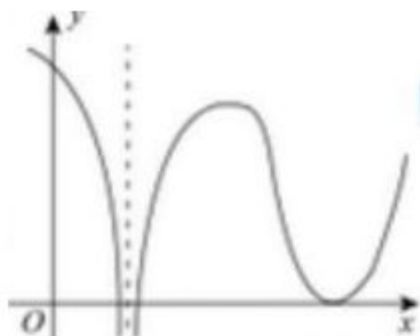


2016 年全国硕士研究生入学统一考试数学三试题

一、选择题:1~8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 下列每题给出的四个选项中, 只有一个选项符合

题目要求的, 请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

1、设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如图所示, 则()



- A. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.
 B. 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点.
 C. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点.
 D. 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.

2、已知函数 $f(x, y) = \frac{e^x}{x-y}$, 则 ()

A. $f'_x - f'_y = 0$ B. $f'_x + f'_y = 0$

C. $f'_x - f'_y = f$ D. $f'_x + f'_y = f$

3、设 $J_k = \iint_{D_i} \sqrt[3]{x-y} dx dy (i=1, 2, 3)$, 其中 $D_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$,

$D_2 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$ $D_3 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1\}$ 则 ()

A. $J_1 < J_2 < J_3$ B. $J_3 < J_1 < J_2$

C. $J_2 < J_3 < J_1$ D. $J_2 < J_1 < J_3$

4、级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right) \sin(n+k)$ (k 为常数) ()

- A. 绝对收敛 B. 条件收敛
C. 发散 D. 收敛性与 k 有关

5、设 A, B 是可逆矩阵, 且 A 与 B 相似, 则下列结论错误的是 ()

- A. A^T 与 B^T 相似 B. A^{-1} 与 B^{-1} 相似
C. $A + A^T$ 与 $B + B^T$ 相似 D. $A + A^{-1}$ 与 $B + B^{-1}$ 相似

6、设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = a(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_1x_3$ 的正负惯性指数分别为

- 1, 2, 则 ()
A. $a > 1$ B. $a < -2$
C. $-2 < a < 1$ D. $a = 1$ 或 $a = -2$

7、设 A, B 为两个随机事件, 且 $0 < P(A) < 1, 0 < P(B) < 1$, 如果 $P(A|B) = 1$, 则 ()

- A. $P(\bar{B}|\bar{A}) = 1$ B. $P(A|\bar{B}) = 0$
C. $P(A \cup B) = 1$ D. $P(B|A) = 1$

8、设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim N(1, 2), Y \sim N(1, 4)$, 则 $D(XY) = ()$

- A. 6 B. 8 C. 14 D. 15

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

9、已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x} - 1}{e^{3x} - 1} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$ _____.

10、极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (\sin \frac{1}{n} + 2 \sin \frac{2}{n} + \dots + n \sin \frac{n}{n}) =$ _____.

11、设函数 $f(u, v)$ 可微, $z = z(x, y)$ 由方程 $(x+1)z - y^2 = x^2 f(x-z, y)$ 确定, 则

$dz|_{(0,1)} =$ _____.

12、设 $D = \{(x, y) \mid |x| \leq y \leq 1, -1 \leq x \leq 1\}$, 则 $\iint_D x^2 e^{-y^2} dx dy =$ _____.

13、行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix} =$ _____.

14、设袋中有红、白、黑球各 1 个, 从中有放回地取球, 每次取 1 个, 直到三种颜色的球都取到时停止, 则取球次数恰好为 4 的概率为 _____.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分。请将解答写在答题纸指定位置上。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

15、(本题满分 10 分)

求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x - 1)^{\frac{1}{x^4}}$ 。

16、(本题满分 10 分)

设某商品的最大需求量为 1200 件，该商品的需求函数 $Q = Q(p)$ ，需求弹性

$\eta = \frac{p}{120 - p} (\eta > 0)$ ， p 为单价 (万元)。

(1) 求需求函数的表达式；

(2) 求 $p = 100$ 万元时的边际效益，并说明其经济意义。

17、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x) = \int_0^1 |t^2 - x^2| dt (x > 0)$ ，求 $f'(x)$ 并求 $f(x)$ 的最小值。

18、(本题满分 10 分)

设函数 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^x f(x-t) dt = \int_0^x (x+t)f(t) dt + e^{-x} - 1$ ，求 $f(x)$ 。

19、(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{(n+1)(2n+1)}$ 的收敛域及和函数。

20、(本题满分 11 分)

设矩形 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1-a \\ 1 & 0 & a \\ a+1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}$ ， $\beta = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2a-2 \end{pmatrix}$ ，且方程组 $AX = \beta$ 无解，

求：(1) 求 a 的值

(2) 求方程组 $A^T AX = A^T \beta$ 的通解。

21、(本题满分 11 分)

已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(1) 求 A^{99}

(2) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$ 。记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ，将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别

表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合。

22、(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X, Y) 在区域 $D = \{(x, y) | 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布, 令

$$U = \begin{cases} 1, & X \leq Y. \\ 0, & X > Y. \end{cases}$$

- (1) 写出 (X, Y) 的概率密度;
- (2) 问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;
- (3) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

23、(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度 $f(x, \theta) = \begin{cases} \frac{3x^2}{\theta^3}, & 0 < x < \theta \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$ 其中 $\theta \in (0, +\infty)$ 为未知参数,

X_1, X_2, X_3 为来自 X 的简单随机样本, 令 $T = \max(X_1, X_2, X_3)$.

- (1) 求 T 的概率密度;
- (2) 确定 a , 使得 $E(aT) = \theta$.