长春市普通高中2016届高三质量监测（三）
数学(理科)参考答案及评分参考

一、选择题(本大题包括12小题，每小题5分，共60分)

1. B	2. C	3. B	4. B	5. B	6. C
7. A	8. D	9. A	10. B	11. D	12. B

简答与提示：

1. 【命题意图】本题主要考查集合的化简与交运算，属于基础题.

【试题解析】B　由题意可知 $B=\{x\,|\,-1<x<2\}$，所以 $A\cap B=\{x\,|\,-1<x<2\}$. 故选B.

2. 【命题意图】本题考查复数的乘法运算，以及复平面上的点与复数的关系，属于基础题.

【试题解析】C　复数 $z_2=-2+i$，所以 $z_1\cdot z_2=(2+i)(-2+i)=-5$. 故选C.

3. 【命题意图】本题主要考查平面向量的运算性质.

【试题解析】B　由 $\vec{a}+2\vec{b}=(2,1)$, 得 $|\vec{a}+2\vec{b}|=\sqrt{5}$，故选B.

4. 【命题意图】本题考查分段函数及指数、对数运算，是一道基础题.

【试题解析】B　$f(\frac{1}{25})=-2, f(-2)=\frac{1}{4}$. 故选B.

5. 【命题意图】本题考查古典概型，属于基础题.

【试题解析】B　由题意，(x,y) 的所有可能为 $(1,6),(2,5),(3,4),(4,3),(5,2),(6,1)$ 共6种，其中满足 $y\geqslant\frac{x}{2}$ 的有4种，故概率为 $\frac{2}{3}$. 故选B.

6. 【命题意图】本题考查三角函数定义及恒等变换.

【试题解析】C　由三角函数定义 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5},\cos\alpha=\frac{\sqrt{5}}{5}$，故

$$\sin 2\alpha+\cos\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha=\frac{4+\sqrt{5}}{5}.$$ 故选C.

7. 【命题意图】本题主要考查四棱锥的体积，考查空间想象能力，属于基础题.

【试题解析】A　该几何体可以看成由两个四棱锥组成，每个四棱锥的底面面积为9，高为3，故其体积为9，所以整个几何体体积为18. 故选A.

8. 【命题意图】本题主要考查三角函数的图象及性质，是一道基础题.

【试题解析】D　由题可知，$\varphi=-\frac{\pi}{3}$，从而 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{3})$，则该函数在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 的最小值为 $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 故选D.

9. 【命题意图】本题考查程序框图及进位制，属基础题.

【试题解析】A　经计算得 $b=1\times2^0+1\times2^1+0\times2^2+0\times2^3+1\times2^4+1\times2^5=51$.

故选 A.

10. 【命题意图】本题主要考查双曲线的几何性质与圆切线的性质，是一道中档题.

【试题解析】B　由题可知，$|MF_2|=b,|MF_1|=|MF_2|+2a=b+2a$，由 $MF_1\perp MF_2$，有 $|MF_1|^2+|MF_2|^2=4c^2$，整理得 $b=2a$，所以离心率 $e=\sqrt{5}$. 故选 B.

11. 【命题意图】本题主要考查解三角形正弦定理的应用，是一道中档题.

【试题解析】D　如图，由题可知，$\angle BAD+\angle C=\angle B+\angle CAD=90^\circ$，在 ΔABD 中，$\dfrac{BD}{\sin\angle BAD}=\dfrac{AD}{\sin B}=\dfrac{BD}{\cos C}$，在 ΔADC 中，$\dfrac{CD}{\sin\angle CAD}=\dfrac{AD}{\sin C}=\dfrac{CD}{\cos B}$，所以 $\dfrac{\sin B}{\cos C}=\dfrac{\sin C}{\cos B}$，即 $\sin 2B=\sin 2C$，所以 $B=C$ 或 $2B+2C=\pi$，则此三角形为等腰三角形或直角三角形. 故选 D.

12. 【命题意图】本题考查函数导数运算、导数与单调性关系、奇偶性等综合应用，是一道较难题.

