问题的实际意义.

（4）求函数的值域或最值

求函数最值的常用方法和求函数值域的方法基本上是相同的．事实上，如果在函数的值域中存在一个最小（大）数，这个数就是函数的最小（大）值．因此求函数的最值与值域，其实质是相同的，只是提问的角度不同．求函数值域与最值的常用方法：

①观察法：对于比较简单的函数，我们可以通过观察直接得到值域或最值.

②配方法：将函数解析式化成含有自变量的平方式与常数的和，然后根据变量的取值范围确定函数的值域或最值.

③判别式法：若函数$y=f(x)$可以化成一个系数含有y的关于x的二次方程$a(y)x^2+b(y)x+c(y)=0$，则在$a(y)\neq 0$时，由于x,y为实数，故必须有$\Delta=b^2(y)-4a(y)\cdot c(y)\geq 0$，从而确定函数的值域或最值.

④不等式法：利用基本不等式确定函数的值域或最值.

⑤换元法：通过变量代换达到化繁为简、化难为易的目的，三角代换可将代数函数的最值问题转化为三角函数的最值问题.

⑥反函数法：利用函数和它的反函数的定义域与值域的互逆关系确定函数的值域或最值.

⑦数形结合法：利用函数图象或几何方法确定函数的值域或最值.

⑧函数的单调性法.

【1.2.2】函数的表示法

（5）函数的表示方法

表示函数的方法，常用的有解析法、列表法、图象法三种．
解析法：就是用数学表达式表示两个变量之间的对应关系．列表法：就是列出表格来表示两个变量之间的对应关系．图象法：就是用图象表示两个变量之间的对应关系．

（6）映射的概念

①设A、B是两个集合，如果按照某种对应法则f，对于集合A中任何一个元素，在集合B中都有唯一的元素和它对应，那么这样的对应（包括集合A，B以及A到B的对应法则f）叫做集合A到B的映射，记作$f:A\to B$．

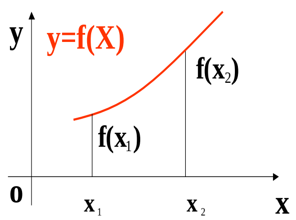
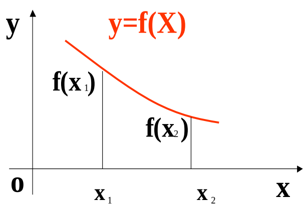
②给定一个集合A到集合B的映射，且$a\in A,b\in B$．如果元素a和元素b对应，那么我们把元素b叫做元素a的象，元素a叫做元素b的原象．

〖1.3〗函数的基本性质

【1.3.1】单调性与最大（小）值

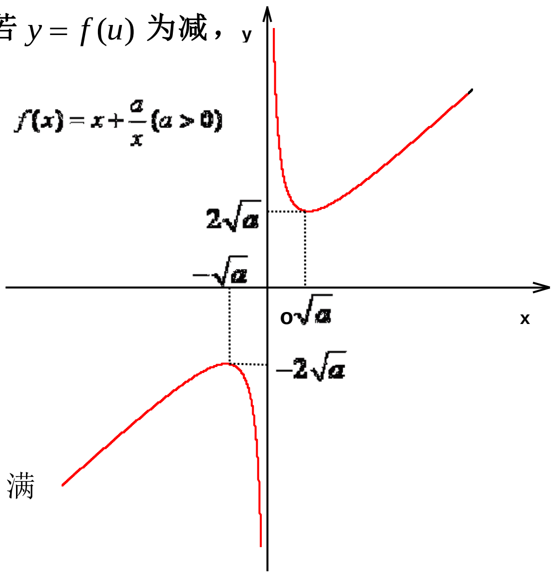
（1）函数的单调性

①定义及判定方法

函数的性质	定义	图象	判定方法
函数的单调性	如果对于属于定义域 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是增函数．		（1）利用定义 （2）利用已知函数的单调性 （3）利用函数图象（在某个区间图象上升为增） （4）利用复合函数
	如果对于属于定义域 I 内某个区间上的任意两个自变量的值 x_1、x_2，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，那么就说 $f(x)$ 在这个区间上是减函数．		（1）利用定义 （2）利用已知函数的单调性 （3）利用函数图象（在某个区间图象下降为减） （4）利用复合函数

②在公共定义域内，两个增函数的和是增函数，两个减函数的和是减函数，增函数减去一个减函数为增函数，减函数减去一个增函数为减函数．

③对于复合函数 $y=f[g(x)]$，令 $u=g(x)$，若 $y=f(u)$ 为增，$u=g(x)$ 为增，则 $y=f[g(x)]$ 为增；若 $y=f(u)$ 为减，$u=g(x)$ 为减，则 $y=f[g(x)]$ 为增；若 $y=f(u)$ 为增，$u=g(x)$ 为减，则 $y=f[g(x)]$ 为减；若 $y=f(u)$ 为减，$u=g(x)$ 为增，则 $y=f[g(x)]$ 为减.



（2）打“√”函数 $f(x)=x+\dfrac{a}{x}(a>0)$ 的图象与性质

$f(x)$ 分别在 $(-\infty,-\sqrt{a}]$、$[\sqrt{a},+\infty)$ 上为增函数，分别在 $[-\sqrt{a},0)$、$(0,\sqrt{a}]$ 上为减函数.

（3）最大（小）值定义

①一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果存在实数 M 满足：（1）对于任意的 $x\in I$，都有 $f(x)\le M$；

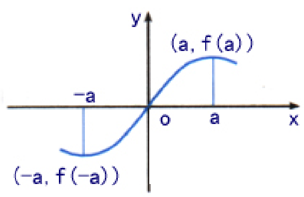
（2）存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=M$．那么，我们称 M 是函数 $f(x)$ 的最大值，记作 $f_{\max}(x)=M$．

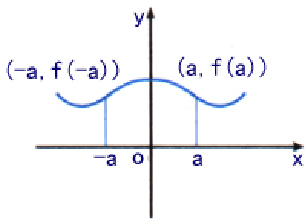
②一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 I，如果存在实数 m 满足：（1）对于任意的 $x\in I$，都有 $f(x)\ge m$；（2）存在 $x_0\in I$，使得 $f(x_0)=m$．那么，我们称 m 是函数 $f(x)$ 的最小值，记作 $f_{\max}(x)=m$．

【1.3.2】奇偶性

（4）函数的奇偶性

①定义及判定方法

函数的性质	定义	图象	判定方法
函数的奇偶性	如果对于函数 f(x) 定义域内任意一个 x，都有 f(－x)=－f(x)，那么函数 f(x) 叫做奇函数.		（1）利用定义（要先判断定义域是否关于原点对称） （2）利用图象（图象关于原点对称）

	如果对于函数 f(x) 定义域内任意一个 x，都有 f(－x)=f(x)，那么函数 f(x) 叫做**偶函数**.		（1）利用定义（要先判断定义域是否关于原点对称） （2）利用图象（图象关于 y 轴对称）

②若函数 $f(x)$ 为奇函数，且在 $x=0$ 处有定义，则 $f(0)=0$.

③奇函数在 y 轴两侧相对称的区间增减性相同，偶函数在 y 轴两侧相对称的区间增减性相反.

④在公共定义域内，两个偶函数（或奇函数）的和（或差）仍是偶函数（或奇函数），两个偶函数（或奇函数）的积（或商）是偶函数，一个偶函数与一个奇函数的积（或商）是奇函数.

〖补充知识〗函数的图象

（1）作图

利用描点法作图：

①确定函数的定义域； ②化解函数解析式；

③讨论函数的性质（奇偶性、单调性）； ④画出函数的图象.

利用基本函数图象的变换作图：

要准确记忆一次函数、二次函数、反比例函数、指数函数、对数函数、幂函数、三角函数等各种基本初等函数的图象.

①平移变换

$$y=f(x)\xrightarrow[h<0,\text{右移}|h|\text{个单位}]{h>0,\text{左移}h\text{个单位}}y=f(x+h)$$

$$y=f(x)\xrightarrow[k<0,\text{下移}|k|\text{个单位}]{k>0,\text{上移}k\text{个单位}}y=f(x)+k$$

②伸缩变换

$$y=f(x)\xrightarrow[\omega>1,\text{缩}]{0<\omega<1,\text{伸}}y=f(\omega x)$$

$$y=f(x)\xrightarrow[A>1,\text{伸}]{0<A<1,\text{缩}}y=Af(x)$$

③对称变换

$$y=f(x)\xrightarrow{x\text{轴}}y=-f(x)$$ $$y=f(x)\xrightarrow{y\text{轴}}y=f(-x)$$

$$y=f(x)\xrightarrow{\text{原点}}y=-f(-x)$$ $$y=f(x)\xrightarrow{\text{直线}y=x}y=f^{-1}(x)$$

$$y=f(x)\xrightarrow[\text{保留}y\text{轴右边图象，并作其关于}y\text{轴对称图象}]{\text{去掉}y\text{轴左边图象}}y=f(|x|)$$

$$y=f(x)\xrightarrow[\text{将}x\text{轴下方图象翻折上去}]{\text{保留}x\text{轴上方图象}}y=|f(x)|$$

（2）识图

对于给定函数的图象，要能从图象的左右、上下分别范围、变化趋势、对称性等方

面研究函数的定义域、值域、单调性、奇偶性，注意图象与函数解析式中参数的关系.

（3）用图

函数图象形象地显示了函数的性质，为研究数量关系问题提供了“形”的直观性，它是探求解题途径，获得问题结果的重要工具. 要重视数形结合解题的思想方法.

第二章　基本初等函数(Ⅰ)

〖2.1〗指数函数

【2.1.1】指数与指数幂的运算

（1）根式的概念

①如果$x^n=a,a\in R,x\in R,n>1$，且$n\in N_+$，那么x叫做a的n次方根．当n是奇数时，a的n次方根用符号$\sqrt[n]{a}$表示；当n是偶数时，正数a的正的n次方根用符号$\sqrt[n]{a}$表示，负的n次方根用符号$-\sqrt[n]{a}$表示；0 的n次方根是 0；负数a没有n次方根.

②式子$\sqrt[n]{a}$叫做根式，这里n叫做根指数，a叫做被开方数. 当n为奇数时，a为任意实数；当n为偶数时，$a\ge 0$.

③根式的性质：$(\sqrt[n]{a})^n=a$；当n为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$；当n为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases}a & (a\ge 0)\\ -a & (a<0)\end{cases}$.

（2）分数指数幂的概念

①正数的正分数指数幂的意义是：$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}(a>0,m,n\in N_+,\text{且}n>1)$. 0 的正分数指数幂等于 0.

②正数的负分数指数幂的意义是：$a^{-\frac{m}{n}}=(\frac{1}{a})^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{(\frac{1}{a})^m}(a>0,m,n\in N_+,\text{且}n>1)$. 0 的负分数指数幂没有意义. **注意口诀：**底数取倒数，指数取相反数.

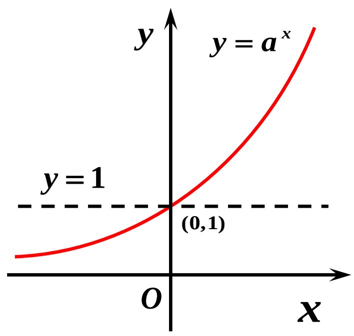
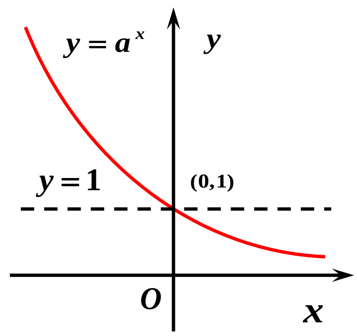
（3）分数指数幂的运算性质

①$a^r\cdot a^s=a^{r+s}(a>0,r,s\in R)$　　②$(a^r)^s=a^{rs}(a>0,r,s\in R)$

③$(ab)^r=a^rb^r(a>0,b>0,r\in R)$

【2.1.2】指数函数及其性质

（4）指数函数

函数名称	指数函数	
定义	函数 $y=a^x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 叫做指数函数	
图象	$a>1$	$0<a<1$
		
定义域	R	
值域	$(0,+\infty)$	
过定点	图象过定点 $(0,1)$，即当 $x=0$ 时，$y=1$.	
奇偶性	非奇非偶	
单调性	在 R 上是增函数	在 R 上是减函数
函数值的变化情况	$a^x>1\ (x>0)$ $a^x=1\ (x=0)$ $a^x<1\ (x<0)$	$a^x<1\ (x>0)$ $a^x=1\ (x=0)$ $a^x>1\ (x<0)$
a 变化对图象的影响	在第一象限内，a 越大图象越高；在第二象限内，a 越大图象越低.	

〖2.2〗对数函数

【2.2.1】对数与对数运算

（1）对数的定义

①若 $a^x=N(a>0,且 a\neq 1)$，则 x 叫做以 a 为底 N 的对数，记作 $x=\log_a N$，其中 a 叫做底数，N 叫做真数.

