太原市2016年高三年级模拟试题（二）

数学（文史类）▪ 试卷分析

一、选择题

1.设集合 $A=\{x|2<x<4\}, B=\{x|x^2-x-6\le 0\}, A\cap(C_uB)=$

A．$[2,+\infty)$　　B．$(3,4)$　　C. $[-2,4)$　　D．$(-\infty,-2)\cup(3,4)$

答案：B

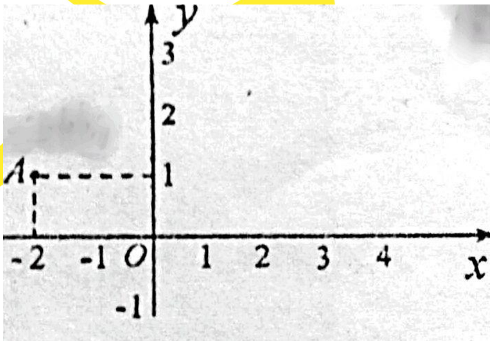
考点：*集合的运算*

解析：$A=\{x|2<x<4\}, B=\{x|-2\le x\le 3\}, A\cap(C_uB)=\{x|3<x<4\}$

2. 如图，在复平面内，表示复数 z 的点为 A，则复数 $\frac{z}{1-2i}$ 对应的点在

A. 第一象限　B. 第二象限

C. 第三象限　D. 第四象限



答案:C

考点：复数的概念与运算

解析：复数 z 在复平面内对应点为 A(-2,1)

$$z=-2+i\quad \frac{z}{1-2i}=\frac{-2+i}{1-2i}=\frac{(-2+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}=-\frac{4}{5}+-\frac{3}{5}i$$

$\frac{z}{1-2i}$ 在复平面对应的点为 $(-\frac{4}{5},-\frac{3}{5})$，位于第三象限。

3. 下列函数中，既是偶函数，又在（0，+∞）上单调递增的函数是

A. $y=-x^2$　　B. $y=2^{-|x|}$　　C. $y=\left|\frac{1}{x}\right|$　　D. $y=\lg|x|$

答案：D

考点：函数的单调性与奇偶性

解析：$y=-x^2$，$y=2^{-|x|}$，$y=\left|\frac{1}{x}\right|$三个函数在（0，+∞）均单调递减，可直接排除。$y=\lg|x|$既是偶函数，又在（0，+∞）上单调递增的函数，故选 D.

4. 已知非零向量 a, b 满足$|a|=\sqrt{2}|b|$, 且$(a-b)\perp(2a+3b)$, 则 a 与 b 的夹角为

A. $\frac{\pi}{3}$　　B. $\frac{\pi}{4}$　　C. $\frac{2\pi}{3}$　　D. $\frac{3\pi}{4}$

答案：D

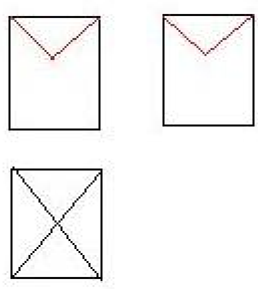
考点：向量的运算

解析：$(a-b)\perp(2a+3b)$,则$(a-b)\cdot(2a+3b)=0$，有

$(a-b)\cdot(2a+3b)=2a^2+ab-3b^2=2|a|^2-3|b|^2+|a||b|\cos\theta=0$，又$|a|=\sqrt{2}|b|$,

得$\cos\theta=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，a 与 b 的夹角为$\frac{3\pi}{4}$.

5. 某几何体的三视图如图所示, 图中的四边形都是边长为 2 的正方形的两条虚线互相垂直, 则该几何体的体积是



A. $\frac{16}{3}$　　B. $\frac{20}{3}$

C. $8-\frac{\pi}{6}$　　D. $8-\frac{\pi}{3}$

答案：B

考点：空间几何体的三视图

解析：该几何体可看做一个正方体上部去掉了一个正四棱锥.原正方体的体积为 $2\times2\times2=8$，四棱锥的棱长为 $\sqrt{2}$，高为 1，体积为 $\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{3}\times2\times2\times1=\frac{4}{3}$.则该几何体体积为 $8-\frac{4}{3}=\frac{20}{3}$.