【试题解析】B　由题可知当 $x\in(0,1)$ 时，$f'(x)\ln(1-x^2)>\dfrac{2x}{1-x^2}f(x)$，从而

$(f(x)\cdot\ln(1-x^2))'=f'(x)\ln(1-x^2)-\dfrac{2x}{1-x^2}f(x)>0$，有函数 $y=f(x)\cdot\ln(1-x^2)$ 在 $(0,1)$ 上单调递增，由函数 $y=f(x)\cdot\ln(1-x^2)$ 为偶函数，所以其在 $(-1,0)$ 上单调递减，由于 $x\in(-1,0)\cup(0,1)$ 时 $\ln(1-x^2)<0$，所以 $f(x)<0$ 等价于 $y=f(x)\cdot\ln(1-x^2)>0$，由 $f(\dfrac{1}{2})=0$，故 $f(x)<0$ 的解集为 $\{x\,|\,-1<x<-\dfrac{1}{2}$，或 $\dfrac{1}{2}<x<1\}$. 故选 B.

二、填空题(本大题包括 4 小题，每小题 5 分，共 20 分)

13. 4　　14. $y=-x$　　15. 64　　16. $\dfrac{4}{3}$

简答与提示：

13. 【命题意图】本题主要考查线性规划问题，是一道常规题. 从二元一次方程组到可行域，再结合目标函数的几何意义，全面地进行考查.

【试题解析】令 $z=2x+y$，根据可行域及 z 的几何意义，可确定最优解为 $(2,0)$，从而 $2x+y$ 的最大值为 4.

14. 【命题意图】本题考查导数的几何意义，是一道中档题.

【试题解析】由题意 $P(0,0)$，$f'(x)=-e^x$，$f'(0)=-1$，从而曲线在点 P 处的切线方程为 $y=-x$.

15. 【命题意图】本题考查椭圆的简单几何性质和平面向量的基本运算，考查数形结合思想，是一道中档题.

【试题解析】由题意 $\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{KM}-\overrightarrow{KN}$，由 $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{KN}=0$，有 $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{KM}^2$，从椭圆的简单几何性质可得，当 M 点为 $(-6,0)$ 时 $\overrightarrow{KM}^2$ 最大，故 $\overrightarrow{KM}\cdot\overrightarrow{NM}$ 的最大值为 64.

16. 【命题意图】本题涉及球内接四棱锥体积运算，需要借助导数进行运算求解，是一道较难题.

【试题解析】由球的几何性质可设四棱锥高为 h，从而

$V_{P-ABCD}=\dfrac{2}{3}h[1-(h-1)^2]=\dfrac{2}{3}(-h^3+2h^2)$，有

$V'_{P-ABCD}=\dfrac{2}{3}(-3h^2+4h)=\dfrac{2}{3}h(-3h+4)$，可知当 $h=\dfrac{4}{3}$ 时，V_{P-ABCD} 体积最大.

三、解答题(本大题必做题 5 小题，三选一选 1 小题，共 70 分)

17. (本小题满分12分)

【命题意图】本小题主要考查数列递推关系、等比数列、等差数列前 n 项和，对考生的化归与转化能力有较高要求.

【试题解析】解：(1) 证明：由 $a_n=\dfrac{1}{4}a_{n-1}-\dfrac{3}{4}$ 知 $a_n+1=\dfrac{1}{4}(a_{n-1}+1)$，

由 $a_n+1\neq 0$, $\dfrac{a_n+1}{a_{n-1}+1}=\dfrac{1}{4}$，则数列 $\{a_n+1\}$ 是以 512 为首项，$\dfrac{1}{4}$ 为公比的等比数列.

