

太原市 2016 年高三年级模拟试题 (二)

数学试卷(理工类)

(考试时间:下午 3:00—5:00)

注意事项:

- 1.本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分,第 I 卷 1 至 3 页,第 II 卷 4 至 7 页.
- 2.回答第 I 卷前,考生务必将自己的姓名、准考证号、考试科目涂写在答题卡上.
- 3.回答第 I 卷时,选出每小题答案后,用 2B 铅笔把答题卡上的对应题目的答案标号涂黑,如需改动,用橡皮擦干净后,再选涂其他答案标号,写在本试卷上无效.
- 4.回答第 II 卷时,将答案写在答题卡相应位置上写在本试卷上无效.
- 5.考试结束,将本试卷和答题卡一并交回.

第 I 卷

一、选择题:本题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

1.已知集合 $A=\{x|<2\}$, $B=\{x|a<x<6\}$, 且 $A\cap B=\{x|2<x<b\}$, 则 $a+b=$

A 7 B 6 C 5 D 4

解析: 因为 $A=\{x|x<2\}$ $B=\{x|a<x<6\}$ $A\cap B=\{x|2<x<b\}$

所以 $a=2$ $b=5$ $a+b=7$ 选 A

考点: 集合的运算

2.如图, 在复平面内, 表示复数 z 的点为 A, 则复数的共轭复数是

A. i B. C. D. i

解析: 由图象可知, $z=2+i$. 则 $\bar{z}=2-i$, 其共轭复数为 $-i$, 故选 B

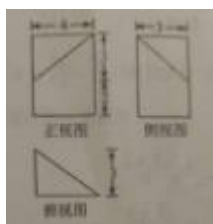
3. 下列函数中，在定义域内既是奇函数又是单调递增函数的是

A $y=x^3$ B $y=-x^3$ C $y=x|x|$ D $y=-x$

解析：A 的增区间为 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 不符合题意；B 在定义域内为减函数，不符题意；C 选项为奇函数且在定义域内是增函数，符合题意；D 选项只在 $(-\infty, 0)$ 和 $(0, +\infty)$ 单调递增，不符题意。故选 C

考点：函数的单调性和奇偶性

4. 若某几何体的三视图如右图所示，则此几何体的体积等于 ()



A.30 B.24 C.12 D.4

考点：三视图还原直观图，三棱柱、三棱锥体积

解析：由三视图可知，该几何体是一个三棱柱的左上角被截掉一个三棱锥，

答案：B

5. 若函数 $f(x)$ 同时满足以下三个性质：1) $f(x)$ 的最小正周期为 π ；2) 对任意的 x ，都有 $f(x-)+f(-x)=0$ ；3) $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上是减函数，则 $f(x)$ 的解析式可能是 ()

A. $y=\sin x$ B. $y=\cos x$

C. $y=\tan x$ D. $y=-\tan x$

考点：三角函数的周期性、对称性、单调性

解析：由最小正周期为 π 得到，排除 C；

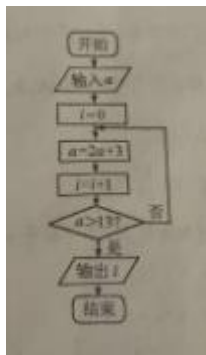
由 $f(x-)+f(-x)=0$ 得到点 $(0, 0)$ 是 $f(x)$ 的一个对称中心，排除 A；

由 $f(x)$ 在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上是减函数可区分 B 和 D，B 中在

$(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上递减，D 中在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 上递增

答案：B

6. 执行如图所示的程序框图，若输出的结果为 2，则输入的正整数 a 的可能取值的集合是（ ）



A. B.

C. D.

考点：程序框图

解析：a=1 时，需要循环 3 次才能结束，输出的 $i=3$ ；a=6 时，循环 1 次就结束，输出 $i=1$ ，其余数字都符合

2 次循环结束， $i=2$

答案：C

7. 设 x, y 满足不等式
$$\begin{cases} x+y-6 \leq 0, \\ 2x-y-1 \leq 0, \\ 3x-y-2 \geq 0, \end{cases}$$
 若 $z=ax+y$ 的最大值为 $2a+4$ ，最小值为 $a+1$ ，则实数 a 的取值