②负数和零没有对数.

③对数式与指数式的互化：$x=\log_a N \Leftrightarrow a^x=N(a>0,a\neq 1,N>0)$.

（2）几个重要的对数恒等式

$\log_a 1=0$，$\log_a a=1$，$\log_a a^b=b$.

（3）常用对数与自然对数

常用对数：$\lg N$，即$\log_{10} N$；自然对数：$\ln N$，即$\log_e N$（其中$e=2.71828\cdots$）.

（4）对数的运算性质　如果$a>0, a\neq 1, M>0, N>0$，那么

①加法：$\log_a M+\log_a N=\log_a(MN)$　　②减法：$\log_a M-\log_a N=\log_a \frac{M}{N}$

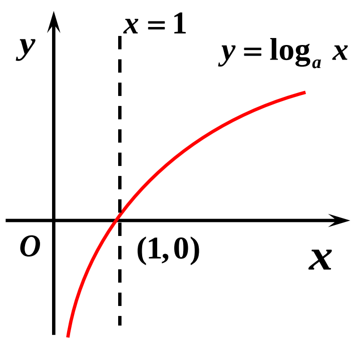
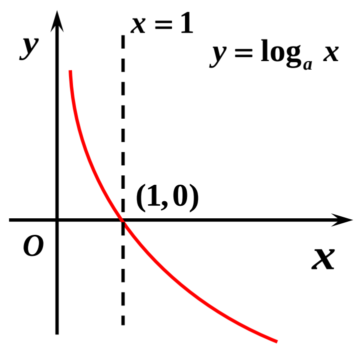
③数乘：$n\log_a M=\log_a M^n (n\in R)$　　④$a^{\log_a N}=N$

⑤　$\log_{a^b} M^n=\frac{n}{b}\log_a M (b\neq 0, n\in R)$　　⑥　换　底　公　式　：

$$\log_a N=\frac{\log_b N}{\log_b a}(b>0, 且 b\neq 1)$$

【2.2.2】对数函数及其性质

（5）对数函数

函数名称	对数函数	
定义	函数 $y=\log_a x(a>0$ 且 $a\neq 1)$ 叫做对数函数	
图象	$a>1$	$0<a<1$
		
定义域	$(0,+\infty)$	
值域	R	
过定点	图象过定点$(1,0)$，即当$x=1$时，$y=0$.	
奇偶性	非奇非偶	
单调性	在$(0,+\infty)$上是增函数	在$(0,+\infty)$上是减函数
函数值的变化情况	$\log_a x>0\ (x>1)$ $\log_a x=0\ (x=1)$ $\log_a x<0\ (0<x<1)$	$\log_a x<0\ (x>1)$ $\log_a x=0\ (x=1)$ $\log_a x>0\ (0<x<1)$

a变化对图象的影响	在第一象限内，a越大图象越靠低；在第四象限内，a越大图象越靠高.

(6)反函数的概念

设函数$y=f(x)$的定义域为A，值域为C，从式子$y=f(x)$中解出x，得式子$x=\varphi(y)$．如果对于y在C中的任何一个值，通过式子$x=\varphi(y)$，x在A中都有唯一确定的值和它对应，那么式子$x=\varphi(y)$表示x是y的函数，函数$x=\varphi(y)$叫做函数$y=f(x)$的反函数，记作$x=f^{-1}(y)$，习惯上改写成$y=f^{-1}(x)$．

（7）反函数的求法

①确定反函数的定义域，即原函数的值域；②从原函数式$y=f(x)$中反解出$x=f^{-1}(y)$；

③将$x=f^{-1}(y)$改写成$y=f^{-1}(x)$，并注明反函数的定义域.

（8）反函数的性质

①原函数$y=f(x)$与反函数$y=f^{-1}(x)$的图象关于直线$y=x$对称.

②函数$y=f(x)$的定义域、值域分别是其反函数$y=f^{-1}(x)$的值域、定义域.

③若$P(a,b)$在原函数$y=f(x)$的图象上，则$P'(b,a)$在反函数$y=f^{-1}(x)$的图象上.

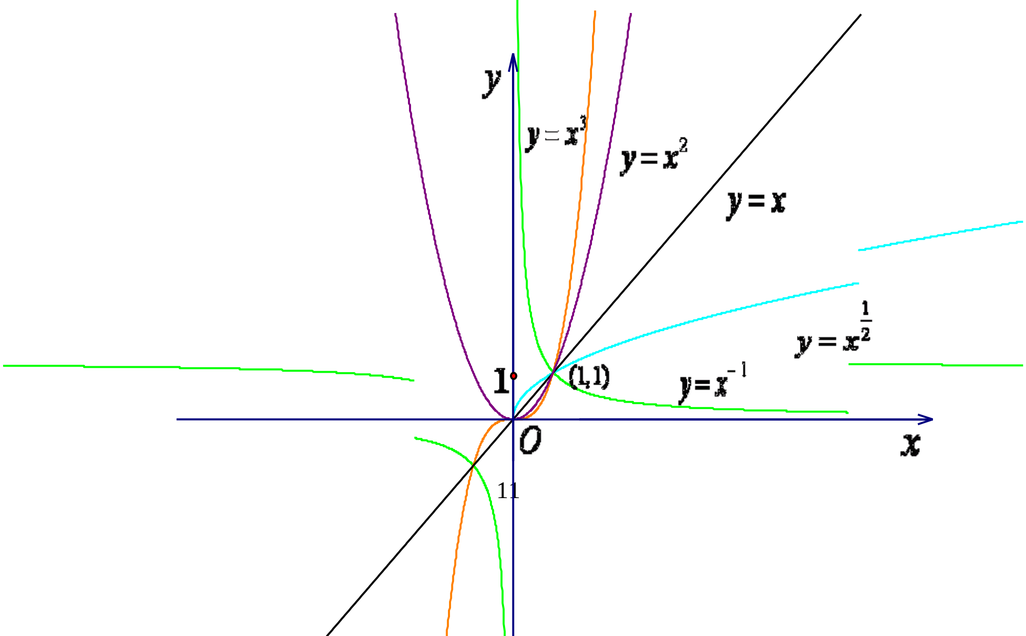
④一般地，函数$y=f(x)$要有反函数则它必须为单调函数.

〖2.3〗幂函数

（1）幂函数的定义

一般地，函数$y=x^{\alpha}$叫做幂函数，其中x为自变量，α是常数.

（2）幂函数的图象



（3）幂函数的性质

①图象分布：幂函数图象分布在第一、二、三象限，第四象限无图象．幂函数是偶函数时，图象分布在第一、二象限(图象关于 y 轴对称)；是奇函数时，图象分布在第一、三象限(图象关于原点对称)；是非奇非偶函数时，图象只分布在第一象限．

②过定点：所有的幂函数在 $(0,+\infty)$ 都有定义，并且图象都通过点 $(1,1)$．

③单调性：如果 $\alpha>0$，则幂函数的图象过原点，并且在 $[0,+\infty)$ 上为增函数．如果 $\alpha<0$，则幂函数的图象在 $(0,+\infty)$ 上为减函数，在第一象限内，图象无限接近 x 轴与 y 轴．

④奇偶性：当 α 为奇数时，幂函数为奇函数，当 α 为偶数时，幂函数为偶函数．当 $\alpha=\dfrac{q}{p}$（其中 p,q 互质，p 和 $q\in Z$），若 p 为奇数 q 为奇数时，则 $y=x^{\frac{q}{p}}$ 是奇函数，若 p 为奇数 q 为偶数时，则 $y=x^{\frac{q}{p}}$ 是偶函数，若 p 为偶数 q 为奇数时，则 $y=x^{\frac{q}{p}}$ 是非奇非偶函数．

⑤图象特征：幂函数 $y=x^{\alpha},x\in(0,+\infty)$，当 $\alpha>1$ 时，若 $0<x<1$，其图象在直线 $y=x$ 下方，若 $x>1$，其图象在直线 $y=x$ 上方，当 $\alpha<1$ 时，若 $0<x<1$，其图象在直线 $y=x$ 上方，若 $x>1$，其图象在直线 $y=x$ 下方．

〖补充知识〗二次函数

（1）二次函数解析式的三种形式

①一般式：$f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ ②顶点式：$f(x)=a(x-h)^2+k(a\neq 0)$ ③两根式：$f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)(a\neq 0)$（2）求二次函数解析式的方法

①已知三个点坐标时，宜用一般式．

②已知抛物线的顶点坐标或与对称轴有关或与最大（小）值有关时，常使用顶点式．

③若已知抛物线与 x 轴有两个交点，且横线坐标已知时，选用两根式求 $f(x)$ 更

方便.

（3）二次函数图象的性质

①二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 的图象是一条抛物线，对称轴方程为 $x=-\dfrac{b}{2a}$，顶点坐标是 $(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a})$.

②当 $a>0$ 时，抛物线开口向上，函数在 $(-\infty,-\dfrac{b}{2a}]$ 上递减，在 $[-\dfrac{b}{2a},+\infty)$ 上递增，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$f_{\min}(x)=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$；当 $a<0$ 时，抛物线开口向下，函数在 $(-\infty,-\dfrac{b}{2a}]$ 上递增，在 $[-\dfrac{b}{2a},+\infty)$ 上递减，当 $x=-\dfrac{b}{2a}$ 时，$f_{\max}(x)=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

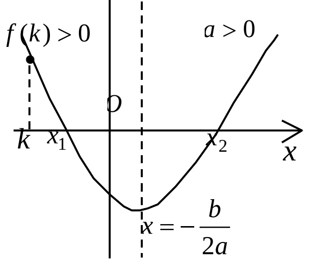
③二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 当 $\Delta=b^2-4ac>0$ 时，图象与 x 轴有两个交点 $M_1(x_1,0),M_2(x_2,0),|M_1M_2|=|x_1-x_2|=\dfrac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$.

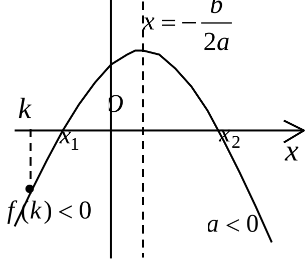
（4）一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 根的分布

一元二次方程根的分布是二次函数中的重要内容，这部分知识在初中代数中虽有所涉及，但尚不够系统和完整，且解决的方法偏重于二次方程根的判别式和根与系数关系定理（韦达定理）的运用，下面结合二次函数图象的性质，系统地来分析一元二次方程实根的分布.

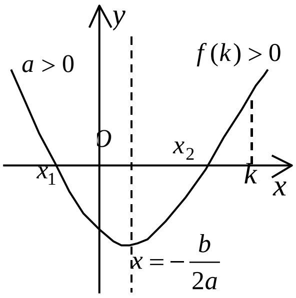
设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两实根为 x_1,x_2，且 $x_1\leq x_2$. 令 $f(x)=ax^2+bx+c$，从以下四个方面来分析此类问题：①开口方向：a ②对称轴位置：$x=-\dfrac{b}{2a}$ ③判别式：Δ ④端点函数值符号.