(6 分)

(2) 由(1)知 $\log_2(a_n+1)=11-2n$，设 $\{\log_2(a_n+1)\}$ 的前 n 项和为 T_n，$T_n=10n-n^2$

$b_n=|\log_2(a_n+1)|$，

当 $n\le 5$ 时，$\log_2(a_n+1)>0, S_n=T_n=10n-n^2$，

当 $n\ge 6$ 时，

$S_n=T_5-\log_2(a_6+1)-\cdots-\log_2(a_n+1)$

$=T_5-(T_n-T_5)=2T_5-T_n=n^2-10n+50$

综上得 $S_n=\begin{cases}10n-n^2, n\le 5\\ n^2-10n+50, n\ge 6\end{cases}$. (12 分)

18. (本小题满分12分)

【命题意图】本小题主要考查统计与概率的相关知识，包括茎叶图、离散型随机变量的分布列以及数学期望的求法. 本题主要考查学生对数据处理的能力.

【试题解析】(1) 女生立定跳远成绩的中位数 $\dfrac{165+168}{2}=166.5\,\text{cm}$. （3 分）

(2) 男生中成绩“合格”和“不合格”人数比为 $8:4$，用分层抽样的方法抽取 6 个人，则抽取成绩“合格”人数为 4 人； （6 分）

(3) 依题意，X 的取值为 0，1，2，则

$P(X=0)=\dfrac{C_8^0C_{10}^2}{C_{18}^2}=\dfrac{5}{17}$， $P(X=1)=\dfrac{C_8^1C_{10}^1}{C_{18}^2}=\dfrac{80}{153}$， $P(X=2)=\dfrac{C_8^2C_{10}^0}{C_{18}^2}=\dfrac{28}{153}$，

因此， X 的分布列如下：

X	0	1	2
P	$\dfrac{5}{17}$	$\dfrac{80}{153}$	$\dfrac{28}{153}$

$\therefore E(X)=0\times\dfrac{5}{17}+1\times\dfrac{80}{153}+2\times\dfrac{28}{153}=\dfrac{8}{9}$. （12 分）

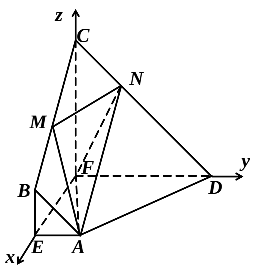
19. (本小题满分 12 分)

【命题意图】本小题主要考查立体几何的相关知识，二面角的求法及空间向量在立体几何中的应用. 本小题对考生的空间想象能力与运算求解能力有较高要求.

【试题解析】解：(1) 过点 M 作 $MP\perp EF$ 于点 P，过点 N 作 $NQ\perp FD$ 于点 Q，连接 PQ. 由题意，平面 $EFCB\perp$ 平面 $EFDA$，所以 $MP\perp$ 平面 $EFDA$

且 $MP=\dfrac{BE+CF}{2}=2$，因为 $CF\perp EF, DF\perp EF$，所以 $EF\perp$ 平面 CFD，所以 $NQ\perp EF$，由 $NQ\perp FD$，所以 $NQ\perp$ 平面 EFD，又 $CN=\dfrac{1}{2}NL$，所以 $NQ=\dfrac{2}{3}CF=2$，即 $MP\,//\,NQ, MP=NQ$，则 $MN\,//\,PQ$，由 $MN\not\subset$ 平面 $ADFE$，$PQ\subset$ 平面 $ADFE$，所以 $MN\,//$ 平面 $ADFE$ （6 分）

(2) 以 F 为坐标原点，FE 方向为 x 轴，FD 方向为 y 轴，FC 方向为 z 轴，建立如图所示坐标系. 由题意，



$M(1,0,2), A(2,1,0), F(0,0,0), C(0,0,3), D(0,3,0), N(0,\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2})$

平面 AMN 的法向量为平面 $ABCD$ 的法向量，

即 $\vec{n_1}=(1,1,1)$，在平面 FAN 中，

$\overrightarrow{FA}=(2,1,0), \overrightarrow{FN}=(0,\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2})$，即 $\vec{n_2}=(1,-2,2)$

则 $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{9}$，所以二面角 $M-NA-F$ 的余弦值为 $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$. (12 分)

20. (本小题满分 12 分)

【命题意图】本小题主要考查直线与圆锥曲线的综合应用能力，具体涉及到抛物线的方程，直线与圆锥曲线的相关知识. 本小题对考生的化归与转化思想、运算求解能力都有很高要求.