6. 将函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图像沿 x 轴向右平移 a 个单位（a>0），所得图像关于 y 轴对称，则 a 的值可以是

A. $\frac{\pi}{6}$　　B. $\frac{\pi}{2}$　　C. $-\frac{\pi}{6}$　　D. $\frac{\pi}{3}$

答案：A

考点：三角函数公式与三角函数性质

解析：函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x=2\sin(x-\frac{\pi}{3})$，函数 $y=\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图像沿 x 轴向右平移 a 个单位（a>0），得到函数 $y=2\sin(x-a-\frac{\pi}{3})$，函数图像关于 y 轴对称，取 x=0，把选项中的数值带入验证，使函数取得最值，即满足 $-\alpha-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+k\pi(k\in Z)$，可得选项中只有 $a=\frac{\pi}{6}$ 满足。

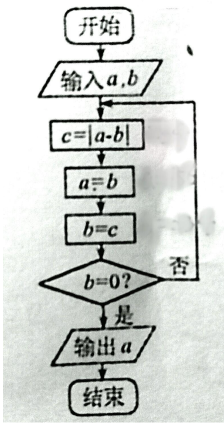
7. 执行右图的程序框图，若输入 a=390，b=156，则输出 a 的值是

A. 234

B. 39

C. 78

D. 156



答案：C

考点：程序框图

解析：第一次循环：$c=|390-156|=234, a=156, b=234, b\neq 0$

第二次循环：$c=|156-234|=78, a=234, b=78, b\neq 0$

第三次循环：$c=|234-78|=156, a=78, b=156, b\neq 0$

第四次循环：$c=|78-156|=78, a=156, b=78, b\neq 0$

第五次循环：$c=|156-78|=78, a=78, b=78, b\neq 0$

第六次循环：$c=|78-78|=0, a=78, b=0$，输出 a=78.

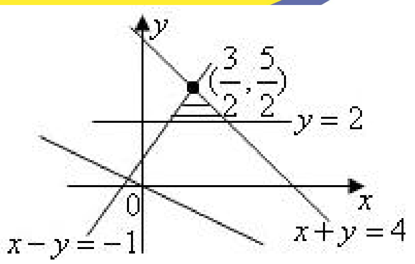
8. 若变量 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x-y\geq -1, \\ x+y\leq 4, \\ y\geq 2. \end{cases}$ 则目标函数 $z=2x+4y$ 的最大值是

A. 10　　B. 11　　C. 12　　D. 13

答案：D

考点：线性规划.

解析：先画出约束条件 $\begin{cases} x-y\geq -1, \\ x+y\leq 4, \\ y\geq 2. \end{cases}$ 的可行域，如图得到当 $x=\dfrac{3}{2}, y=\dfrac{5}{2}$



时目标函数 z=2x+4y 的最大值为

$$Z_{\max}=2\times\frac{3}{2}+4\times\frac{5}{2}=13.$$

故选 D.

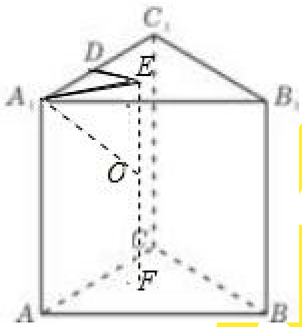
9. 若正三棱柱的所有棱长均为 a，且其体积为 $2\sqrt{3}$，则此三棱柱外接球的表面积是

A. $\frac{8\pi}{3}$　　B. $\frac{28\pi}{3}$　　C. 3π　　D. $\frac{4\pi}{3}$

答案：B

考点：空间几何体的表面积与体积

解析：正三棱柱所有棱长均为 a，



故体积 V=Sh= $\frac{1}{2}\times a\times a\times\sin\frac{\pi}{3}\times a=\frac{\sqrt{3}}{4}a^3=2\sqrt{3}$，解得 $a=2$.

该正三棱柱外接球半径 $r=OA_1=\sqrt{(\frac{1}{2}h)^2+(\frac{\sqrt{3}}{3}a)^2}=\sqrt{(\frac{1}{2}\times 2)^2+(\frac{\sqrt{3}}{3}\times 2)^2}=\sqrt{\frac{7}{3}}$,

故外接球表面积 $S=4\pi r^2=4\times\pi\times\frac{7}{3}=\frac{28}{3}\pi$

10. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_{17}>0, S_{18}<0$, 则 $\frac{S_1}{a_1},\frac{S_2}{a_2},\dots,\frac{S_{15}}{a_{15}}$ 中最大的项为

A. $\frac{S_7}{a_7}$　　B. $\frac{S_8}{a_8}$　　C. $\frac{S_9}{a_9}$　　D. $\frac{S_{10}}{a_{10}}$

答案：C

考点：等差数列求和公式与性质

解析：等差数列$\{a_n\}$中，$S_{17}>0$，且$S_{18}<0$，即$S_{17}=17a_9>0$，$S_{18}=9(a_{10}+a_9)<0$，