范围是

A. $[-2,1]$

B. $[-1,2]$

C. $[-3,-2]$

D. $[-3,1]$

答案：A

考点：简单线性规划

解析：

由 $\triangle ABC$ 是正三角形, 其外接圆的圆心是点 O' , 过点 O' 作 $OO' \parallel SA$, 取 SA 的中点 D , 连接 OD 。三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的球心必在 OO' 所在的直线上, 又由于 $OD \perp SA$, $SD=DA$, 则 $OS=OA=OB=OC$, 即 O 是三棱锥 $S-ABC$ 的外接球的球心。在 $\triangle OO'A$ 中, $O'A=1$, $OO' = \frac{1}{2}$, 则 $OA = \sqrt{\frac{5}{4}}$, 所以 $S = 4\pi r^2 = 5\pi$ 。

9. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 与函数 $y = \sqrt{x} (x \geq 0)$ 的图像交于点 P , 若函数 $y = \sqrt{x}$ 在点 P 处的切线过双曲线左焦点 $F(-1, 0)$, 则双曲线的离心率是

- A. $\frac{\sqrt{5}+2}{2}$ B. $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$
C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$ D. $\frac{3}{2}$

答案: B

考点: 双曲线的离心率

解析: 设 $P(x_0, \sqrt{x_0})$, 函数 $y = \sqrt{x}$ 求导得 $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, 即点 P 处的切线方程为 $y - \sqrt{x_0} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0)$,

又知切线方程过点 $F(-1, 0)$, 代入整理解得 $x_0=1$, 即 $P(1, 1)$ 。所以 $\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2} = 1$ ①, $c=1$ ②, 由①, ②

得 $a^2 = \frac{3-\sqrt{5}}{2}$, $a^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ (舍去), 故而 $e = \sqrt{\frac{c^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{2}{3-\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

10. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若 a_n 和 $\sqrt{S_n}$ 都是等差数列, 且公差相等, 则 $S_{100} =$

- A. 50 B. 100 C. 1500 D. 2500

考点: 等差数列通项公式、求和公式与一次、二次函数的关系。

解析: $a_n, \sqrt{S_n}$ 均为等差数列, 所以两者均为关于 n 的一次函数。

$$s_n = \frac{d}{2} n^2 + (a_1 - \frac{d}{2})n,$$

又 $\sqrt{s_n}$ 为关于 n 的一次函数, 所以

$$a_1 - \frac{d}{2} = 0, \text{ 即 } a_1 = \frac{d}{2}$$

$$\sqrt{\frac{d}{2}} = d \Rightarrow d = \frac{1}{2},$$

$$\therefore a_1 = \frac{1}{4}$$

$$\therefore s_{100} = 100a_1 + \frac{100 \times 99}{2} d = 2500$$

11. 已知圆 $C: x^2 + y^2 = 1$, 点 $P(x_0, y_0)$ 是直线 $l: 3x + 2y = 0$ 上的动点, 若在圆 C 上总存在两个不同的点

A, B , 使 $\vec{OA} + \vec{OB} = \vec{OP}$, 则 x_0 的取值范围是

A. $(0, \frac{24}{13})$ B. $(-\frac{24}{13}, 0)$ C. $(0, \frac{13}{24})$ D. $(0, \frac{13}{12})$

考点: 直线与圆结合向量的综合应用

解析: 由向量运算, 得: 线段 OP 的中点在圆内。

$$\left(\frac{x_0}{2} \right)^2 + \left(\frac{y_0}{2} \right)^2 < 1$$

解得: $0 < x_0^2 < 1$

12. 已知函数 $g(x) = e^{x-2}$, 若 $g(m) = f(n)$ 成立, 则 $n-m$ 的最小值为

- A. $1-\ln 2$ B. $\ln 2$ C. 2 D. e^2-3

考点: 函数的单调性与最值问题

解析:

$$\because g(m) = f(n)$$

$$\therefore \ln \frac{n}{2} + \frac{1}{2} = e^{m-2} = t, \text{ 显然 } t > 0$$

$$\text{解得: } m = \ln t + 2, n = 2e^{\frac{t-1}{2}}$$

$$n - m = 2e^{\frac{t-1}{2}} - \ln t - 2,$$

$$\text{令 } h(t) = 2e^{\frac{t-1}{2}} - \ln t - 2, h'(t) = \frac{2te^{\frac{t-1}{2}} - 1}{t}$$

当 $t = \frac{1}{2}$ 时, $h'(t) = 0$, $h(t)$ 在 $(0, \frac{1}{2})$ 单调递减, 在 $(\frac{1}{2}, +\infty)$ 单调递增

$\therefore$ 在 $t = \frac{1}{2}$ 处取得最小值, 为 $\ln 2$

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

本卷包括必考题和选考题两部分, 第 13 题到第 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答. 第 22 题到第 24 题为选考题, 考生根据要求作答.