【试题解析】解：(1) 设 $M(x,y)$，有 $P(x,2y)$，将 P 代入 $x^2=2y$，得 $x^2=4y$，从而点 M 的轨迹 E 的方程为 $x^2=4y$. （4 分）

(2) 设 $A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，联立 $\begin{cases} y=k(x-4)+5 \\ x^2=4y \end{cases}$，得 $x^2-4kx+16k-20=0$，

则 $\begin{cases} x_1+x_2=4k \\ x_1x_2=16k-20 \end{cases}$，因为 $k_1=\dfrac{y_1-4}{x_1+4},k_2=\dfrac{y_2-4}{x_2+4}$，所以

$|k_1-k_2|=|\dfrac{kx_1-4k+1}{x_1+4}-\dfrac{kx_2-4k+1}{x_2+4}|=|\dfrac{(1-8k)(x_1-x_2)}{x_1x_2+4(x_1+x_2)+16}|$

因为 A,B 不同于点 N，所以 $k\neq\dfrac{1}{8}$，则 $|k_1-k_2|=\sqrt{(k-2)^2+1}$

故 $\left|k_1-k_2\right|$ 的取值范围是 $[1,+\infty)$.　　(12 分)

21. (本小题满分 12 分)

【命题意图】本题主要考查函数与导数的综合应用能力，具体涉及到用导数来描述原函数的单调性、极值等情况. 对考生的逻辑推理与运算求解能力有较高要求.

【试题解析】解(1) 由题意得 $f'(x)=-e^{1-x}(-a+\sin x+\cos x)$，若函数 $f(x)$ 存在单调减区间，则 $f'(x)=-e^{1-x}(-a+\sin x+\cos x)\le 0$ 即 $-a+\sin x+\cos x\ge 0$ 存在取值区间，即 $a\le\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$ 存在取值区间，所以 $a<\sqrt{2}$.　　(6 分)

(2) 当 $a=0$ 时，$f(x)=e^{1-x}\cos x, f'(x)=-e^{1-x}(\sin x+\cos x)$

$f(-x-1)+2f'(x)\cdot\cos(x+1)=\cos(x+1)\cdot[e^{x+2}-2\sqrt{2}e^{1-x}\cdot\sin(x+\dfrac{\pi}{4})]$

由 $x\in\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$ 有 $x+1\in\left[0,\dfrac{3}{2}\right]\subseteq[0,\dfrac{\pi}{2}]$，从而 $\cos(x+1)>0$，

要证原不等式成立，只要证 $e^{x+2}-2\sqrt{2}e^{1-x}\cdot\sin(x+\dfrac{\pi}{4})>0$ 对 $\forall x\in\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$ 恒成立，

首先令 $g(x)=e^{2x+1}-(2x+2)$，由 $g'(x)=2e^{2x+1}-2$，可知，

当 $x\in(-\dfrac{1}{2},+\infty)$ 时 $g(x)$ 单调递增，当 $x\in(-\infty,-\dfrac{1}{2})$ 时 $g(x)$ 单调递减，

所以 $g(x)=e^{2x+1}-(2x+2)\ge g(-\dfrac{1}{2})=0$，有 $e^{2x+1}\ge 2x+2$

构造函数 $h(x)=2x+2-2\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$，$x\in\left[-1,\dfrac{1}{2}\right]$，

因为 $h'(x)=2-2\sqrt{2}\cos(x+\dfrac{\pi}{4})=2\sqrt{2}(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\cos(x+\dfrac{\pi}{4}))$，

可见，在 $x\in\left[-1,0\right]$ 时，$h'(x)\le 0$，即 $h(x)$ 在 $\left[-1,0\right]$ 上是减函数，

在 $x\in\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 时，$h'(x)>0$，即 $h(x)$ 在 $\left(0,\frac{1}{2}\right]$ 上是增函数，

所以,在 $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ 上，$h(x)_{\min}=h(0)=0$，所以 $g(x)\ge 0$.