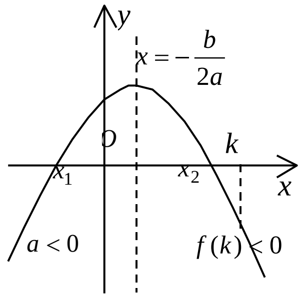
①$k<x_1\leqslant x_2$ $\Leftrightarrow$



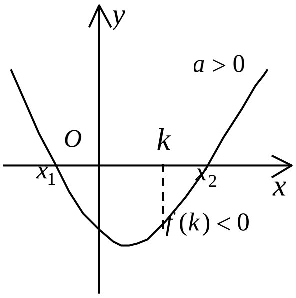


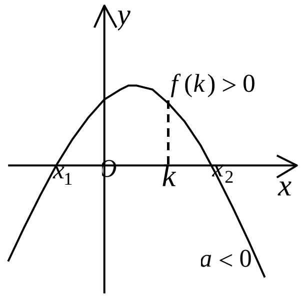
②$x_1\leqslant x_2<k$ $\Leftrightarrow$



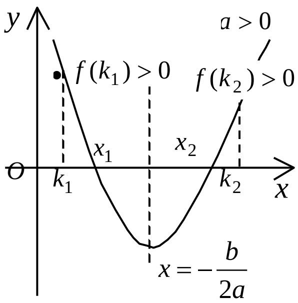


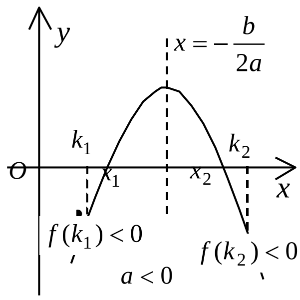
③$x_1<k<x_2$　⇔　$af(k)<0$



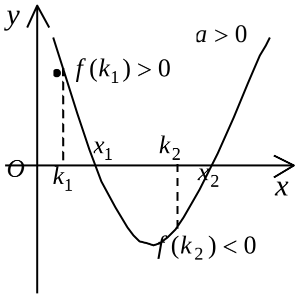


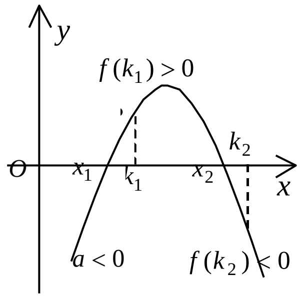
④$k_1<x_1\leqslant x_2<k_2$　⇔





⑤有且仅有一个根 x_1（或 x_2）满足 $k_1<x_1$（或 x_2）$<k_2$　⇔　$f(k_1)f(k_2)<0$，并同时考虑 $f(k_1)$=0 或 $f(k_2)$=0 这两种情况是否也符合





⑥$k_1<x_1<k_2\leqslant p_1<x_2<p_2$　⇔

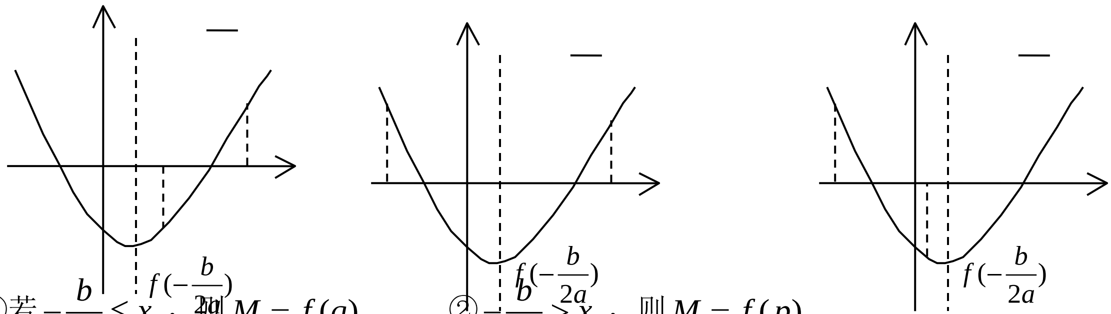
此结论可直接由⑤推出.

（5）二次函数 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$ 在闭区间 $[p,q]$ 上的最值

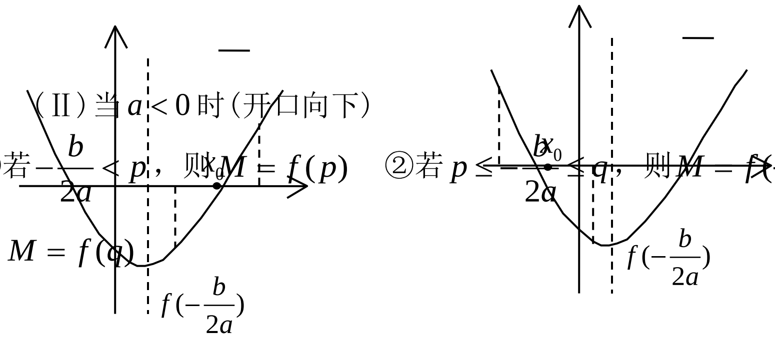
设 $f(x)$ 在区间 $[p,q]$ 上的**最大值为 M，最小值为 m**，令 $x_0=\frac{1}{2}(p+q)$．

（Ⅰ）当 $a>0$ 时（开口向上）

①若 $-\frac{b}{2a}<p$，则 $m=f(p)$ ②若 $p\le -\frac{b}{2a}\le q$，则 $m=f(-\frac{b}{2a})$ ③若 $-\frac{b}{2a}>q$，则 $m=f(q)$

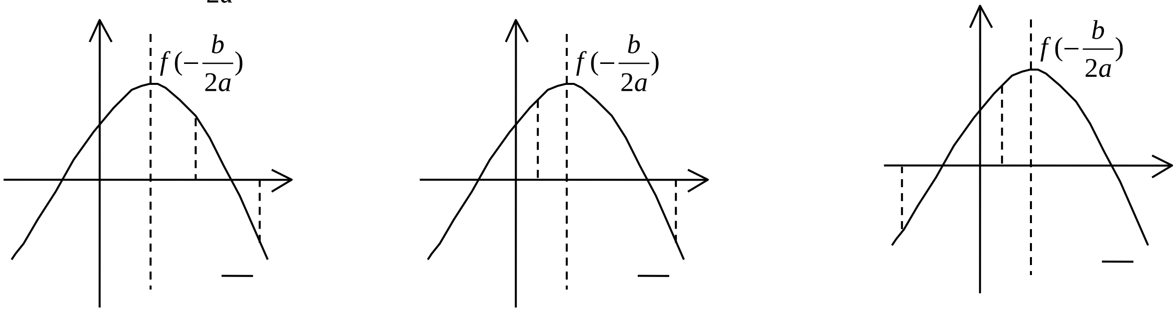


①若 $-\frac{b}{2a}\le x_0$，则 $M=f(q)$ ② $-\frac{b}{2a}>x_0$，则 $M=f(p)$

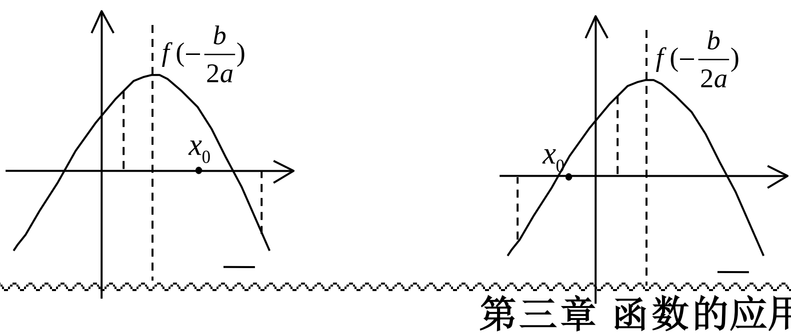


（Ⅱ）当 $a<0$ 时（开口向下）

①若 $-\frac{b}{2a}<p$，则 $M=f(p)$ ②若 $p\le -\frac{b}{2a}\le q$，则 $M=f(-\frac{b}{2a})$ ③若 $-\frac{b}{2a}>q$，则 $M=f(q)$



①若 $-\frac{b}{2a}\le x_0$，则 $m=f(q)$ ② $-\frac{b}{2a}>x_0$，则 $m=f(p)$．



第三章 函数的应用

一、方程的根与函数的零点

1、函数零点的概念：对于函数 $y=f(x)(x\in D)$，把使 $f(x)=0$ 成立的实数 x 叫

做函数 $y=f(x)(x\in D)$ 的零点。

2、函数零点的意义：函数 $y=f(x)$ 的零点就是方程 $f(x)=0$ 实数根，亦即函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴交点的横坐标。即：

方程 $f(x)=0$ 有实数根 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 的图象与 x 轴有交点 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 有零点.

3、函数零点的求法：

求函数 $y=f(x)$ 的零点：

① （代数法）求方程 $f(x)=0$ 的实数根；

② （几何法）对于不能用求根公式的方程，可以将它与函数 $y=f(x)$ 的图象联系起来，并利用函数的性质找出零点.

4、二次函数的零点：

二次函数 $y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$.

1）△＞0，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两不等实根，二次函数的图象与 x 轴有两个交点，二次函数有两个零点.

2）△＝0，方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两相等实根（二重根），二次函数的图象与 x 轴有一个交点，二次函数有一个二重零点或二阶零点.

3）△＜0，方程 $ax^2+bx+c=0$ 无实根，二次函数的图象与 x 轴无交点，二次函数无零点.

高中数学 必修 2 知识点

第一章 空间几何体

1.1 柱、锥、台、球的结构特征

1.2 空间几何体的三视图和直观图

1 三视图：

正视图：从前往后　　侧视图：从左往右　　俯视图：从上往下

2 画三视图的原则：

长对齐、高对齐、宽相等

3 直观图：斜二测画法

4 斜二测画法的步骤：

（1）. 平行于坐标轴的线依然平行于坐标轴；

（2）. 平行于 y 轴的线长度变半，平行于 x，z 轴的线长度不变；

（3）. 画法要写好。

5 用斜二测画法画出长方体的步骤：（1）画轴（2）画底面（3）画侧棱（4）成图

1.3 空间几何体的表面积与体积

（一）空间几何体的表面积

1 棱柱、棱锥的表面积： 各个面面积之和

2 圆柱的表面积 $S = 2\pi rl + 2\pi r^2$

3 圆锥的表面积 $S = \pi rl + \pi r^2$

4 圆台的表面积 $S = \pi rl + \pi r^2 + \pi Rl + \pi R^2$

5 球的表面积 $S = 4\pi R^2$

（二）空间几何体的体积

1 柱体的体积 $V = S_{底} \times h$

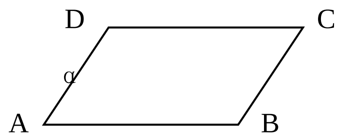
2 锥体的体积 $V = \frac{1}{3} S_{底} \times h$

3 台体的体积 $V = \frac{1}{3}(S_{上} + \sqrt{S_{上} S_{下}} + S_{下}) \times h$

4 球体的体积 $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

第二章 直线与平面的位置关系

2.1 空间点、直线、平面之间的位置关系



2.1.1

1 平面含义：平面是无限延展的

2 平面的画法及表示

（1）平面的画法：水平放置的平面通常画成一个平行四边形，锐角画成 45^0，且横边画成邻边的 2 倍长（如图）

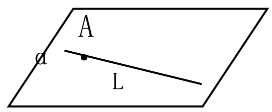
（2）平面通常用希腊字母α、β、γ等表示，如平面α、平面β等，也可以用表示平面的平行四边形的四个顶点或者相对的两个顶点的大写字母来表示，如平面 AC、平面 ABCD 等。

3 三个公理：

（1）公理 1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线在此平面内

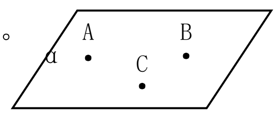
符号表示为

$$\left.\begin{array}{l} A\in L \\ B\in L \\ A\in \alpha \\ B\in \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \subseteq \alpha$$



公理 1 作用：判断直线是否在平面内

（2）公理 2：过不在一条直线上的三点，有且只有一个平面。



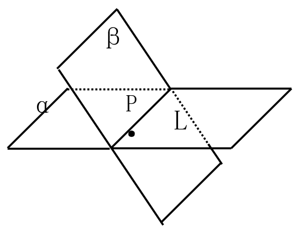
符号表示为：A、B、C 三点不共线 => 有且只有一个平面α，使 A∈α、B∈α、C∈α。

公理 2 作用：确定一个平面的依据。

（3）公理 3：如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线。

符号表示为：P∈α∩β =>α∩β=L，且 P∈L

公理 3 作用：判定两个平面是否相交的依据



2.1.2 空间中直线与直线之间的位置关系

1 空间的两条直线有如下三种关系：

共面直线 $\begin{cases} \text{相交直线：同一平面内，有且只有一个公共点；} \\ \text{平行直线：同一平面内，没有公共点；} \end{cases}$

异面直线： 不同在任何一个平面内，没有公共点。

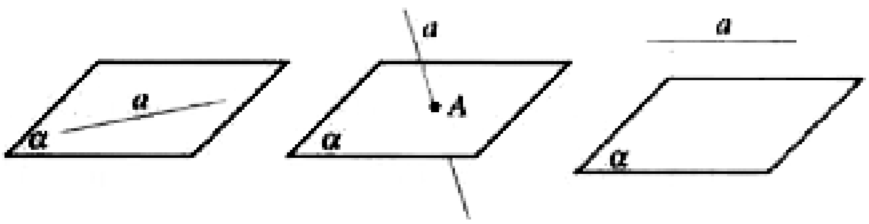
2 公理 4：平行于同一条直线的两条直线互相平行。
符号表示为：设 a、b、c 是三条直线

$$\left.\begin{array}{l} a /\!/ b \\ c /\!/ b \end{array}\right\} \Rightarrow a /\!/ c$$

强调：公理 4 实质上是说平行具有传递性，在平面、空间这个性质都适用。
公理 4 作用：判断空间两条直线平行的依据。
3 等角定理：空间中如果两个角的两边分别对应平行，那么这两个角相等或互补
4 注意点：
① a'与 b'所成的角的大小只由 a、b 的相互位置来确定，与 O 的选择无关，为简便，点 O 一般取在两直线中的一条上；
② 两条异面直线所成的角 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$；
③ 当两条异面直线所成的角是直角时，我们就说这两条异面直线互相垂直，记作 $a \perp b$；
④ 两条直线互相垂直，有共面垂直与异面垂直两种情形；
⑤ 计算中，通常把两条异面直线所成的角转化为两条相交直线所成的角。

2.1.3 — 2.1.4 空间中直线与平面、平面与平面之间的位置关系

1、直线与平面有三种位置关系：
（1）直线在平面内 —— 有无数个公共点
（2）直线与平面相交 —— 有且只有一个公共点
（3）直线在平面平行 —— 没有公共点
指出：直线与平面相交或平行的情况统称为直线在平面外，可⊄a α 来表示