二. 填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 已知 $\left(\sqrt{x} - \frac{a}{x}\right)^6$ 的展开式中含 $x^{\frac{3}{2}}$ 的项的系数为 30, 则实数 $a =$.

答案: -5

解析: $T_{r+1} = C_6^r x^{\frac{r}{2}} (-a)^{6-r} x^{-(6-r)}$, 由题意知, $x^{\frac{r}{2} - (6-r)} = x^{\frac{3}{2}}$, 所以 $\frac{r}{2} - (6-r) = \frac{3}{2}$, 解得 $r=5$ 所以

$$C_6^5 (-a) = 30, a \text{ 为 } -5$$

14. 在区间 $[0,1]$ 上随机抽取两个数 x, y , 则事件 " $xy \geq \frac{1}{2}$ " 发生的概率为.

答案: $\frac{1 - \ln 2}{2}$

解析: 在区间 $[0,1]$ 上随机抽取两个数 x, y , 组成的区域为 $x \in [0,1], y \in [0,1]$ 的正方形, $xy \geq \frac{1}{2}$ 组成的

区域为 $y = \frac{1}{2x}$ 曲线的外侧, $y = \frac{1}{2x}$ 与区域的交点为 $(\frac{1}{2}, 1), (1, \frac{1}{2})$ 则事件 " $xy \geq \frac{1}{2}$ " 发生的

概率为 $\left(1 - \frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2x} dx\right) \div 1 = \frac{1 - \ln 2}{2}$

15. 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别是 a, b, c , 若 $\frac{a}{\sin B} + \frac{b}{\sin A} = 2c$, 则 $\angle C$ 的大小是 $\frac{\pi}{2}$.

解析: 由正弦定理得 $\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin A} = 2 \sin C$,

在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A > 0, \sin B > 0$, 且 $\frac{\sin A}{\sin B} + \frac{\sin B}{\sin A} \geq 2 \sqrt{\frac{\sin A}{\sin B} \cdot \frac{\sin B}{\sin A}} = 2$, 所以 $2 \sin C \geq 2$,

又 $2 \sin C \leq 2$, 故 $\sin C = 1$, 此时 $A = B$, 且有 $C = \frac{\pi}{2}$.

16. 已知关于 x 的函数 $f(x) = \frac{2tx^2 + \sqrt{2}t \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + x}{2x^2 + \cos x}$ 的最大值为 a , 最小值为 b , 若 $a + b = 2$, 则实数

t 的值为 1.

解析: $f(x) = \frac{2tx^2 + \sqrt{2}t \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + x}{2x^2 + \cos x} = \frac{2tx^2 + t(\sin x + \cos x) + x}{2x^2 + \cos x} = t + \frac{t \sin x + x}{2x^2 + \cos x}$, 设 $g(x) = \frac{t \sin x + x}{2x^2 + \cos x}$,

则 $g(-x) = -g(x)$, 所以 $g(x)$ 是奇函数, 设 $g(x)$ 的最大值

为 m , 则它的最小值为 $-m$, 从而 $t + m + t - m = 2t = a + b = 2$, 所以 $t = 1$.

17. 已知数列 S_n 是数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_1 = 2$ 且 $4S_n = a_n \cdot a_{n+1}$, 数列 $\{b_n\}$ 中, $b_1 = \frac{1}{4}$ 且

$$b_{n+1} = \frac{nb_n}{(n+1)-b_n}, n \in N^*.$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式

(2) 设 $c_n = \frac{a_n}{2^{\frac{1}{3}b_n}} (n \in N^*)$, 求 $\{c_n\}$ 的前 n 项和。

解: (1) 当 $n=1$ 时, 可得 $a_2 = 4$,

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } 4a_n = 4S_n - 4S_{n-1} = a_n(a_{n+1} - a_n),$$

$$\because a_n \neq 0, \therefore a_{n+1} - a_n = 4$$

$\therefore \{a_n\}$ 是奇数项和偶数项分别以 4 为公差的等差数列,

$$\text{当 } n = 2k-1, k \in N^* \text{ 时, } a_n = a_{2k-1} = 4k-2 = 2n$$

$$\text{当 } n = 2k, k \in N^* \text{ 时, } a_n = a_{2k} = 4k = 2n.$$

$$\therefore a_n = 2n, n \in N^*.$$

(2) 由 $b_{n+1} = \frac{nb_n}{(n+1)-b_n}, n \in N^*$ 得:

$$\frac{1}{b_{n+1}} = \frac{n+1}{nb_n} - \frac{1}{n}$$

$$\therefore \frac{1}{(n+1)b_{n+1}} = \frac{1}{nb_n} - \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\therefore \frac{1}{nb_n} = \frac{1}{(n-1)b_{n-1}} - \frac{1}{n(n-1)}$$