所以，$2\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})\le 2x+2$，等号成立当且仅当 $x=0$ 时，

综上 $e^{2x+1}\ge 2x+2\ge 2\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})$，由于取等条件不同，

故 $e^{2x+1}-2\sqrt{2}\sin(x+\frac{\pi}{4})>0$，所以原不等式成立. (12 分)

22. (本小题满分 10 分)

【命题意图】本小题主要考查平面几何的证明，具体涉及到切割线定理以及三角形相似等内容. 本小题重点考查考生对平面几何推理能力.

【试题解析】解(1) 由 $BC=CD$ 可知，$\angle BAC=\angle DAC$，在$\triangle ABD$ 中，则 $\frac{AB}{BM}=\frac{AD}{DM}$，因此 $AB\cdot MD=AD\cdot BM$； (5 分)

(2) 由 $CP\cdot MD=CB\cdot BM$ 可知 $\frac{CP}{CB}=\frac{BM}{MD}$，又由(1)可知 $\frac{BM}{MD}=\frac{AB}{AD}$，则 $\frac{CP}{CB}=\frac{AB}{AD}$，由题意 $\angle BAD=\angle PCB$，可得$\triangle BAD\backsim\triangle PCB$，则

$\angle ADB=\angle CBP$，又 $\angle ADB=\angle ACB$，即 $\angle CBP=\angle ACB$，

又 PB 为圆 O 的切线，则 $\angle CBP=\angle CAB$，因此 $\angle ACB=\angle CAB$，

即 $AB=AC$. (10 分)

23. (本小题满分 10 分)

【命题意图】本小题主要考查极坐标系与参数方程的相关知识，具体涉及到极坐标方程与平面直角坐标方程的互化、利用直线的参数方程的几何意义求解直线与曲线交点的距离等内容. 本小题考查考生的方程思想与数形结合思想，对运算求解能力有一定要求.

【试题解析】解(1) 已知曲线 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$，

则其左焦点为 $(-2\sqrt{2},0)$，则 $m=-2\sqrt{2}$，

将直线 l 的参数方程 $\begin{cases}x=-2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}t\\ y=\frac{\sqrt{2}}{2}t\end{cases}$ 与曲线 C 的方程 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$ 联立，

得 $t^2-2t-2=0$，则 $|FA|\cdot|FB|=|t_1t_2|=2$. (5 分)

(2) 由曲线 C 的方程为 $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{4}=1$，可设曲线 C 上的定点 $P(2\sqrt{3}\cos\theta, 2\sin\theta)$

则以 P 为顶点的内接矩形周长为

$$4\times(2\sqrt{3}\cos\theta+2\sin\theta)=16\sin(\theta+\frac{\pi}{3})(0<\theta<\frac{\pi}{2}),$$

因此该内接矩形周长的最大值为 16. (10 分)

24. (本小题满分 10 分)

【命题意图】本小题主要考查不等式的相关知识，具体涉及到绝对值不等式及不等式证明等内容. 本小题重点考查考生的化归与转化思想.

【试题解析】(1) 令 $f(x)=|x-1|-|x-2|=\begin{cases}-1, x\le 1\\ 2x-3, 1<x<2\\ 1, x\ge 2\end{cases}$，则 $-1\le f(x)\le 1$，

由于 $\exists x_0\in\mathbf{R}$ 使不等式 $|x-1|-|x-2|\geqslant t$ 成立，有 $t\in T=\{t\,|\,t\le 1\}$. (5 分)

(2) 由(1)知，$\log_3 m\cdot\log_3 n\geqslant 1$，

根据基本不等式 $\log_3 m+\log_3 n\ge 2\sqrt{\log_3 m\log_3 n}\ge 2$

从而 $mn\ge 3^2$ 当且仅当 $m=n=3$ 时取等号，

再根据基本不等式 $m+n\ge 2\sqrt{mn}\ge 6$ 当且仅当 $m=n=3$ 时取等号，

所以 $m+n$ 的最小值为 6. (10 分)