$a \subset \alpha$　　　　$a \cap \alpha = A$　　　　$a /\!/ \alpha$

2.2.直线、平面平行的判定及其性质

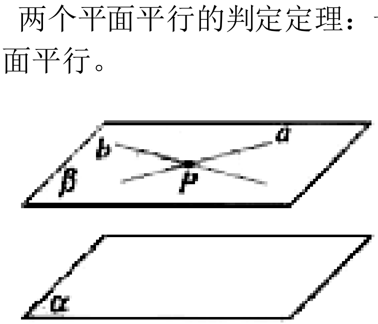
2.2.1 直线与平面平行的判定

1、直线与平面平行的判定定理：平面外一条直线与此平面内的一条直线平行，则该直线与此平面平行。
简记为：线线平行，则线面平行。
符号表示：

$$\left.\begin{array}{l} a \quad \alpha \not\subset \\ b \quad \beta \subset \\ a /\!/ b \end{array}\right\} \Rightarrow a /\!/ \alpha$$

2.2.2 平面与平面平行的判定

1、两个平面平行的判定定理：一个平面内的两条交直线与另一个平面平行，则这两个平面平行。



符号表示：

$$\left.\begin{array}{l} a \subset \beta \\ b \subset \beta \\ a \cap b = P \\ a /\!/ \alpha \\ b /\!/ \alpha \end{array}\right\} \beta /\!/ \alpha$$

2、判断两平面平行的方法有三种：

（1）用定义；

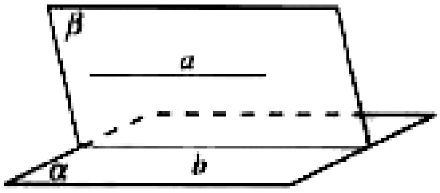
（2）判定定理；

（3）垂直于同一条直线的两个平面平行。

2.2.3 — 2.2.4 直线与平面、平面与平面平行的性质

1、定理：一条直线与一个平面平行，则过这条直线的任一平面与此平面的交线与该直线平行。

简记为：线面平行则线线平行。

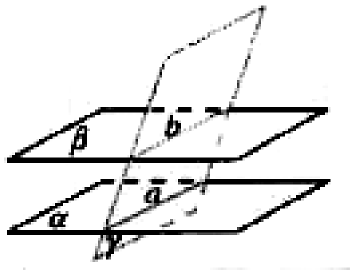


符号表示：

$$\left.\begin{array}{l} a /\!/ \alpha \\ a \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = b \end{array}\right\} a /\!/ b$$

作用：利用该定理可解决直线间的平行问题。

2、定理：如果两个平面同时与第三个平面相交，那么它们的交线平



符号表示：

$$\left.\begin{array}{l} \alpha /\!/ \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \end{array}\right\} a /\!/ b$$

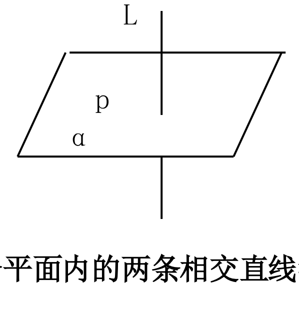
作用：可以由平面与平面平行得出直线与直线平行

2.3 直线、平面垂直的判定及其性质

2.3.1 直线与平面垂直的判定

1、定义

如果直线L与平面α内的任意一条直线都垂直，我们就说直线L与平面α互相垂直，记作L⊥α，直线L叫做平面α的垂线，平面α叫做直线L的垂面。如图，直线与平面垂直时，它们唯一公共点P叫做垂足。



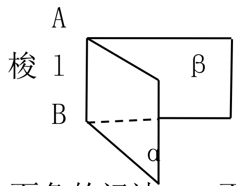
2、判定定理：**一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直。**

注意点：　a)定理中的“两条相交直线”这一条件不可忽视；

b)定理体现了“直线与平面垂直”与“直线与直线垂直”互相转化的数学思想。

2.3.2 平面与平面垂直的判定

1、二面角的概念：表示从空间一直线出发的两个半平面所组成的图形



2、二面角的记法：二面角α-l-β或α-AB-β

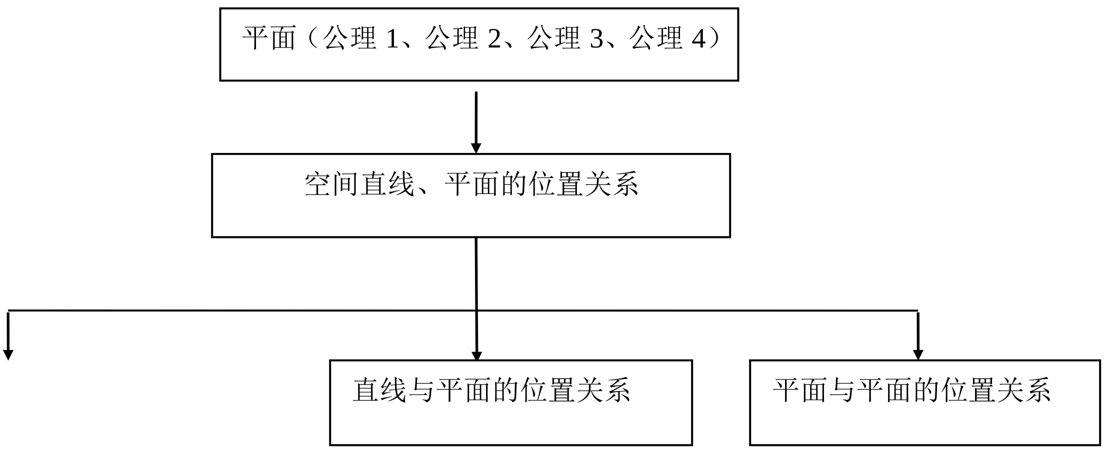
3、两个平面互相垂直的判定定理：**一个平面过另一个平面的垂线，则这两个平面垂直。**

2.3.3 — 2.3.4 直线与平面、平面与平面垂直的性质

1、定理：垂直于同一个平面的两条直线平行。

2 性质定理： 两个平面垂直，则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直。

本章知识结构框图



第三章 直线与方程

3.1 直线的倾斜角和斜率

3.1 倾斜角和斜率

1、直线的倾斜角的概念：当直线 l 与 x 轴相交时, 取 x 轴作为基准, x 轴正向与直线 l 向上方向之间所成的角α叫做直线 l 的倾斜角.特别地,当直线 l 与 x 轴平行或重合时, 规定α= 0°.

2、 倾斜角α的取值范围： 0°≤α＜180°. 当直线 l 与 x 轴垂直时, α= 90°.

3、直线的斜率:

一条直线的倾斜角α(α≠90°)的正切值叫做这条直线的斜率,斜率常用小写字母

k 表示,也就是 k = tanα

⑴当直线 l 与 x 轴平行或重合时, α=0°, k = tan0°=0;

⑵当直线 l 与 x 轴垂直时, α= 90°, k 不存在.

由此可知, 一条直线 l 的倾斜角α一定存在,但是斜率 k 不一定存在.

4、 直线的斜率公式:

给定两点 P1(x1,y1),P2(x2,y2),x1≠x2,用两点的坐标来表示直线 P1P2 的斜率:

斜率公式: k=y2-y1/x2-x1

3.1.2 两条直线的平行与垂直

1、两条直线都有斜率而且不重合，如果它们平行，那么它们的斜率相等；反之，如果它们的斜率相等，那么它们平行，即$l_1 /\!/ l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2$

注意: 上面的等价是在两条直线不重合且斜率存在的前提下才成立的，缺少这个前提，结论并不成立. 即如果 k1=k2, 那么一定有 L1∥L2

2、两条直线都有斜率，如果它们互相垂直，那么它们的斜率互为负倒数；反之，如果它们的斜率互为负倒数，那么它们互相垂直，即

3.2.1 直线的点斜式方程

1、 直线的**点斜式**方程：直线 l 经过点 $P_0(x_0,y_0)$，且斜率为 k $y-y_0=k(x-x_0)$

2、、直线的**斜截式**方程：已知直线 l 的斜率为 k，且与 y 轴的交点为 $(0,b)$ $y=kx+b$

3.2.2 直线的两点式方程

1、直线的两点式方程：已知两点 $P_1(x_1,x_2),P_2(x_2,y_2)$ 其中 $(x_1\neq x_2,y_1\neq y_2)$

y-y1/y-y2=x-x1/x-x2

2、直线的截距式方程：已知直线 l 与 x 轴的交点为 A$(a,0)$，与 y 轴的交点为 B$(0,b)$，其中 $a\neq 0,b\neq 0$

3.2.3 直线的一般式方程

1、直线的一般式 $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2} \Leftrightarrow k_1k_2 = -1$ 方程：关于 x,y 的二元一次方程 $Ax+By+C=0$（A，B 不同时为 0）

2、各种直线方程之间的互化。

3.3 直线的交点坐标与距离公式

3.3.1 两直线的交点坐标

1、给出例题：两直线交点坐标

L1 ：3x+4y-2=0　　L1：2x+y +2=0

解：解方程组 $\begin{cases}3x+4y-2=0\\2x+2y+2=0\end{cases}$ 　　得 x=-2，y=2

所以 L1 与 L2 的交点坐标为 M（-2，2）

3.3.2两点间距离

两点间的距离公式

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_2-x_2)^2+(y_2-y_1)^2}$$

3.3.3点到直线的距离公式

1．点到直线距离公式：

点 $P(x_0,y_0)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离为：$d=\dfrac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

2、两平行线间的距离公式：

已知两条平行线直线 l_1 和 l_2 的一般式方程为 l_1：$Ax+By+C_1=0$，

l_2：$Ax+By+C_2=0$，则 l_1 与 l_2 的距离为 $d=\dfrac{|C_1-C_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

第四章　　圆与方程

4.1.1 圆的标准方程

1、圆的标准方程：$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

圆心为 A(a,b),半径为 r 的圆的方程

2、点 $M(x_0,y_0)$ 与圆 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 的关系的判断方法：

（1）$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2>r^2$，点在圆外　（2）$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2=r^2$，点在圆上

（3）$(x_0-a)^2+(y_0-b)^2<r^2$，点在圆内

4.1.2　圆的一般方程

1、圆的一般方程：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$

2、圆的一般方程的特点：

(1)①x2 和 y2 的系数相同，不等于 0.　②没有 xy 这样的二次项.

⑵圆的一般方程中有三个特定的系数 D、E、F，因之只要求出这三个系数，圆的方程就确定了.

(3)、与圆的标准方程相比较，它是一种特殊的二元二次方程，代数特征明显，
圆的标准方程则指出了圆心坐标与半径大小，几何特征较明显。

4.2.1 圆与圆的位置关系

1、用点到直线的距离来判断直线与圆的位置关系.

设直线l：$ax+by+c=0$，圆C：$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，圆的半径为r，圆心$(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$到直线的距离为$d$，则判别直线与圆的位置关系的依据有以下几点：

（1）当$d>r$时，直线l与圆C相离；（2）当$d=r$时，直线l与圆C相切；

（3）当$d<r$时，直线l与圆C相交；

4.2.2 圆与圆的位置关系

两圆的位置关系.

设两圆的连心线长为l，则判别圆与圆的位置关系的依据有以下几点：

（1）当$l>r_1+r_2$时，圆C_1与圆C_2相离；（2）当$l=r_1+r_2$时，圆C_1与圆C_2外切；

（3）当$|r_1-r_2|<l<r_1+r_2$时，圆C_1与圆C_2相交；

（4）当$l=|r_1-r_2|$时，圆C_1与圆C_2内切；（5）当$l<|r_1-r_2|$时，圆C_1与圆C_2内含；

4.2.3 直线与圆的方程的应用

1、利用平面直角坐标系解决直线与圆的位置关系；

2、过程与方法

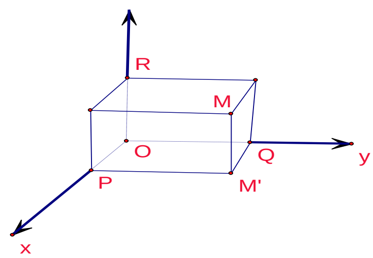
用坐标法解决几何问题的步骤：

第一步：建立适当的平面直角坐标系，用坐标和方程表示问题中的几何元素，将平面几何问题转化为代数问题；

第二步：通过代数运算，解决代数问题；

第三步：将代数运算结果“翻译”成几何结论.