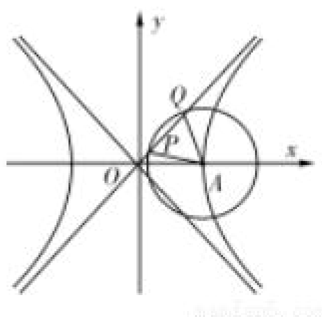
$\therefore a_{10}+a_9<0$，$a_9>0$，$\therefore a_{10}<0$，$\therefore$等差数列$\{a_n\}$为递减数列，故可知a_1，a_2，…，a_9为正，a_{10}，a_{11}…为负；$\therefore S_1$，S_2，…，S_{17}为正，S_{18}，S_{19}，…为负，

$\therefore \frac{S_1}{a_1}>0,\frac{S_2}{a_2}>0,\ldots,\frac{S_{10}}{a_{10}}<0,\ldots,\frac{S_{11}}{a_{11}}<0,\frac{S_{15}}{a_{15}}<0,$

又$\because S_1<S_2<\ldots<S_9, a_1>a_2>\ldots>a_9$，

$\therefore \frac{S_1}{a_1},\frac{S_2}{a_2},\ldots,\frac{S_{15}}{a_{15}}$中最大的项为$\frac{S_9}{a_9}$.

11. 如图，已知双曲线C：$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1(a>0,b>0)$的右顶点为A，O为坐标原点，以A为圆心的圆与双曲线C的一条渐近线交于两点P，Q。若∠PAQ=60°，且$\overrightarrow{OQ}=3\overrightarrow{OP}$，则双曲线C的离心率为



A. $\frac{\sqrt{7}}{2}$　B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{29}}{6}$　D. $\sqrt{3}$

答案：A

考点：双曲线的标准方程，双曲线的几何性质

解析：因为∠PAQ=60°，$|AP|=|AQ|$,所以$|AP|=|AQ|=|PQ|$，设$|AQ|=2m$，

则$|OP|=\frac{1}{2}|PQ|=m$,双曲线 C 的渐近线方程为 $y=\frac{b}{a}x, A(a,0)$，所以点 A 到直线

$y=\frac{b}{a}x$ 的距离 $d=\frac{\left|\frac{b}{a}\times a-0\right|}{\sqrt{(\frac{b}{a})^2+(-1)^2}}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$,所以$(\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}})^2=(2m)^2-m^2=3m^2$，

即$a^2b^2=3m^2(a^2+b^2)$，在△OQA 中，由余弦定理得：

$|OA|^2=|OQ|^2+|AQ|^2-2|OQ||AQ|\cos 60°=(3m)^2(2m)^2-2\times 3m\times 2m\times\frac{1}{2}=7m^2=a,$

由$\begin{cases} a^2b^2=3m^2(a^2+b^2) \\ 7m^2=a \end{cases}$ 得 $\begin{cases} a^2=7m^2 \\ b^2=\frac{21}{4}m^2 \end{cases}$

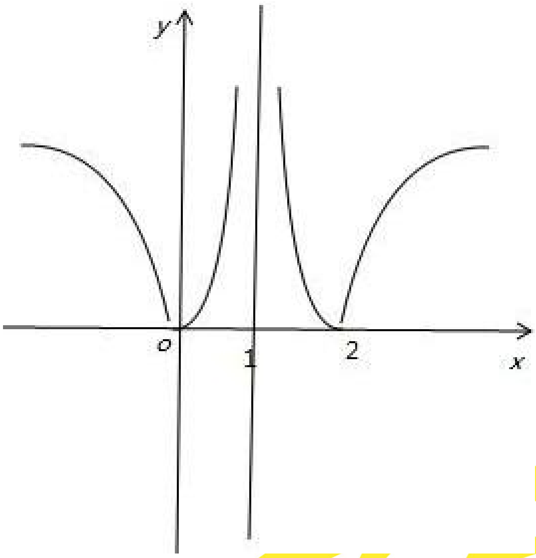
所以双曲线的离心率是$e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{c^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{a^2}}=\sqrt{\frac{7m^2+\frac{21}{4}m^2}{7m^2}}=\frac{\sqrt{7}}{2}$

12. 已知函数 $f(x)=|\log_2|x-1||$,且关于 x 的方程$[f(x)]^2+af(x)+2b=0$有六个不同的实数解，若最小的实数解为-1，则 a+b 的值为