...

$$\therefore \frac{1}{2b_2} = \frac{1}{b_1} - \frac{1}{2 \times 1}$$

$$\therefore \frac{1}{nb_n} = \frac{3n+1}{n} (n \geq 2)$$

$$\therefore b_n = 3n+1 (n \geq 2)$$

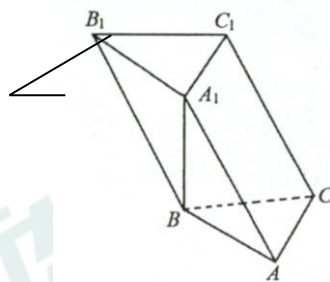
当 $n=1$ 时也满足

$$\therefore b_n = 3n+1$$

$$\therefore c_n = \frac{n}{2^n}$$

再由错位相减得 $T_n = 2 - \frac{n+2}{2^n}$ 。

18 如图：在斜三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中， $A_1B \perp AC$ ，且 $A_1B = AC = 5$ ， $AA_1 = BC = 13$ ， $AB = 12$ 。



(1) 求证：平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1 ；

(2) 求二面角 $A-BB_1-C$ 的正切值的大小。

解析：在第(1)问中考察垂直，利用勾股定理和题中给出垂直得到线面垂直，再由线面垂直得到面面垂直，考查了垂直的判定定理。(2)中利用(1)得出的线面垂直以及三垂线定理可找出二面角的平面角。

证明：(1) 在 $\triangle ABC$ 中， $\because AB^2 + AC^2 = BC^2$ ， $\therefore \angle A = 90^\circ$ ， $AC \perp AB$ ，

又 $\because A_1B \perp AC$ ，且 A_1B 、 AB 是平面 ABB_1A_1 内的两条相交直线，

$\therefore AC \perp$ 平面 ABB_1A_1 ，

又 $AC \subset$ 平面 ACC_1A_1

$\therefore$ 平面 $ABB_1A_1 \perp$ 平面 ACC_1A_1

(2) 过点 C_1 作 BB_1 的垂线 C_1D 交 BB_1 于点 D ，连接 A_1D

$\because A_1C_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 平面 $ABB_1 \subset$ 平面 ABB_1A_1 由三垂线定理可知 $\angle C_1DA_1$ 就是二面角 $A-BB_1-C$ 的平面角

在 $\triangle A_1B_1B$ 中，有 $A_1B = 5, A_1B_1 = AB = 12, BB_1 = AA_1 = 13$ ，即 $A_1B^2 + A_1B_1^2 = BB_1^2$

$$\therefore \angle B_1A_1B = 90^\circ \quad \therefore A_1D = \frac{A_1B_1 \times A_1B}{BB_1} = \frac{5 \times 12}{13} = \frac{60}{13}$$

$$\therefore \tan \angle C_1DA_1 = \frac{A_1C_1}{A_1D} = \frac{5}{\frac{60}{13}} = \frac{13}{12}$$

19. 近几年来，我们许多地区经常出现雾霾天气，某学校为了学生的健康，对课间操活动做了如下规定：课间操时间若有雾霾则停止组织集体活动，若无雾霾则组织集体活动，预报得知，这一地区在未来一周从周一到周五5天的课间操时间出现雾霾的概率是：前三天均为50%，后两天均为20%，且每一天出现雾霾与否是相互独立的。

(1)：求未来一周5天至少一天停止组织集体活动的概率；

(2)：求未来一周5天不需要停止组织集体活动的天数 X 的分布列；

(3)：用 η 表示该校未来一周5天停止组织集体活动的天数，记“函数 $f(x) = x^2 - \eta x - 1$ 在区间 $(3,5)$ 上有且只有一个零点”为事件 A ，求事件 A 发生的概率。