4.3.1 空间直角坐标系

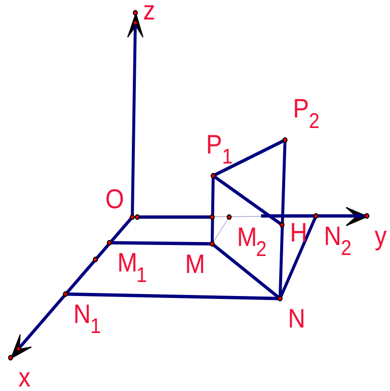


1、点 M 对应着唯一确定的有序实数组(x,y,z)，x、y、z分别是 P、Q、R 在x、y、z轴上的坐标

2、有序实数组(x,y,z)，对应着空间直角坐标系中的一点

3、空间中任意点 M 的坐标都可以用有序实数组(x, y, z)来表示，该数组叫做点 M 在此空间直角坐标系中的坐标，记 M(x, y, z)，x叫做点 M 的横坐标，y叫做点 M 的纵坐标，z叫做点 M 的竖坐标。

4.3.2 空间两点间的距离公式



1、空间中任意一点$P_1(x_1, y_1, z_1)$到点$P_2(x_2, y_2, z_2)$之间的距离公式

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

高中数学　必修 3 知识点

第一章 算法初步

1.1.1算法的概念

1、算法概念：

在数学上，现代意义上的“算法”通常是指可以用计算机来解决的某一类问题是程序或步骤，这些程序或步骤必须是明确和有效的，而且能够在有限步之内完成.

2. 算法的特点:

(1)有限性：一个算法的步骤序列是有限的，必须在有限操作之后停止，不能是无限的.

(2)确定性：算法中的每一步应该是确定的并且能有效地执行且得到确定的结果，而不应当是模棱两可.

(3)顺序性与正确性：算法从初始步骤开始，分为若干明确的步骤，每一个步骤只能有一个确定的后继步骤，前一步是后一步的前提，只有执行完前一步才能进行下一步，并且每一步都准确无误，才能完成问题.

(4)不唯一性：求解某一个问题的解法不一定是唯一的，对于一个问题可以有不同的算法.

(5)普遍性：很多具体的问题，都可以设计合理的算法去解决，如心算、计算器计算都要经过有限、事先设计好的步骤加以解决.

1.1.2 程序框图

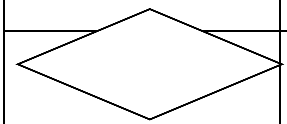
1、程序框图基本概念:

（一）程序构图的概念：程序框图又称流程图，是一种用规定的图形、指向线及文字说明来准确、直观地表示算法的图形。

一个程序框图包括以下几部分：表示相应操作的程序框；带箭头的流程线；程序框外必要文字说明。

（二）构成程序框的图形符号及其作用

程序框	名称	功能
	起止框	表示一个算法的起始和结束，是任何流程图不可少的。

	输入、输出框	表示一个算法输入和输出的信息，可用在算法中任何需要输入、输出的位置。
	处理框	赋值、计算，算法中处理数据需要的算式、公式等分别写在不同的用以处理数据的处理框内。
	判断框	判断某一条件是否成立，成立时在出口处标明“是”或“Y”；不成立时标明“否”或“N”。

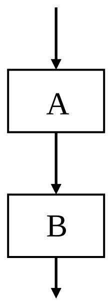
学习这部分知识的时候，要掌握各个图形的形状、作用及使用规则，画程序框图的规则如下：

1、使用标准的图形符号。2、框图一般按从上到下、从左到右的方向画。3、除判断框外，大多数流程图符号只有一个进入点和一个退出点。判断框具有超过一个退出点的唯一符号。4、判断框分两大类，一类判断框“是”与“否”两分支的判断，而且有且仅有两个结果；另一类是多分支判断，有几种不同的结果。5、在图形符号内描述的语言要非常简练清楚。

（三）、算法的三种基本逻辑结构：顺序结构、条件结构、循环结构。

1、顺序结构：顺序结构是最简单的算法结构，语句与语句之间，框与框之间是按从上到下的顺序进行的，它是由若干个依次执行的处理步骤组成的，它是任何一个算法都离不开的一种基本算法结构。

顺序结构在程序框图中的体现就是用流程线将程序框自上而下地连接起来，按顺序执行算法步骤。如在示意图中，A 框和 B 框是依次执行的，只有在执行完 A 框指定的操作后，才能接着执行 B 框所指定的操作。



2、条件结构：

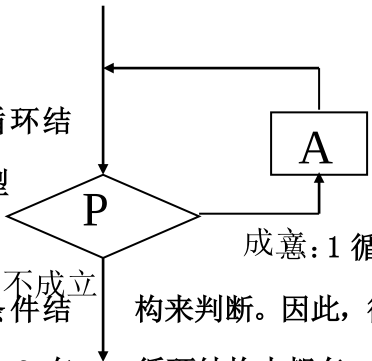
条件结构是指在算法中通过对条件的判断根据条件是否成立而选择不同流向的算法结构。

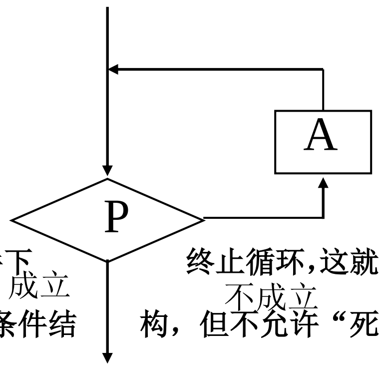
条件 P 是否成立而选择执行 A 框或 B 框。无论 P 条件是否成立，只能执行 A 框或 B 框之一，不可能同时执行 A 框和 B 框，也不可能 A 框、B 框都不执行。一个判断结构可以有多个判断框。

3、**循环结构**：在一些算法中，经常会出现从某处开始，按照一定条件，反复执行某一处理步骤的情况，这就是循环结构，反复执行的处理步骤为循环体，显然，循环结构中一定包含条件结构。循环结构又称重复结构，循环结构可细分为两类：

（1）、一类是当型循环结构，如下左图所示，它的功能是当给定的条件 P 成立时，执行 A 框，A 框执行完毕后，再判断条件 P 是否成立，如果仍然成立，再执行 A 框，如此反复执行 A 框，直到某一次条件 P 不成立为止，此时不再执行 A 框，离开循环结构。

（2）、另一类是直到型循环结构，如下右图所示，它的功能是先执行，然后判断给定的条件 P 是否成立，如果 P 仍然不成立，则继续执行 A 框，直到某一次给定的条件 P 成立为止，此时不再执行 A 框，离开循环结构。





当型循环结构

直到型循环结构

注意：1 循环结构要在某个条件下终止循环，这就需要条件结构来判断。因此，循环结构中一定包含条件结构，但不允许“死循环”。2 在循环结构中都有一个计数变量和累加变量。计数变量用于记录循环次数，累加变量用于输出结果。计数变量和累加变量一般是同步执行的，累加一次，计数一次。

1.2.1输入、输出语句和赋值语句

1、输入语句

（1）输入语句的一般格式

INPUT“提示内容”；变量 —图形计算器格式→ INPUT “提示内容”，变量

（2）输入语句的作用是实现算法的输入信息功能；（3）“提示内容”提示用户输入什么样的信息，变量是指程序在运行时其值是可以变化的量；（4）输入语句要求输入的值只能是具体的常数，不能是函数、变量或表达式；（5）提示内容与变量之间用分号“；”隔开，若输入多个变量，变量与变量之间用逗号“，”隔开。

2、输出语句

（1）输出语句的一般格式

PRINT“提示内容”；表达式 —图形计算器格式→ Disp “提示内容”，变量

（2）输出语句的作用是实现算法的输出结果功能；（3）“提示内容”提示用户输入什么样的信息，表达式是指程序要输出的数据；（4）输出语句可以输出常量、变量或表达式的值以及字符。

3、赋值语句

（1）赋值语句的一般格式

变量＝表达式　　图形计算器格式　　表达式→变量

（2）赋值语句的作用是将表达式所代表的值赋给变量；（3）赋值语句中的“＝”称作赋值号，与数学中的等号的意义是不同的。赋值号的左右两边不能对换，它将赋值号右边的表达式的值赋给赋值号左边的变量；（4）赋值语句左边只能是变量名字，而不是表达式，右边表达式可以是一个数据、常量或算式；（5）对于一个变量可以多次赋值。

注意：①赋值号左边只能是变量名字，而不能是表达式。如：2=X 是错误的。②赋值号左右不能对换。如“A=B”“B=A”的含义运行结果是不同的。③不能利用赋值语句进行代数式的演算。（如化简、因式分解、解方程等）④赋值号“=”与数学中的等号意义不同。

1．2．2 条件语句

1、条件语句的一般格式有两种：（1）IF—THEN—ELSE 语句；（2）IF—THEN 语句。**2、IF—THEN—ELSE 语句**

IF—THEN—ELSE 语句的一般格式为图 1，对应的程序框图为图 2。

```
IF  条件  THEN
    语句 1
ELSE
    语句 2
END IF
```

图 1

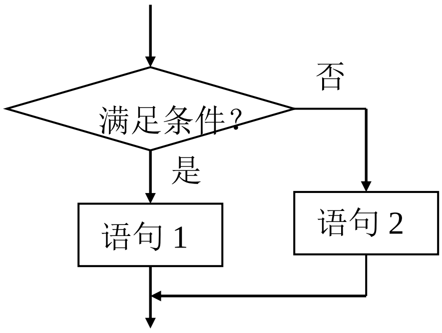


图 2

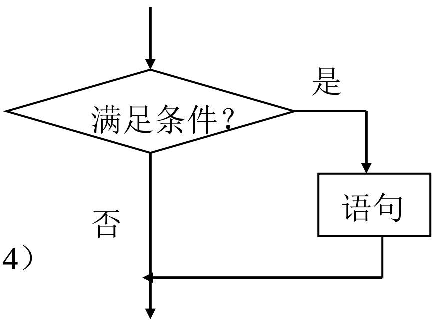
分析：在 IF—THEN—ELSE 语句中，“条件”表示判断的条件，“语句 1”表示满足条件时执行的操作内容；“语句 2”表示不满足条件时执行的操作内容；END IF 表示条件语句的结束。计算机在执行时，首先对 IF 后的条件进行判断，如果条件符合，则执行 THEN 后面的语句 1；若条件不符合，则执行 ELSE 后面的语句 2。

3、IF—THEN 语句

IF—THEN 语句的一般格式为图 3，对应的程序框图为图 4。

```
IF  条件  THEN
    语句
END IF
```

（图 3）



（图 4）

注意：“条件”表示判断的条件；“语句”表示满足条件时执行的操作内容，条件不满足时，结束程序；END IF 表示条件语句的结束。计算机在执行时首先对 IF 后的条件进行判断，如果条件符合就执行 THEN 后边的语句，若条件不符合则直接结束该条件语句，转而执行其它语句。

1．2．3 循环语句

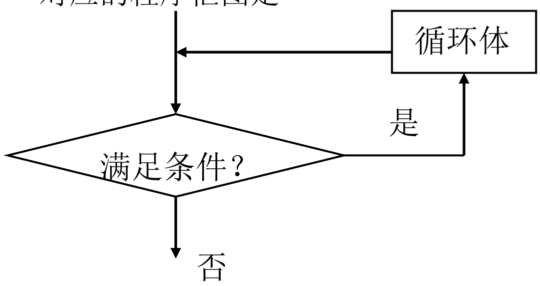
循环结构是由循环语句来实现的。对应于程序框图中的两种循环结构，一般程序设计语言中也有当型（WHILE 型）和直到型（UNTIL 型）两种语句结构。即 WHILE 语句和 UNTIL 语句。

1、WHILE 语句

（1）WHILE 语句的一般格式是

```
WHILE    条件
循环体
WEND
```

对应的程序框图是



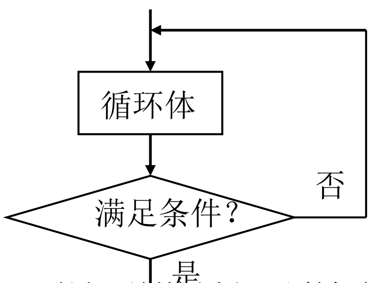
（2）当计算机遇到 WHILE 语句时，先判断条件的真假，如果条件符合，就执行 WHILE 与 WEND 之间的循环体；然后再检查上述条件，如果条件仍符合，再次执行循环体，这个过程反复进行，直到某一次条件不符合为止。这时，计算机将不执行循环体，直接跳到 WEND 语句后，接着执行 WEND 之后的语句。因此，当型循环有时也称为“前测试型”循环。

2、UNTIL 语句

（1）UNTIL 语句的一般格式是

```
DO
循环体
LOOP   UNTIL    条件
```

对应的程序框图是



（2）直到型循环又称为“后测试型”循环，从 UNTIL 型循环结构分析，计算机执行该语句时，先执行一次循环体，然后进行条件的判断，如果条件不满足，继续返回执行循环体，然后再进行条件的判断，这个过程反复进行，直到某一次条件满足时，不再执行循环体，跳到 LOOP UNTIL 语句后执行其他语句，是先执行循环体后进行条件判断的循环语句。

分析：当型循环与直到型循环的区别：（先由学生讨论再归纳）

（1） 当型循环先判断后执行，直到型循环先执行后判断；

在 WHILE 语句中，是当条件满足时执行循环体，在 UNTIL 语句中，是当条件不满足时执

行循环

1.3.1 辗转相除法与更相减损术

1、辗转相除法。也叫欧几里德算法，用辗转相除法求最大公约数的步骤如下：

（1）：用较大的数 m 除以较小的数 n 得到一个商 S_0 和一个余数 R_0；（2）：若 $R_0=0$，则 n 为 m，n 的最大公约数；若 $R_0\neq0$，则用除数 n 除以余数 R_0 得到一个商 S_1 和一个余数 R_1；（3）：若 $R_1=0$，则 R_1 为 m，n 的最大公约数；若 $R_1\neq0$，则用除数 R_0 除以余数 R_1 得到一个商 S_2 和一个余数 R_2；……　　依次计算直至 $R_n=0$，此时所得到的 R_{n-1} 即为所求的最大公约数。

2、更相减损术

我国早期也有求最大公约数问题的算法，就是更相减损术。在《九章算术》中有更相减损术求最大公约数的步骤：可半者半之，不可半者，副置分母•子之数，以少减多，更相减损，求其等也，以等数约之。

翻译为：(1)：任意给出两个正数；判断它们是否都是偶数。若是，用 2 约简；若不是，执行第二步。(2)：以较大的数减去较小的数，接着把较小的数与所得的差比较，并以大数减小数。继续这个操作，直到所得的数相等为止，则这个数（等数）就是所求的最大公约数。

例 2 用更相减损术求 98 与 63 的最大公约数.