A. -2　　B. -1　　C. 0　　D. 1

答案：B

考点：函数与方程的综合应用



解析：

作出函数 $f(x)=|\log_2|x-1||$ 的图象，因为方程 $[f(x)]^2+af(x)+b=0$ 有 6 个不同的实数解，所以如图所示：

令 t=f（x），方程 $[f(x)]^2+af(x)+b=0$ 转化为：t² +at+2b=0，则方程有一零根和一正根，又因为最小的实数解为-3，所以 f(-1)=1，所以方程：t² +at+2b=0 的两根是 0 和 1，，由韦达定理得：a=-1，b=0，∴a+b=-1，故选 B。

13.已知函数 f（x）=x-4lnx，则曲线 y=f（x）在点（1，f（1））处的切线方程为____

答案: 3x+y-4=0

考点：利用导数研究曲线上某点切线方程

解析：函数 f（x）=x-4lnx，所以函数 $f'(x)=1-\dfrac{4}{x}$，切点为（1,1），该点处切线斜率为 $f'(1)=-3$，所以切线方程为 3x+y-4=0.

14.若抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的准线经过椭圆 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1$ 的一个焦点，则该抛物线的准线方程为____

答案: x=-2

考点：椭圆与双曲线几何性质

解析： 根据椭圆方程得 $a^2=9$，$b^2=5$，得 $c=\sqrt{a^2-b^2}=2$ ，p>0，故抛物线的准线在 y 轴左侧，所经过的椭圆的焦点坐标为（2,0），抛物线的准线方程为 x=-2.

15.在△ABC 中，角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c,若∠B=∠C,且 $7a^2+b^2+c^2=4\sqrt{3}$ ，则△ABC 面积的最大值为______

答案: $\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

考点：余弦定理，三角形面积

解析：由∠B=∠C,得 b=c.又由 $7a^2+b^2+c^2=4\sqrt{3}$ 有 $7a^2+2b^2=4\sqrt{3}$ ，则 $2b^2=4\sqrt{3}-7a^2$

由余弦定理 $\cos c=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{a}{2b}$ ，$\sin c=\sqrt{1-\cos^2 c}=\sqrt{1-(\dfrac{a}{2b})^2}=\dfrac{\sqrt{4b^2-a^2}}{2b}=\dfrac{\sqrt{8\sqrt{3}-15a^2}}{2b}$

三角形面积 $S=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{4}\sqrt{a^2(8\sqrt{3}-15a^2)}$ 设 $t=a^2$ ，$S=\dfrac{1}{4}\sqrt{-15t^2+8\sqrt{3}t}$ ，$S_{\max}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$.

16.若关于 x 的函数 $f(x)=\dfrac{tx^2+2x+t^2+\sin x}{x^2+t}(t>0)$ 的最大值为 M,最小值为 N，且 M+N=4，则实数 t 的值为______

答案: 2

考点： 函数的性质与应用

解析： 由题意，$f(x)=\dfrac{tx^2+2x+t^2+\sin x}{x^2+t}=t+\dfrac{2x+\sin x}{x^2+t}(t>0)$ ，

函数 $y=\dfrac{2x+\sin x}{x^2+t}$ 是奇函数，其最大值与最小值之和为 0 .

f（x）最大值为 M,最小值为 N,且 M+N=4,故 2t=4，∴t=2.

17.已知数列$\{a_n\}$的前 n 项和为S_n，首项为a_n，且$\frac{1}{2},a_n,S_n$成等差数列.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式；

（2）数列$\{b_n\}$满足$b_n=\left(\log_2 a_{2n+1}\right)\times\left(\log_2 a_{2n+3}\right)$，求数列$\left\{\frac{1}{b_n}\right\}$的前 n 项和$T_n$.

考点：等差数列，等比数列　　，数列求和

解析：（1）$\because \frac{1}{2},a_n,S_n$成等差数列，$\therefore 2a_n=\frac{1}{2}+S_n$，

当 n=1 时，$2a_1=\frac{1}{2}+S_1,\therefore a_1=\frac{1}{2}$

当 n≥2 时，$a_n=S_n-S_{n-1}=2a_n-2a_{n-1},\therefore \frac{a_n}{a_{n-1}}=2,$

所以数列$\{a_n\}$是首项为$\frac{1}{2}$，公比为 2 的等比数列，$a_n=2^{n-2}(n\in N^*)$.