答案：(1) $\frac{199}{200}$

(2) X 的分布列是

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{2}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{73}{200}$	$\frac{43}{200}$	$\frac{11}{200}$	$\frac{1}{200}$

$$(3) \frac{129}{200}$$

考点：二项分布，零点问题。

解析：(1) 未来一周5天都组织集体活动的概率 $P = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{200}$ ，所以至少有一天停止组织集体活动的概率为 $1 - P = 1 - \frac{1}{200} = \frac{199}{200}$ 。

(2) X 的取值是 0,1,2,3,4,5.

$$P_{(X=0)} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{2}{25},$$

$$P_{(X=1)} = C_3^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times C_2^1 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{7}{25},$$

$$P_{(X=2)} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 + C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times C_2^1 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} + C_3^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{73}{200},$$

$$P_{(X=3)} = C_3^2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 + C_2^1 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} \times C_3^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{43}{200},$$

$$P_{(X=4)} = C_3^1 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times C_2^1 \times \frac{1}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{11}{200},$$

$$P_{(X=5)} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{200}.$$

所以 X 的分布列是

X	0	1	2	3	4	5
P	$\frac{2}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{73}{200}$	$\frac{43}{200}$	$\frac{11}{200}$	$\frac{1}{200}$

(3) 因为函数 $f(x) = x^2 - \eta x - 1$ 在区间(3,5)上有且仅有一个零点，且 $0 \leq \eta \leq 5$ ，则

$f(3)f(5) < 0$ ，所以 $\frac{8}{3} < \eta < \frac{24}{5}$ ，所以 $\eta = 3$ 或 4 。

则所求概率为: $P(A) = \frac{7}{25} + \frac{73}{200} = \frac{129}{200}$.

21、已知函数 $f(x) = e^x - ax^2 - bx - 1$ ($a, b \in R$)

(1) 若对于任意 $a \in [0, 1]$, 总存在 $x \in [1, 2]$, 使得 $f(x) \leq 0$ 成立, 求 b 的最小值;

(2) 若 $f(1) = 0$, 函数 $f(x)$ 在区间 $(0, 1)$ 内有零点, 求 a 的取值范围。

解:

(1) 设 $g(a) = e^x - ax^2 - bx - 1$, $\therefore x \in [1, 2]$, $g(a)$ 在 $[0, 1]$ 上为减函数

即 $g(0) = e^x - bx - 1 \leq 0$ 在 $[1, 2]$ 有解即可

设 $h(x) = \frac{e^x - 1}{x} \therefore h'(x) = \frac{e^x(x-1)+1}{x^2} > 0 \therefore h(x)$ 在 $[1, 2]$ 为增函数

$\therefore b \geq h(1) = e - 1 \therefore b$ 的最小值为 $e - 1$

(2) $f(x) = e^x - ax^2 - bx - 1 \quad f'(x) = e^x - 2ax - b$

$\therefore f(1) = 0 \therefore e - a - b - 1 = 0 \therefore b = e - a - 1$

$\therefore f'(x) = e^x - 2ax - e + a + 1$, $\therefore f'(x)$ 在区间上至少有三个单调区间

设 $u(x) = f'(x) = e^x - 2ax - b \therefore u'(x) = e^x - 2a$

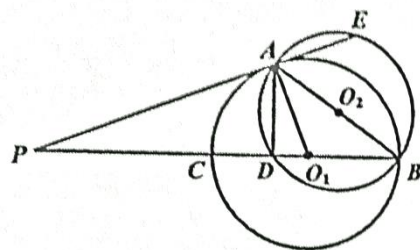
当 $a \leq \frac{1}{2}$ 或 $a \geq \frac{e}{2}$, $f'(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调 (舍)

当 $\frac{1}{2} < a < \frac{e}{2}$, $f'(x)_{\min} = 3a - 2a \ln(2a) - e + 1 < 0$ 恒成立, 即

$$\begin{cases} \frac{1}{2} < a < \frac{e}{2} \\ 2 - e + a > 0 \\ -a + 1 > 0 \end{cases} \therefore e - 2 < a < 1$$

22. (本小题满分10分) 选修4-1: 几何证明选讲

如图, $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 相交于 A, B 两点, AB 是 $\odot O_2$ 的直径, 过 A 点作 $\odot O_1$ 的切线交 $\odot O_2$ 于点 E , 并与 BO_1 的延长线交于点 P , P, B 分别与 $\odot O_1, \odot O_2$ 交于 C, D 两点.