分析：（略）

3、辗转相除法与更相减损术的区别：

（1）都是求最大公约数的方法，计算上辗转相除法以除法为主，更相减损术以减法为主，计算次数上辗转相除法计算次数相对较少，特别当两个数字大小区别较大时计算次数的区别较明显。

（2）从结果体现形式来看，辗转相除法体现结果是以相除余数为 0 则得到，而更相减损术则以减数与差相等而得到

1.3.2 秦九韶算法与排序

1、秦九韶算法概念：

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots.+a_1x+a_0$ 求值问题

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots.+a_1x+a_0=(a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots.+a_1)x+a_0$

$=((a_nx^{n-2}+a_{n-1}x^{n-3}+\cdots.+a_2)x+a_1)x+a_0$

$=......=(...(a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x+...+a_1)x+a_0$

求多项式的值时，首先计算最内层括号内依次多项式的值，即 $v_1=a_nx+a_{n-1}$

然后由内向外逐层计算一次多项式的值，即

$v_2=v_1x+a_{n-2}$　　$v_3=v_2x+a_{n-3}$　　......　　$v_n=v_{n-1}x+a_0$

这样，把 n 次多项式的求值问题转化成求 n 个一次多项式的值的问题。

2、两种排序方法：直接插入排序和冒泡排序

1、直接插入排序

基本思想：插入排序的思想就是读一个，排一个。将第 1 个数放入数组的第 1 个元素中，以后读入的数与已存入数组的数进行比较，确定它在从大到小的排列中应处的位置. 将该位置以及以后的元素向后推移一个位置，将读入的新数填入空出的位置中.（由于算法简单，可以举例说明）

2、冒泡排序

基本思想：依次比较相邻的两个数,把大的放前面,小的放后面.即首先比较第 1 个数和第 2 个数,大数放前,小数放后.然后比较第 2 个数和第 3 个数......直到比较最后两个数.第一趟结束,最小的一定沉到最后.重复上过程,仍从第 1 个数开始,到最后第 2 个数...... 由于在排序过程中总是大数往前,小数往后,相当气泡上升,所以叫冒泡排序.

1.3.3 进位制

1、概念：进位制是一种记数方式，用有限的数字在不同的位置表示不同的数值。可使用数字符号的个数称为基数，基数为 n，即可称 n 进位制，简称 n 进制。现在最常用的是十进制，通常使用 10 个阿拉伯数字 0-9 进行记数。对于任何一个数，我们可以用不同的进位制来表示。比如：十进数 57，可以用二进制表示为 111001，也可以用八进制表示为 71、用十六进制表示为 39，它们所代表的数值都是一样的。

一般地，若 k 是一个大于一的整数，那么以 k 为基数的 k 进制可以表示为：

$$a_na_{n-1}...a_1a_{0(k)} \qquad (0<a_n<k, 0\le a_{n-1},...,a_1,a_0<k),$$

而表示各种进位制数一般在数字右下脚加注来表示,如 $111001_{(2)}$ 表示二进制数, $34_{(5)}$ 表示 5 进制数

第二章　　统计

2.1.1 简单随机抽样

1．总体和样本

在统计学中 ，把研究对象的全体叫做总体.

把每个研究对象叫做个体.

把总体中个体的总数叫做总体容量.

为了研究总体x的有关性质，一般从总体中随机抽取一部分：x_1， x_2， ⋯， x_n 研究，我们称它为样本．其中个体的个数称为样本容量.

2．简单随机抽样，也叫纯随机抽样。就是从总体中不加任何分组、划类、排队等，完全随

机地抽取调查单位。特点是：每个样本单位被抽中的可能性相同（概率相等)，样本的每个单位完全独立，彼此间无一定的关联性和排斥性。简单随机抽样是其它各种抽样形式的基础。通常只是在总体单位之间差异程度较小和数目较少时，才采用这种方法。

3．简单随机抽样常用的方法：

（1）抽签法；⑵随机数表法；⑶计算机模拟法；⑷使用统计软件直接抽取。

在简单随机抽样的样本容量设计中，主要考虑：①总体变异情况；②允许误差范围；③概率保证程度。

4．抽签法:

（1）给调查对象群体中的每一个对象编号；

（2）准备抽签的工具，实施抽签

（3）对样本中的每一个个体进行测量或调查

例：请调查你所在的学校的学生做喜欢的体育活动情况。

5．随机数表法：

例：利用随机数表在所在的班级中抽取10位同学参加某项活动。

2.1.2 系统抽样

1．系统抽样（等距抽样或机械抽样)：

把总体的单位进行排序，再计算出抽样距离，然后按照这一固定的抽样距离抽取样本。第一个样本采用简单随机抽样的办法抽取。

K（抽样距离）=N（总体规模）/n（样本规模）

前提条件：总体中个体的排列对于研究的变量来说，应是随机的，即不存在某种与研究变量相关的规则分布。可以在调查允许的条件下，从不同的样本开始抽样，对比几

次样本的特点。如果有明显差别，说明样本在总体中的分布承某种循环性规律，且这种循环和抽样距离重合。

2．系统抽样，即等距抽样是实际中最为常用的抽样方法之一。因为它对抽样框的要求较低，实施也比较简单。更为重要的是，如果有某种与调查指标相关的辅助变量可供使用，总体单元按辅助变量的大小顺序排队的话，使用系统抽样可以大大提高估计精度。

2.1.3 分层抽样

1．分层抽样（类型抽样）：

先将总体中的所有单位按照某种特征或标志（性别、年龄等）划分成若干类型或层次，然后再在各个类型或层次中采用简单随机抽样或系用抽样的办法抽取一个子样本，最后，将这些子样本合起来构成总体的样本。

两种方法：

1．先以分层变量将总体划分为若干层，再按照各层在总体中的比例从各层中抽取。

2．先以分层变量将总体划分为若干层，再将各层中的元素按分层的顺序整齐排列，最后用系统抽样的方法抽取样本。

2．分层抽样是把异质性较强的总体分成一个个同质性较强的子总体，再抽取不同的子总体中的样本分别代表该子总体，所有的样本进而代表总体。

分层标准：

（1）以调查所要分析和研究的主要变量或相关的变量作为分层的标准。

（2）以保证各层内部同质性强、各层之间异质性强、突出总体内在结构的变量作为分层变量。

（3）以那些有明显分层区分的变量作为分层变量。

3．分层的比例问题：

（1）按比例分层抽样：根据各种类型或层次中的单位数目占总体单位数目的比重来抽取子样本的方法。

（2）不按比例分层抽样：有的层次在总体中的比重太小，其样本量就会非常少，此时采用该方法，主要是便于对不同层次的子总体进行专门研究或进行相互比较。如果要用样本资料推断总体时，则需要先对各层的数据资料进行加权处理，调整样本中各层的比例，使数据恢复到总体中各层实际的比例结构。

2.2.2 用样本的数字特征估计总体的数字特征

1、本均值：$\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$

2、. 样本标准差：$s=\sqrt{s^2}=\sqrt{\dfrac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$

3．用样本估计总体时，如果抽样的方法比较合理，那么样本可以反映总体的信息，但从样本得到的信息会有偏差。在随机抽样中，这种偏差是不可避免的。

虽然我们用样本数据得到的分布、均值和标准差并不是总体的真正的分布、均值和标准差，而只是一个估计，但这种估计是合理的，特别是当样本量很大时，它们确实反映了总体的信息。

4．（1）如果把一组数据中的每一个数据都加上或减去同一个共同的常数，标准差不变

（2）如果把一组数据中的每一个数据乘以一个共同的常数 k，标准差变为原来的 k 倍

（3）一组数据中的最大值和最小值对标准差的影响，区间$(\bar{x}-3s,\bar{x}+3s)$的应用；

“去掉一个最高分，去掉一个最低分”中的科学道理

2.3.2 两个变量的线性相关

1、概念:

（1）回归直线方程

（2）回归系数

2．最小二乘法

3．直线回归方程的应用

（1）描述两变量之间的依存关系；利用直线回归方程即可定量描述两个变量间依存的数量关系

（2）利用回归方程进行预测；把预报因子（即自变量 x）代入回归方程对预报量（即因变量 Y）进行估计，即可得到个体 Y 值的容许区间。

（3）利用回归方程进行统计控制规定 Y 值的变化，通过控制 x 的范围来实现统计控制的目标。如已经得到了空气中 NO_2 的浓度和汽车流量间的回归方程，即可通过控制汽车流量来控制空气中 NO_2 的浓度。

4．应用直线回归的注意事项

（1）做回归分析要有实际意义；

（2）回归分析前,最好先作出散点图；

（3）回归直线不要外延。

第三章　　概 率

3.1.1 —3.1.2 随机事件的概率及概率的意义

1、基本概念：

（1）必然事件：在条件 S 下，一定会发生的事件，叫相对于条件 S 的必然事件；

（2）不可能事件：在条件 S 下，一定不会发生的事件，叫相对于条件 S 的不可能事件；

（3）确定事件：必然事件和不可能事件统称为相对于条件 S 的确定事件；

（4）随机事件：在条件 S 下可能发生也可能不发生的事件，叫相对于条件 S 的随机事件；

（5）频数与频率：在相同的条件 S 下重复 n 次试验，观察某一事件 A 是否出现，称 n 次试验中事件 A 出现的次数 nA 为事件 A 出现的频数；称事件 A 出现的比例 fn(A)= $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 出现的概率：对于给定的随机事件 A，如果随着试验次数的增加，事件 A 发生的频率 fn(A)稳定在某个常数上，把这个常数记作 P（A），称为事件 A 的概率。

（6）频率与概率的区别与联系：随机事件的频率，指此事件发生的次数 nA 与试验总次数 n 的比值 $\frac{n_A}{n}$ ，它具有一定的稳定性，总在某个常数附近摆动，且随着试验次数的不断增多，这种摆动幅度越来越小。我们把这个常数叫做随机事件的概率，概率从数量上反映了随机事件发生的可能性的大小。频率在大量重复试验的前提下可以近似地作为这个事件的概率

3.1.3 概率的基本性质

1、基本概念：

（1）事件的包含、并事件、交事件、相等事件

（2）若 A∩B 为不可能事件，即 A∩B=ф，那么称事件 A 与事件 B 互斥；

（3）若 A∩B 为不可能事件，A∪B 为必然事件，那么称事件 A 与事件 B 互为对立事件；

（4）当事件 A 与 B 互斥时，满足加法公式：P(A∪B)= P(A)+ P(B)；若事件 A 与 B 为对

立事件，则 A∪B 为必然事件，所以 P(A∪B)= P(A)+ P(B) =1，于是有 P(A)=1—P(B)

2、概率的基本性质：

1）必然事件概率为 1，不可能事件概率为 0，因此 0≤P(A)≤1；

2）当事件 A 与 B 互斥时，满足加法公式：P(A∪B)= P(A)+ P(B)；

3）若事件 A 与 B 为对立事件，则 A∪B 为必然事件，所以 P(A∪B)= P(A)+ P(B)=1，于是有 P(A)=1—P(B)；

4）互斥事件与对立事件的区别与联系，互斥事件是指事件 A 与事件 B 在一次试验中不会同时发生，其具体包括三种不同的情形：（1）事件 A 发生且事件 B 不发生；（2）事件 A 不发生且事件 B 发生；（3）事件 A 与事件 B 同时不发生，而对立事件是指事件 A 与事件 B 有且仅有一个发生，其包括两种情形；（1）事件 A 发生 B 不发生；（2）事件 B 发生事件 A 不发生，对立事件互斥事件的特殊情形。

3.2.1 —3.2.2 古典概型及随机数的产生

1、（1）古典概型的使用条件：试验结果的有限性和所有结果的等可能性。

（2）古典概型的解题步骤；

①求出总的基本事件数；

②求出事件 A 所包含的基本事件数，然后利用公式 P（A）= $\dfrac{A\text{包含的基本事件数}}{\text{总的基本事件个数}}$

3.3.1—3.3.2 几何概型及均匀随机数的产生

1、基本概念：

（1）几何概率模型：如果每个事件发生的概率只与构成该事件区域的长度（面积或体积）成比例，则称这样的概率模型为几何概率模型；

（2）几何概型的概率公式：

P（A）= $\dfrac{\text{构成事件}A\text{的区域长度（面积或体积）}}{\text{试验的全部结果所构成的区域长度（面积或体积）}}$；

（2） 几何概型的特点：1）试验中所有可能出现的结果（基本事件）有无限多个；2）每个基本事件出现的可能性相等.