（2）$\because b_n=\left(\log_2 a_{2n+1}\right)\times\left(\log_2 a_{2n+3}\right)=\left(\log_2 2^{2n+1-2}\right)\times\left(\log_2 2^{2n+3-2}\right)=(2n-1)(2n+1),$

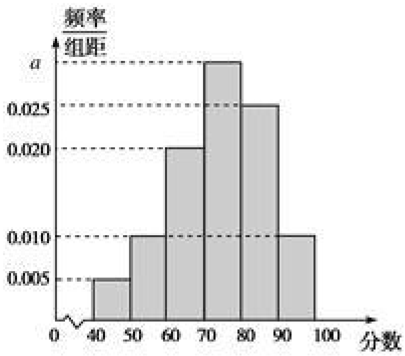
$$\therefore \frac{1}{b_n}=\frac{1}{2n-1}\times\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$

$$\therefore T_n=\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}.$$

18.某校从高一年级学生中随机抽取 40 名学生，将他们的期中考试数学成绩（满分 100 分，成绩均不低于 40 分的整数）分成如下六段：[40,50)，[50,60),…，[90，100），得到如图所示的频率直方图.

（1）若该校高一年级共有学生 500 人，试估计该校高一年级在考试中成绩不低于 60 分的人数；

(2)若从样本中数学成绩在$[40,50)$与$[90,100]$两个分数段内的学生中随机选取两名学生,试用列举法求这两名学生的数学成绩之差的绝对值不大于 10 的概率.



考点： 直方图以及古典概型概率的计算

解析： （1）由 $0.05+0.1+0.2+10a+0.25+0.1=1$，得 a=0.03.

根据频率分布直方图，成绩不低于 60 分的频率为 1 - 10 x (0.005 + 0.01)= 0.85.

估计期中考试数学成绩不低于 60 分的人数约为 640 x 0.85 = 544.

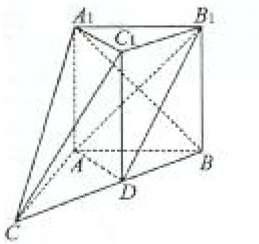
（2）数学成绩在$[40,50)$的学生人数：$40\times 0.05=2$ 人，数学成绩在$[90,100]$的学生人数：$40\times 0.1=4$ 人 。设数学成绩在$[40,50)$ 的学生为 A_1,A_2 ，数学成绩在$[90,100]$ 的学生为 A_3,A_4,A_5,A_6 ，两名学生的结果为：$\{A_1,A_2\},\{A_1,A_3\},\{A_1,A_4\},\{A_1,A_5\},\{A_1,A_6\}$ $\{A_2,A_3\},\{A_2,A_4\},\{A_2,A_5\},\{A_2,A_6\},\{A_3,A_4\},\{A_3,A_5\},\{A_3,A_6\},\{A_4,A_5\},\{A_4,A_6\},\{A_5,A_6\}$共$15$ 种，其中两名学生的数学成绩之差的绝对值不大于 10 的情况有$\{A_1,A_2\}$ ，$\{A_3,A_4\}$ ，$\{A_3,A_5\}$ ，$\{A_3,A_6\}$ ，$\{A_4,A_5\}$ ，$\{A_4,A_6\}$ ，$\{A_5,A_6\}$ 共 7 种， 因此，抽取的两名学生的数学成绩之差的绝对值不大于 10 的概率为$\frac{7}{15}$ 。

19.如图，在多面体$ABC-A_1B_1C_1$中，四边形ABB_1A_1是正方形，ΔA_1CB是正三角形，

$AC=AB=1,B_1C_1\parallel BC,BC=2B_1C_1$

(1)求证：$AB_1\parallel$平面A_1C_1C

(2)求多面体$ABC-A_1B_1C_1$的体积



考点：空间立体几何

解析：（1）取 BC 中点 D,连 $AD, B_1D, C_1D, \because B_1C_1 \parallel BC, BC = 2B_1C_1$

$\therefore$ 四边形 BDC_1B_1, CDB_1C_1 是平行四边形 $\therefore C_1D \underset{=}{\parallel} B_1B, CC_1 \parallel B_1D,$

在正方形 ABB_1A 中，$BB_1 \parallel AA_1 \therefore C_1D \underset{=}{\parallel} AA_1$，$\therefore$ 四边形 ADC_1A_1 是平行四边形，$\therefore AD \parallel A_1C_1,$

$\because B_1D \cap AD = D,$ $\therefore$ 平面 $ADB_1 \parallel$ 平面 A_1C_1C .又 $AB_1 \subset$ 平面 ADB_1，$\therefore AB_1 \parallel$ 平面 A_1C_1C

（2）在正方形 ABB_1A 中，$AB_1 = \sqrt{2}$，又 $\triangle A_1BC$ 是等边三角形，所以 $A_1C = BC = \sqrt{2}$

所以 $AC^2 + AA_1^2 = A_1C^2, AB^2 + AC^2 = BC^2,$

于是 $AA_1 \perp AC, AC \perp AB$，又 $AA_1 \perp AB, \therefore AA_1 \perp$ 平面 ABC，$\therefore AA_1 \perp CD$

又 $CD \perp AD, AD \cap AA_1 = A, \therefore CD \perp$ 平面 ADC_1A_1

于是多面体 $ABC - A_1B_1C_1$ 是由直三棱柱 $ABD - A_1B_1C_1$ 和四棱锥 $C - ADC_1A_1$ 组成

又直三棱柱 $ABD - A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \times 1 \times 1\right) \times 1 = \frac{1}{4}$

四棱锥 $C - ADC_1A_1$ 的体积为 $\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{6}$

故多面体 $ABC - A_1B_1C_1$ 的体积为 $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{5}{12}$.