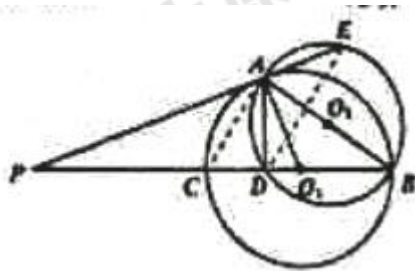


径, 过 A 点作 P, PB 分别与

(1) 求证: $PA \cdot PD = PE \cdot PC$;

(2) 求证: $AD = AE$.

解析: (1) $\because PE, PB$ 分别是 $\odot O_2$ 的割线,



$$\therefore PA \cdot PE = PD \cdot PB$$

$$\therefore \frac{PE}{PA} = \frac{PD}{PB}, \therefore PA \cdot PD = PE \cdot PC.$$

(2) 连结 AC, ED

$\because BC$ 是 $\odot O_1$ 的直径, $\therefore \angle CAB = 90^\circ$, $\therefore AC$ 是 $\odot O_2$ 的切线, 由 (1) 知 $\frac{PE}{PA} = \frac{PD}{PB}$, $\therefore AC \parallel ED$,

$\therefore AB \perp DE, \angle CAD = \angle ADE$, 又 $\because AC$ 是 $\odot O_2$ 的切线, $\therefore \angle CAD = \angle AED$,

$\therefore \angle ADE = \angle AED, \therefore AD = AE$

(或 $AB \perp DE, \because AB$ 是 $\odot O_2$ 的直径, 由垂径定理得弧 $AD =$ 弧 $DE, \therefore AD = AE$)

23. 选修4-4 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 设倾斜角为 α 的直线 l 的方程为 $\begin{cases} x = 2 + t \cos \alpha \\ y = \sqrt{3} + t \sin \alpha \end{cases}$ (t 为参数), 以 O 为极点, x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系, 曲线 C 的极坐标方程为 $r^2 = \frac{4}{1 + 3 \sin^2 \theta}$, 直线 l 与曲线 C 相交于不同的两点 A, B .

(1) 若 $\alpha = \frac{\rho}{3}$, 求线段 AB 中点 M 的直角坐标

(2) 若 $|PA| \cdot |PB| = |OP|^2$, 其中 $P(2, \sqrt{3})$, 求直线的斜率

解析: (1) 曲线 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$

若 $a = \frac{\rho}{3}$ 时, 设点 M 对应的参数为 t_0 , 直线 l 的方程为
$$\begin{cases} x = 2 + \frac{1}{2}t \\ y = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数})$$

代入曲线 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 得 $13t^2 + 56t + 48 = 0$

$$t_0 = \frac{t_1 + t_2}{2} = -\frac{28}{13}$$

点 M 的直角坐标 $(\frac{12}{13}, -\frac{\sqrt{3}}{13})$

(2) 将 $\begin{cases} x = 2 + t \cos a \\ y = \sqrt{3} + t \sin a \end{cases}$ 代入曲线 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$, 得

$$(\cos^2 a + 4\sin^2 a)t^2 + (8\sqrt{3}\sin a + 4\cos a)t + 12 = 0$$

$$|PA| \cdot |PB| = |t_1 t_2| = \frac{12}{\cos^2 a + 4\sin^2 a} = 7$$

$$\tan^2 a = \frac{5}{16}$$

又因为相交于两点, $\tan a = \frac{\sqrt{5}}{4}$

所以直线的斜率为 $\frac{\sqrt{5}}{4}$

24. 选修 4-5: 不等式选讲

设函数 $f(x) = |2x+1| + |x-a|, a \in \mathbb{R}$.

(1) 当 $a=2$ 时, 求不等式 $f(x) < 4$ 的解集.

(2) 当 $a < -\frac{1}{2}$ 时, 对于 $\forall x \in (-\infty, -\frac{1}{2}]$, 都有 $f(x) + x \geq 3$ 成立, 求 a 的取值范围.

解: (1) 当 $x < -\frac{1}{2}$ 时, $-2x-1+2-x < 4$, 得 $-1 < x < -\frac{1}{2}$

当 $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ 时, $2x+1+2-x < 4$, 得 $-\frac{1}{2} \leq x < 1$

当 $x > 2$ 时, $2x+1+x-2 < 4$, 无解。

综上, $x \in (-1, 1)$

(2) 当 $x < -\frac{1}{2}$ 时, $f(x) = -2x-1+|x-a|$, 则 $f(x) = -2x-1+|x-a|+x \geq 3$

即 $|x-a| \geq x+4$, 由图像可知 $a \in (-\infty, -4]$