高中数学　必修 4 知识点

第一章 三角函数

1、任意角$\begin{cases}正角:按逆时针方向旋转形成的角\\负角:按顺时针方向旋转形成的角\\零角:不作任何旋转形成的角\end{cases}$

2、角α的顶点与原点重合，角的始边与x轴的非负半轴重合，终边落在第几象限，则称α为第几象限角.

第一象限角的集合为$\left\{\alpha\left|k\cdot 360^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+90^\circ,k\in \mathrm{Z}\right.\right\}$

第二象限角的集合为$\left\{\alpha\left|k\cdot 360^\circ+90^\circ<k\cdot 360^\circ+180^\circ,k\in \mathrm{Z}\right.\right\}$

第三象限角的集合为$\left\{\alpha\left|k\cdot 360^\circ+180^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+270^\circ,k\in \mathrm{Z}\right.\right\}$

第四象限角的集合为$\left\{\alpha\left|k\cdot 360^\circ+270^\circ<\alpha<k\cdot 360^\circ+360^\circ,k\in \mathrm{Z}\right.\right\}$

终边在x轴上的角的集合为$\left\{\alpha\left|\alpha=k\cdot 180^\circ,k\in \mathrm{Z}\right.\right\}$

终边在y轴上的角的集合为$\left\{\alpha\left|\alpha=k\cdot 180^\circ+90^\circ,k\in \mathrm{Z}\right.\right\}$

终边在坐标轴上的角的集合为$\left\{\alpha\left|\alpha=k\cdot 90^\circ,k\in \mathrm{Z}\right.\right\}$

3、与角α终边相同的角的集合为$\left\{\beta\left|\beta=k\cdot 360^\circ+\alpha,k\in \mathrm{Z}\right.\right\}$

4、长度等于半径长的弧所对的圆心角叫做1弧度.

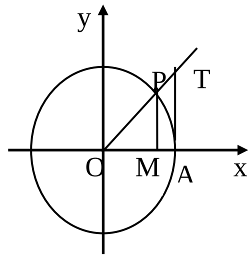
5、半径为r的圆的圆心角α所对弧的长为l，则角α的弧度数的绝对值是$\left|\alpha\right|=\dfrac{l}{r}$.

6、弧度制与角度制的换算公式：$2\pi=360^\circ$，$1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$，$1=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ\approx 57.3^\circ$.

7、若扇形的圆心角为$\alpha\left(\alpha为弧度制\right)$，半径为$r$，弧长为$l$，周长为$C$，面积为$S$，则

$l=r\left|\alpha\right|$，$C=2r+l$，$S=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}\left|\alpha\right|r^2$.

8、设α是一个任意大小的角，α的终边上任意一点P的坐标是$\left(x,y\right)$，它与原点的距离是$r\left(r=\sqrt{x^2+y^2}>0\right)$，则$\sin\alpha=\dfrac{y}{r}$，$\cos\alpha=\dfrac{x}{r}$，$\tan\alpha=\dfrac{y}{x}\left(x\neq 0\right)$.



9、三角函数在各象限的符号：第一象限全为正，第二象限正弦为正，第三象限正切为正，第四象限余弦为正.

10、三角函数线：$\sin\alpha=\mathrm{MP}$，$\cos\alpha=\mathrm{OM}$，$\tan\alpha=\mathrm{AT}$.

11、角三角函数的基本关系：

$(1)\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \qquad \left(\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha,\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\right)$；

$(2)\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha\left(\sin\alpha=\tan\alpha\cos\alpha,\cos\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\tan\alpha}\right)$.

12、函数的诱导公式：

$(1)\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$，$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha$，$\tan(2k\pi+\alpha)=\tan\alpha\left(k\in\mathrm{Z}\right)$.

$(2)\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$，$\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$，$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha$.

$(3)\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$，$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$，$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$.

$(4)\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$，$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$.

口诀：函数名称不变，符号看象限.

$(5)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$，$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$. $(6)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha$，

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$.

口诀：正弦与余弦互换，符号看象限.

13、①的图象上所有点向左（右）平移$|\varphi|$个单位长度，得到函数$y=\sin(x+\varphi)$的图象；再将函数$y=\sin(x+\varphi)$的图象上所有点的横坐标伸长（缩短）到原来的$\dfrac{1}{\omega}$倍（纵坐标不变），得到函数$y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象；再将函数$y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象上所有点的纵坐标伸长（缩短）到原来的A倍（横坐标不变），得到函数$y=\mathrm{A}\sin(\omega x+\varphi)$的图象.

②数$y=\sin x$的图象上所有点的横坐标伸长（缩短）到原来的$\dfrac{1}{\omega}$倍（纵坐标不变），得到函数

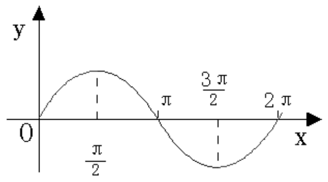
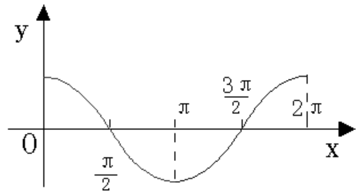
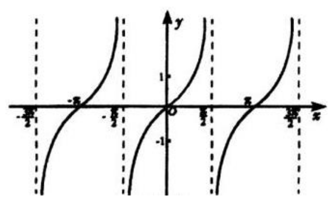
$y=\sin\omega x$的图象；再将函数$y=\sin\omega x$的图象上所有点向左（右）平移$\dfrac{|\varphi|}{\omega}$个单位长度，得到函数$y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象；再将函数$y=\sin(\omega x+\varphi)$的图象上所有点的纵坐标伸长（缩短）到原来的$\mathrm{A}$倍（横坐标不变），得到函数$y=\mathrm{A}\sin(\omega x+\varphi)$的图象.

14、函数$y=\mathrm{A}\sin(\omega x+\varphi)\left(\mathrm{A}>0,\omega>0\right)$的性质：

①振幅：A；②周期：$\mathrm{T}=\dfrac{2\pi}{\omega}$；③频率：$f=\dfrac{1}{\mathrm{T}}=\dfrac{\omega}{2\pi}$；④相位：$\omega x+\varphi$；⑤初相：$\varphi$.

函数 $y = \mathrm{A}\sin(\omega x+\varphi)+\mathrm{B}$，当 $x = x_1$ 时，取得最小值为 $y_{\min}$ ；当 $x = x_2$ 时，取得最大值为 $y_{\max}$，则 $\mathrm{A}=\frac{1}{2}(y_{\max}-y_{\min})$，$\mathrm{B}=\frac{1}{2}(y_{\max}+y_{\min})$，$\frac{\mathrm{T}}{2}=x_2-x_1\,(x_1<x_2)$．

15、正弦函数、余弦函数和正切函数的图象与性质：

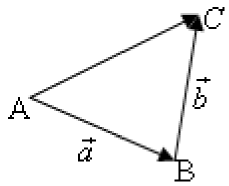
函数 性质	$y=\sin x$	$y=\cos x$	$y=\tan x$
图象			
定义域	R	R	$\left\{x\,\middle\|\,x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathrm{Z}\right\}$
值域	$[-1,1]$	$[-1,1]$	R
最值	当 $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathrm{Z})$ 时，$y_{\max}=1$；当 $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ $(k\in\mathrm{Z})$ 时，$y_{\min}=-1$．	当 $x=2k\pi\,(k\in\mathrm{Z})$ 时，$y_{\max}=1$；当 $x=2k\pi+\pi$ $(k\in\mathrm{Z})$ 时，$y_{\min}=-1$．	既无最大值也无最小值
周期性	2π	2π	π
奇偶性	奇函数	偶函数	奇函数
单调性	在 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathrm{Z})$ 上是增函数；在 $\left[2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$ $(k\in\mathrm{Z})$ 上是减函数．	在 $[2k\pi-\pi,2k\pi]\,(k\in\mathrm{Z})$ 上是增函数；在 $[2k\pi,2k\pi+\pi]$ $(k\in\mathrm{Z})$ 上是减函数．	在 $\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ $(k\in\mathrm{Z})$ 上是增函数．

对称性	对称中心$(k\pi,0)(k\in Z)$ 对称轴$x=k\pi+\frac{\pi}{2}(k\in Z)$	对称中心$\left(k\pi+\frac{\pi}{2},0\right)(k\in Z)$ 对称轴$x=k\pi(k\in Z)$	对称中心$\left(\frac{k\pi}{2},0\right)(k\in Z)$ 无对称轴

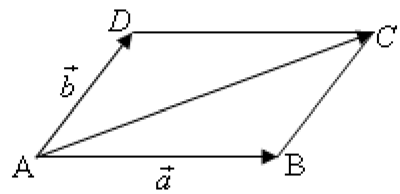
第二章　平面向量

16、向量：既有大小，又有方向的量．　数量：只有大小，没有方向的量．
有向线段的三要素：起点、方向、长度．　零向量：长度为0的向量．
单位向量：长度等于1个单位的向量．
平行向量（共线向量）：方向相同或相反的非零向量．零向量与任一向量平行．
相等向量：长度相等且方向相同的向量．

17、向量加法运算：
⑴三角形法则的特点：首尾相连．
⑵平行四边形法则的特点：共起点．
⑶三角形不等式：$\left||\vec a|-|\vec b|\right|\le|\vec a+\vec b|\le|\vec a|+|\vec b|$．



$\vec a+\vec b=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$



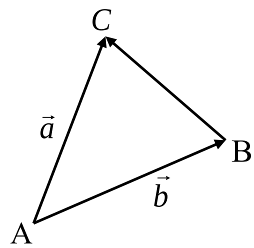
$\vec a+\vec b=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

⑷运算性质：①交换律：$\vec a+\vec b=\vec b+\vec a$；

②结合律：$(\vec a+\vec b)+\vec c=\vec a+(\vec b+\vec c)$；③$\vec a+\vec 0=\vec 0+\vec a=\vec a$．

⑸坐标运算：设$\vec a=(x_1,y_1)$，$\vec b=(x_2,y_2)$，则$\vec a+\vec b=(x_1+x_2,y_1+y_2)$．

18、向量减法运算：
⑴三角形法则的特点：共起点，连终点，方向指向被减向量．
⑵坐标运算：设$\vec a=(x_1,y_1)$，$\vec b=(x_2,y_2)$，则$\vec a-\vec b=(x_1-x_2,y_1-y_2)$．



$\vec a-\vec b=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

设A、B两点的坐标分别为(x_1,y_1)，(x_2,y_2)，则$\overrightarrow{AB}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$．

19、向量数乘运算：
⑴实数λ与向量$\vec a$的积是一个向量的运算叫做向量的数乘，记作$\lambda\vec a$．

①$|\lambda\vec a|=|\lambda||\vec a|$；

②当$\lambda>0$时，$\lambda\vec a$的方向与$\vec a$的方向相同；当$\lambda<0$时，$\lambda\vec a$的方向与$\vec a$的方向相反；

当$\lambda=0$时，$\lambda\vec a=\vec 0$．

⑵运算律：①$\lambda(\mu\vec a)=(\lambda\mu)\vec a$；②$(\lambda+\mu)\vec a=\lambda\vec a+\mu\vec a$；③$\lambda(\vec a+\vec b)=\lambda\vec a+\lambda\vec b$．

⑶坐标运算：设$\vec a=(x,y)$，则$\lambda\vec a=\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y)$．

20、向量共线定理：向量$\vec{a}\left(\vec{a}\neq\vec{0}\right)$与$\vec{b}$共线，当且仅当有唯一一个实数$\lambda$，使$\vec{b}=\lambda\vec{a}$.

设$\vec{a}=\left(x_1,y_1\right)$，$\vec{b}=\left(x_2,y_2\right)$，其中$\vec{b}\neq\vec{0}$，则当且仅当$x_1y_2-x_2y_1=0$时，向量$\vec{a}$、$\vec{b}\left(\vec{b}\neq\vec{0}\right)$共线.