20. 已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > b > 0)$ 的离心率 $e = \frac{\sqrt{6}}{3}$，直线 $y = x$ 与椭圆交于 A, B 两点，C 为椭圆的右顶点，$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{3}{2}$.

(1) 求椭圆的方程；

(2) 若椭圆上存在两点 E, F，使 $\overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \lambda\overrightarrow{OA}, \lambda \in (0,2)$, 求 ΔOEF 面积的最大值。

考点：椭圆的方程与几何性质，直线与椭圆的位置关系

解析：（1）根据题意，不妨设 $A(t,t),\overrightarrow{OA}=(t,t),\overrightarrow{OC}=(a,0)$，

$\therefore a\cdot t=\frac{3}{2},\frac{t^2}{a^2}+\frac{t^2}{b^2}=1,\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{6}}{3},a^2-b^2=c^2$,解得： $a^2=3,b^2=1$

椭圆的方程为 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$

（2）设 $E(x_1,y_1),F(x_2,y_2)$，EF 中点为 $M(x_0,y_0)$

由（1）$t=\frac{\sqrt{3}}{2},\because \overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}=\lambda\overrightarrow{OA},\therefore \begin{cases} 2x_0=x_1+x_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda, \\ 2y_0=y_1+y_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda, \end{cases}$

∵E，F 在椭圆上，则 $\begin{cases} \frac{{x_1}^2}{3}+{y_1}^2=1 \\ \frac{{x_2}^2}{3}+{y_1}^2=1 \end{cases}$ 相减可得 $\frac{{x_1}^2-{x_2}^2}{3}+{y_1}^2-{y_2}^2=0$

$k_{EF}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=-\frac{1}{3}$,

∴直线 EF 的方程为 $y-\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda=-\frac{1}{3}(x-\frac{\sqrt{3}}{4}\lambda)$，即 $x=-3y+\sqrt{3}\lambda$

代入 $\frac{x^2}{3}+y^2=1$ 整理得：$4y^2-2\sqrt{3}\lambda y+\lambda^2-1=0.$

$\therefore y_1+y_2=\frac{\sqrt{3}}{2}\lambda,y_1\cdot y_2=\frac{\lambda^2-1}{4}$,

$|EF|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}=\sqrt{10}\,|y_1-y_2|=\sqrt{10}\,\frac{\sqrt{3\lambda^2-4(\lambda^2-1)}}{2}=\sqrt{10}\,\frac{\sqrt{4-\lambda^2}}{2}$,

原点到直线 EF 的距离为

$h=\frac{\sqrt{3}\lambda}{\sqrt{10}},S_{\triangle CEF}=\frac{1}{2}|EF|h=\frac{\sqrt{3}\lambda\sqrt{4-\lambda^2}}{4}=\frac{\sqrt{3\lambda^2(4-\lambda^2)}}{4}\le\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\lambda^2+4-\lambda^2}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

当 $\lambda=\sqrt{2}$ 时等号成立，所以△OEF 面积的最大值为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

21. 设函数 $f(x)=x^2+bx-a\ln x$.

（1）若 $x=2$ 是函数 $f(x)$ 的极值点，1 和 x_0 是函数 $f(x)$ 的两个不同的零点，且 $x_0\in(n,n+1),n\in N$, 求 n.

（2）若对任意的 $b\in[-2,-1]$, 都存在 $x\in(1,e)$, 使得 $f(x)<0$ 成立, 求实数 a 的取值范围.