21、平面向量基本定理：如果$\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$是同一平面内的两个不共线向量，那么对于这一平面内的任意向量$\vec{a}$，有且只有一对实数λ_1、λ_2，使$\vec{a}=\lambda_1\overrightarrow{e_1}+\lambda_2\overrightarrow{e_2}$.（不共线的向量$\overrightarrow{e_1}$、$\overrightarrow{e_2}$作为这一平面内所有向量的一组基底）

22、分点坐标公式：设点P是线段$\mathrm{P_1P_2}$上的一点，$\mathrm{P_1}$、$\mathrm{P_2}$的坐标分别是$\left(x_1,y_1\right)$，$\left(x_2,y_2\right)$，当$\overrightarrow{\mathrm{P_1P}}=\lambda\overrightarrow{\mathrm{PP_2}}$时，点$\mathrm{P}$的坐标是$\left(\dfrac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\dfrac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}\right)$.（当$\lambda=1$时，就为中点公式。）

23、平面向量的数量积：

⑴$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\cos\theta\left(\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0},0^\circ\leq\theta\leq180^\circ\right)$. 零向量与任一向量的数量积为$0$.

⑵性质：设$\vec{a}$和$\vec{b}$都是非零向量，则①$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. ②当$\vec{a}$与$\vec{b}$同向时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$；当$\vec{a}$与$\vec{b}$反向时，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$；$\vec{a}\cdot\vec{a}=\vec{a}^2=\left|\vec{a}\right|^2$或$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$. ③$\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|\leq\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|$.

⑶运算律：①$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$；②$\left(\lambda\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\vec{a}\cdot\left(\lambda\vec{b}\right)$；③$\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

⑷坐标运算：设两个非零向量$\vec{a}=\left(x_1,y_1\right)$，$\vec{b}=\left(x_2,y_2\right)$，则$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2$.

若$\vec{a}=\left(x,y\right)$，则$\left|\vec{a}\right|^2=x^2+y^2$，或$\left|\vec{a}\right|=\sqrt{x^2+y^2}$. 设$\vec{a}=\left(x_1,y_1\right)$，$\vec{b}=\left(x_2,y_2\right)$，则$\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$.

设$\vec{a}$、$\vec{b}$都是非零向量，$\vec{a}=\left(x_1,y_1\right)$，$\vec{b}=\left(x_2,y_2\right)$，$\theta$是$\vec{a}$与$\vec{b}$的夹角，则$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

第三章 三角恒等变换

24、两角和与差的正弦、余弦和正切公式：

⑴$\cos\left(\alpha-\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$；⑵$\cos\left(\alpha+\beta\right)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$；

⑶ $\sin\left(\alpha-\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$；⑷ $\sin\left(\alpha+\beta\right)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$；

⑸ $\tan\left(\alpha-\beta\right)=\dfrac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$ $\Rightarrow$ （$\tan\alpha-\tan\beta=\tan\left(\alpha-\beta\right)\left(1+\tan\alpha\tan\beta\right)$）；

⑹ $\tan\left(\alpha+\beta\right)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}$ $\Rightarrow$ （$\tan\alpha+\tan\beta=\tan\left(\alpha+\beta\right)\left(1-\tan\alpha\tan\beta\right)$）.

25、二倍角的正弦、余弦和正切公式：

⑴

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$. $\Rightarrow 1\pm\sin 2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\pm 2\sin\alpha\cos\alpha=(\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2$

⑵ $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$\Rightarrow$升幂公式$1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}, 1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$

$\Rightarrow$降幂公式$\cos^2\alpha=\dfrac{\cos 2\alpha+1}{2}$，$\sin^2\alpha=\dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$.

⑶ $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$.

万能公式：

$$\sin\alpha=\frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}};\cos\alpha=\frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

26、半角公式：

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}};\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\boxed{=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}}$$

$\Rightarrow$（后两个不用判断符号，更加好用）

27、合一变形$\Rightarrow$把两个三角函数的和或差化为“一个三角函数，一个角，一次方”的 $y=A\sin(\omega x+\varphi)+B$形式。$\mathrm{A}\sin\alpha+\mathrm{B}\cos\alpha=\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}\sin\left(\alpha+\varphi\right)$，其中$\tan\varphi=\dfrac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$.

28、三角变换是运算化简的过程中运用较多的变换，提高三角变换能力，要学会创设条件，灵活运用三角公式，掌握运算，化简的方法和技能．常用的数学思想方法技巧如下：

（1）角的变换：在三角化简，求值，证明中，表达式中往往出现较多的相异角，可根据角与角之间的和差，倍半，互补，互余的关系，运用角的变换，沟通条件与结论中角的差异，使问题获解，对角的变形如：

①$2\alpha$是α的二倍；4α是2α的二倍；α是$\dfrac{\alpha}{2}$的二倍；$\dfrac{\alpha}{2}$是$\dfrac{\alpha}{4}$的二倍；

② $15^o=45^o-30^o=60^o-45^o=\dfrac{30^o}{2}$；问：$\sin\dfrac{\pi}{12}=$ ________________；

$\cos\dfrac{\pi}{12}=$ __________；

③$\alpha=(\alpha+\beta)-\beta$；④$\dfrac{\pi}{4}+\alpha=\dfrac{\pi}{2}-(\dfrac{\pi}{4}-\alpha)$；

⑤ $2\alpha=(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)=(\frac{\pi}{4}+\alpha)-(\frac{\pi}{4}-\alpha)$；等等

（2）函数名称变换：三角变形中，常常需要变函数名称为同名函数。如在三角函数中正余弦是基础，通常化切为弦，变异名为同名。

（3）常数代换：在三角函数运算，求值，证明中，有时需要将常数转化为三角函数值，例如常数“1”的代换变形有：

$1=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\tan\alpha\cot\alpha=\sin 90^o=\tan 45^o$

（4）幂的变换：降幂是三角变换时常用方法，对次数较高的三角函数式，一般采用降幂处理的方法。常用降幂公式有：________________；________________。降幂并非绝对，有时需要升幂，如对无理式$\sqrt{1+\cos\alpha}$常用升幂化为有理式，常用升幂公式有：________________；________________；

（5）公式变形：三角公式是变换的依据，应熟练掌握三角公式的顺用，逆用及变形应用。

如：$\frac{1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha}=$________________；　$\frac{1-\tan\alpha}{1+\tan\alpha}=$______________；

$\tan\alpha+\tan\beta=$_____________；$1-\tan\alpha\tan\beta=$____________；

$\tan\alpha-\tan\beta=$_____________；$1+\tan\alpha\tan\beta=$____________；

$2\tan\alpha=$____________________；$1-\tan^2\alpha=$_________________；

$\tan 20^o+\tan 40^o+\sqrt{3}\tan 20^o\tan 40^o=$______________；

$\sin\alpha+\cos\alpha=$______________________=_______________________；

$a\sin\alpha+b\cos\alpha=$________________________=________________________；

（其中$\tan\varphi=$____；）

$1+\cos\alpha=$__________________；$1-\cos\alpha=$_______________________；

（6）三角函数式的化简运算通常从：“角、名、形、幂”四方面入手；

基本规则是：见切化弦，异角化同角，复角化单角，异名化同名，高次化低次，无理化有理，特殊值与特殊角的三角函数互化。

如：$\sin 50^o(1+\sqrt{3}\tan 10^o)=$_______________________；

$\tan\alpha-\cot\alpha=$________________________________。

高中数学　必修5知识点

（一）解三角形：

1、正弦定理：在ΔABC中，a、b、c分别为角A、B、C的对边，，则有

$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$

（R 为 ΔABC 的外接圆的半径）

2、正弦定理的变形公式：①$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$；

②$\sin A=\frac{a}{2R}$，$\sin B=\frac{b}{2R}$，$\sin C=\frac{c}{2R}$；③$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$；

3、三角形面积公式：$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{1}{2}ac\sin B$.

4、余弦定理：在 ΔABC 中，有 $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，推论：$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

（二）数列：

1. 数列的有关概念：

（1） 数列：按照一定次序排列的一列数。数列是有序的。数列是定义在自然数N*或它的有限子集{1, 2, 3, …, n}上的函数。

（2） 通项公式：数列的第 n 项 a_n 与 n 之间的函数关系用一个公式来表示，这个公式即是该数列的通项公式。如：$a_n=2n^2-1$。

（3） 递推公式：已知数列{a_n}的第 1 项（或前几项），且任一项 a_n 与他的前一项 a_{n-1}（或前几项）可以用一个公式来表示，这个公式即是该数列的递推公式。如：$a_1=1, a_2=2, a_n=a_{n-1}+a_{n-2}(n>2)$。

2．数列的表示方法：

（1） 列举法：如 1，3，5，7，9，… （2）图象法：用（n, a_n）孤立点表示。

（3） 解析法：用通项公式表示。 （4）递推法：用递推公式表示。

3．数列的分类：

按项数$\begin{cases}\text{有穷数列}\\ \text{无穷数列}\end{cases}$　　按单调性$\begin{cases}\text{常数列}: a_n=2\\ \text{递增数列}: a_n=2n+1, a_n=2^n\\ \text{递减数列}: a_n=-n^2+1\\ \text{摆动数列}: a_n=(-1)^n\cdot 2n\end{cases}$

4．数列{a_n}及前 n 项和之间的关系：

$S_n=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$　　$a_n=\begin{cases}S_1, (n=1)\\ S_n-S_{n-1}, (n\ge 2)\end{cases}$

5．等差数列与等比数列对比小结：

	等差数列	等比数列
一、定义	$a_n-a_{n-1}=d(n\ge 2)$	$\frac{a_n}{a_{n-1}}=q(n\ge 2)$
二、公式	1． $a_n=a_1+(n-1)d$ $a_n=a_m+(n-m)d,(n>m)$ 2． $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$	1． $a_n=a_1q^{n-1}$ $a_n=a_mq^{n-m},(n-m)$ 2． $S_n=\begin{cases}na_1(q=1)\\ \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}=\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\ne 1)\end{cases}$
三、性质	1． a,b,c成等差$\Leftrightarrow 2b=a+c$， 称 b 为 a 与 c 的等差中项 2．若 $m+n=p+q$（m、n、p、	1． a,b,c成等比$\Leftrightarrow b^2=ac$， 称 b 为 a 与 c 的等比中项 2．若 $m+n=p+q$（m、n、p、

	$q\in N^*$），则 $a_m+a_n=a_p+a_q$ 3．S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ 成等差数列	$q\in N^*$），则 $a_m\cdot a_n=a_p\cdot a_q$ 3．S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ 成等比数列

（三）不等式

1、$a-b>0\Leftrightarrow a>b$；$a-b=0\Leftrightarrow a=b$；$a-b<0\Leftrightarrow a<b$.

2、不等式的性质：①$a>b\Leftrightarrow b<a$；②$a>b,b>c\Rightarrow a>c$；③$a>b\Rightarrow a+c>b+c$；

④$a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$，$a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$；⑤$a>b,c>d\Rightarrow a+c>b+d$；

⑥$a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$；　　⑦$a>b>0\Rightarrow a^n>b^n\left(n\in N,n>1\right)$；

⑧$a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\left(n\in N,n>1\right)$.

小结：代数式的大小比较或证明通常用作差比较法：作差、化积（商）、判断、结论。

在字母比较的选择或填空题中，常采用特值法验证。

3、一元二次不等式解法：

（1）化成标准式：$ax^2+bx+c>0,(a>0)$；（2）求出对应的一元二次方程的根；

（3）画出对应的二次函数的图象；　　　　（4）根据不等号方向取出相应的解集。

线性规划问题：

1．了解线性约束条件、目标函数、可行域、可行解、最优解

2．线性规划问题：求线性目标函数在线性约束条件下的最大值或最小值问题.

3．解线性规划实际问题的步骤：

（1）将数据列成表格；（2）列出约束条件与目标函数；（3）根据求最值方法：①画：画可行域；②移：移与目标函数一致的平行直线；③求：求最值点坐标；④答；求最值；　（4）验证。

两类主要的目标函数的几何意义:

①$z=ax+by$——直线的截距；②$z=(x-a)^2+(y-b)^2$——两点的距离或圆的半径；

4、均值定理：若$a>0$，$b>0$，则$a+b\ge 2\sqrt{ab}$，即$\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$．$ab\le\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2(a>0,b>0)$；

$\dfrac{a+b}{2}$称为正数a、b的算术平均数，$\sqrt{ab}$称为正数a、b的几何平均数.

5、均值定理的应用：设x、y都为正数，则有

⑴若$x+y=s$（和为定值），则当$x=y$时，积xy取得最大值$\dfrac{s^2}{4}$.

⑵若$xy=p$（积为定值），则当$x=y$时，和$x+y$取得最小值$2\sqrt{p}$.

注意：在应用的时候，必须注意“一正二定三等”三个条件同时成立。