考点：函数与方程的零点问题，导数的意义。

解析：（1）$f'(x)=2x+b-\frac{a}{x}$,

$\because x=2$ 是函数 f(x)的极值点，$\therefore f'(2)=4+b-\frac{a}{2}=0.$

∵1 是函数 f（x）的零点，得 $f(1)=1+b=0,$

由 $\begin{cases}4+b-\frac{a}{2}=0,\\1+b=0,\end{cases}$ 解得 $a=6,b=-1.$

$\therefore f(x)=x^2-x-6\ln x, f'(x)=2x-1-\frac{6}{x},$

令 $f'(x)<0,$ 得 $0<x<2$，令 $f'(x)>0,$ 得 $x>2.$

所以 f（x）在（0,2）单调递减；在（2，+∞）上单调递增

故函数 f（x）至多有两个零点，其中 $1\in(0,2), x_0\in(2,+\infty),$

$\because f(2)<f(1), f(1)=0, f(2)<0, f(3)=6(1-\ln 3)<0, f(4)=6(2-\ln 4)=12(1-\ln 2)>0$

$\therefore x_0\in(3,4)$，故 n=3.

（2）令 g(b)=xb+x²−alnx, b∈［−2，－1］, 则 g(b) 为关于 b 的一次函数且为增函数，

根据题意，对任意 b∈[−2,−1], 都存在 x∈(1，e)，使得 f(x)＜0 成立，

则 $g(b)_{\max}=g(-1)=x^2-x-a\ln x<0$ 在 x∈(1, e)有解,

令 $h(x)=x^2-x-a\ln x$,,只需存在 $x_0\in$ (1, e)使得 h(x_0)< 0 即可,

由于 $h'(x)=2x-1-\dfrac{a}{x}=\dfrac{2x^2-x-a}{x}$,

令 $\varphi(x)=2x^2-x-a,x\in(1,e),\varphi'(x)=4x-1>0.$

$\varphi(x)=2x^2-x-a,x\in(1,e),\varphi'(x)=4x-1>0.$

$\therefore\varphi(x)$ 在(1,e)上单调递增,$\varphi(x)>\varphi(1)=1-a,$

①当 1-a≥0,即 a≤1 时,$\varphi(x)>0,$ 即 $h'(x)>0$,h(x)在(1,e)上单调递增,

$h(x)>h(1)=0,$ 不符合题意。

②当 1-a<0,即 a>1 时,$\varphi(1)=1-a<0,\varphi(e)=2e^2-e-a,$

若 $a\ge 2e^2-e>1,$ 则 $\varphi(e)<0,$ ∴在(1,e)上 $\varphi(x)<0$ 恒成立,即 $h'(x)<0$ 恒成立,

∴ $h(x)$ 在 $(1,e)$ 上单调递减,∴存在 $x_0\in(1,e)$,使得 $h(x_0)<h(1)=0$,符合题意

若 $2e^2-e>a>1,$ 则 $\varphi(e)>0,$ ∴在 $(1,e)$ 一定存在实数 m,使得 $\varphi(m)=0$

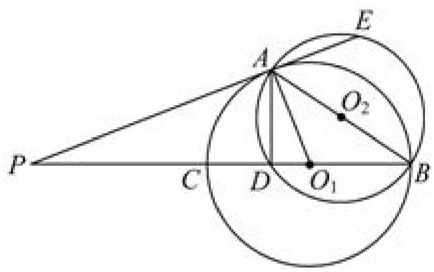
∴在 $(1,m)$ 上 $\varphi(x)<0$ 恒成立,即 $h'(x)<0$ 恒成立,$h(x)$ 在 $(1,m)$ 上单调递减

∴存在 $x_0\in(1,m)$,使得 $h(x_0)<h(1)=0,$ 符合题意.

综上所述,当 $a>1$ 时,对任意 $b\in[-2,-1]$,都存在 $x\in(1,e)$,使得 $f(x)<0$ 成立.

22.选修 4-1:几何证明选讲

如图,⊙O_1 与⊙O_2 相交于 A、B 两点,AB 是⊙O_2 的直径,过 A 点作⊙O_1 的切线交⊙O_2 于点 E,并与 BO_1 的延长线交于点 P,PB 分别与⊙O_1、⊙O_2 交于 C,D 两点.



求证：（1）PA•PD=PE•PC；

（2）AD=AE．

解析：（1）$\because PE$、PB 分别是⊙O_2的割线$\therefore PA\cdot PE=PD\cdot PB$ ①

又$\because PA$、PB 分别是⊙O_1的切线和割线$\therefore PA^2=PC\cdot PB$ ②

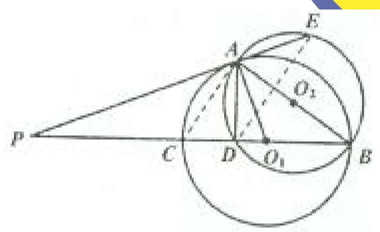
由①，②得$PA\cdot PD=PE\cdot PC$

（2）连结AC、ED 设DE与AB相交于点F $\because BC$ 是⊙O_1的直径$\therefore \angle CAB=90°$

$\therefore AC$ 是⊙O_2的切线.

由（1）知$\frac{PA}{PE}=\frac{PC}{PD}$，$\therefore AC \parallel ED$ $\therefore AB\perp DE$，$\angle CAD=\angle ADE$

又$\because AC$ 是⊙O_2的切线，$\therefore \angle CAD=\angle AED$ 又$\angle CAD=\angle ADE$，$\therefore \angle AED=\angle ADE$ $\therefore$ $AD=AE$



23.选修 4-4：坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中，设倾斜角为α的直线 l 的方程为$\begin{cases}x=2+t\cos\alpha\\ y=\sqrt{3}+t\sin\alpha\end{cases}$(t 为参数)，以 O 为极点，x 轴的非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C 的极坐标方程为$\rho^2=\frac{4}{1+3\sin^2\theta}$，直线 l 与曲线 C 相交于不同的两点 A,B.

（1） 若$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$，求线段 AB 中点 M 的直角坐标；

（2）若$|PA|\cdot|PB|=|OP|^2$，其中$P\left(2,\sqrt{3}\right)$,求直线 l 的斜率.

解析：(1)曲线 C 的普通方程是$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.

当$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$时，设点 M 对应的参数为t_0，直线方程为$\begin{cases}x=2+\dfrac{1}{2}t\\ y=\sqrt{3}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\end{cases}$(t 为参数)，带入曲线 C 的普通方程$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$，得$13t^2+56t+48=0$，设直线 C 上的点 A,B 对应参数为$t_1,t_2$，则$t_0=\dfrac{t_1+t_2}{2}=-\dfrac{28}{13}$

所以点 M 的坐标为$\left(\dfrac{12}{13},-\dfrac{\sqrt{3}}{13}\right)$.

（2）将$\begin{cases}x=2+t\cos\alpha\\ y=\sqrt{3}+t\sin\alpha\end{cases}$带入曲线 C 的普通方程$\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$

得$\left(\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha\right)t^2+\left(8\sqrt{3}\sin\alpha+4\cos\alpha\right)t+12=0$,

因为$|PA|\cdot|PB|=|t_1t_2|=\dfrac{12}{\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}$,$|OP|^2=7$,所以$\dfrac{12}{\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha}=7$,

解得$\sin^2\alpha=\dfrac{5}{21}$, $\tan^2\alpha=\dfrac{5}{21}$, 由于$\Delta=32\cos\alpha\left(2\sqrt{3}\sin\alpha-\cos\alpha\right)>0$, 故$\tan\alpha=\dfrac{\sqrt{5}}{4}$,

所以直线的斜率为$\dfrac{\sqrt{5}}{4}$.

24.选修 4-5:不等式选讲

设函数$f(x)=|2x+1|+|x+a|,a\in R.$

（1）当$a=2$时，求不等式$f(x)<4$的解集；

（2）当$a<-\dfrac{1}{2}$时，对于$\forall x\in\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$,都有$f(x)+x\geq 3$成立，其 a 的取值范围.

解析：（1）令$|2x+1|=0$，得$x=\frac{1}{2}$；令$|x-2|=0$，得$x=2.$

①当$x\geq 2$时，原不等式化为$2x+1+x-2<4$,即$x<\frac{5}{3}$,无解；

②当$-\frac{1}{2}<x<2$时，原不等式化为$2x+1+2-x<4$，即$x<1$，得$-\frac{1}{2}<x<1$；

③当$x\leq -\frac{1}{2}$时，原不等式化为$-2x-1+2-x<4$,即$x>-1$，得$-1<x\leq -\frac{1}{2}$.

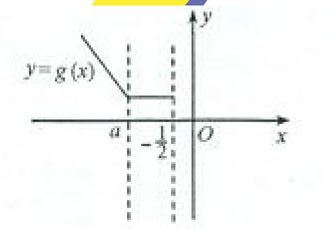
所以原不等式解集为$\{x|-1<x<1\}$.

（2）令$g(x)=f(x)+x$，当$x\leq -\frac{1}{2}$时，$g(x)=|x-a|-x-1$，

由$a<-\frac{1}{2}$，得$g(x)=\begin{cases}-1-a, a<x\leq -\frac{1}{2}\\ -2x+a-1, x\leq a\end{cases}$

对于$\forall x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$,都有$f(x)+x\geq 3$成立，

只需$g(x)_{\min}\geq 3$在$x\in\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right]$即可.



做出$g(x)$的大致图像，易知，$[g(x)_{\min}]=g(a)=-a-1$，

$\therefore -a-1\geq 3$，得$a\leq 4.$