

东北师大附中第六次模拟考试

数学（理）试卷

命题人：高三数学理科备课组

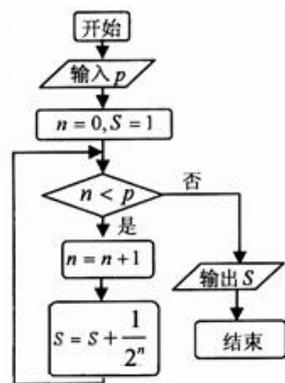
注意事项：

1. 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分。答题前，考生务必将自己的姓名、准考证号填写在答题卡上。
2. 回答第 I 卷时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其他答案标号。写在本试卷上无效。
3. 回答第 II 卷时，将答案写在答题卡上，写在本试卷上无效。

第 I 卷

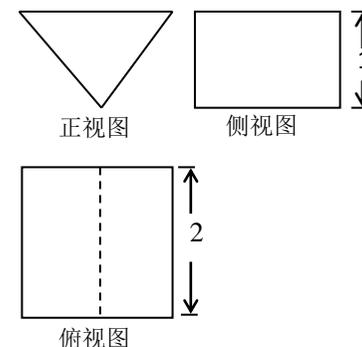
一. 选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

- (1) 已知集合 $A = \{x | \log_3 x \geq 0\}$, $B = \{x | x \leq 1\}$, 则
 - (A) $A \cap B = \emptyset$
 - (B) $A \cup B = \mathbf{R}$
 - (C) $B \subseteq A$
 - (D) $A \subseteq B$
- (2) 已知复数 $\frac{a+i}{1-i}$ 为纯虚数，那么实数 $a =$
 - (A) -1
 - (B) $-\frac{1}{2}$
 - (C) 1
 - (D) $\frac{1}{2}$
- (3) 已知命题 p : “ $m = 1$ ”, 命题 q : “直线 $mx - y = 0$ 与直线 $x + m^2 y = 0$ 互相垂直”, 则命题 p 是命题 q 的
 - (A) 充分不必要条件
 - (B) 必要不充分条件
 - (C) 充要条件
 - (D) 既不充分也不必要条件
- (4) 我国古代数学名著《数书九章》中有“米谷粒分”问题：粮仓开仓收粮，粮农送来米 1536 石，验得米内夹谷，抽样取米一把，数得 224 粒内夹谷 28 粒，则这批米内夹谷约
 - (A) 134 石
 - (B) 169 石
 - (C) 192 石
 - (D) 338 石
- (5) 执行右边的程序框图，若输出 $S = \frac{15}{8}$, 则输入 p 的值为
 - (A) 2
 - (B) 3
 - (C) 4
 - (D) 5

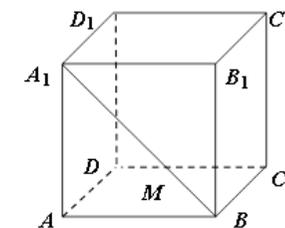


- (6) 若 $\left(x^2 + \frac{1}{3x^3}\right)^n$ ($n \in \mathbf{N}^*$) 展开式中含有常数项，则 n 的最小值是
 - (A) 3
 - (B) 5
 - (C) 8
 - (D) 10

- (7) 一个多面体的三视图如右图所示，正视图为等腰直角三角形，俯视图中虚线平分矩形的面积，则该多面体的表面积为
 - (A) 2
 - (B) $4 + 2\sqrt{2}$
 - (C) $4 + 4\sqrt{2}$
 - (D) $6 + 4\sqrt{2}$



- (8) 已知 1 是 $\lg a$ 与 $\lg b$ 的等比中项，若 $a > 1, b > 1$, 则 ab 有
 - (A) 最小值 10
 - (B) 最小值 100
 - (C) 最大值 10
 - (D) 最大值 100
- (9) 在 $\triangle ABC$ 中， $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}|$, $AB = 4, AC = 2$, E, F 为线段 BC 的三等分点，则 $\overrightarrow{AE} \cdot \overrightarrow{AF} =$
 - (A) $\frac{10}{9}$
 - (B) 4
 - (C) $\frac{40}{9}$
 - (D) $\frac{56}{9}$
- (10) 已知点 F 是双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 的一个焦点，过点 F 且斜率为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的直线 l 与圆 $x^2 + y^2 = a^2$ 相切，则双曲线的离心率为
 - (A) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$
 - (B) $\sqrt{5}$
 - (C) 2
 - (D) 3
- (11) 如图，棱长为 1 的正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， M 为线段 A_1B 上的动点，则下列结论正确的有
 - ① 三棱锥 $M - DCC_1$ 的体积为定值
 - ② $DC_1 \perp D_1M$
 - ③ $\angle AMD_1$ 的最大值为 90°
 - ④ $AM + MD_1$ 的最小值为 2
 - (A) ①②
 - (B) ①②③
 - (C) ③④
 - (D) ②③④
- (12) 已知曲线 $C_1: y = e^x$ 上一点 $A(x_1, y_1)$, 曲线 $C_2: y = 1 + \ln(x - m)$ ($m > 0$) 上一点 $B(x_2, y_2)$,



当 $y_1 = y_2$ 时, 对于任意 x_1, x_2 , 都有 $|AB| \geq e$ 恒成立, 则 m 的最小值为

- (A) 1 (B) \sqrt{e} (C) $e-1$ (D) $e+1$

第 II 卷

本卷包括必考题和选考题两部分。第 13 题~第 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答。第 22 题~第 24 题为选考题, 考生根据要求作答。

二. 填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

(13) 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x+y-2 \leq 0 \\ x-y+2 \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = 3x + 2y$ 的最大值为_____.

(14) 已知抛物线 $y^2 = 2px (p > 0)$, 过焦点 F , 且倾斜角为 60° 的直线与抛物线在第一象限交于点 M , 若 $|FM| = 4$, 则抛物线方程为_____.

(15) 将函数 $f(x) = \sin x (x \in [0, 2\pi])$ 的图像向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位后得到函数 $g(x)$ 的图像, 则由函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的图像所围成的封闭图形的面积为_____.

(16) 已知各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1, a_{n+2} = 1 + \frac{1}{a_n} (n \in \mathbb{N}^*)$, 若 $a_{2014} = a_{2016}$, 则

$a_{13} + a_{2016} =$ _____.

三. 解答题: 解答应写出文字说明, 证明过程或演算步骤.

(17) (本小题满分 12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $\sin(2A+B) = 2\sin A + 2\cos(A+B)\sin A$

(I) 求 $\frac{a}{b}$ 的值;

(II) 若 $\triangle ABC$ 的面积为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $a=1$, 求 c 的值.

(18) (本小题满分 12 分)

2016 年 1 月 1 日起全国统一实施全面两孩政策. 为了解适龄民众对放开生育二胎政策的态度, 某市选取 70 后和 80 后作为调查对象, 随机调查了 100 位, 得到数据如下表:

| | 生二胎 | 不生二胎 | 合计 |
|------|-----|------|-----|
| 70 后 | 30 | 15 | 45 |
| 80 后 | 45 | 10 | 55 |
| 合计 | 75 | 25 | 100 |

(I) 以这 100 个人的样本数据估计该市的总体数据, 且视频率为概率, 若从该市 70 后公民中随机抽取 3 位, 记其中生二胎的人数为 X , 求随机变量 X 的分布列和数学期望;

(II) 根据调查数据, 是否有 90% 的把握认为“生二胎与年龄有关”, 并说明理由.

参考公式: $K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$, 其中 $n = a+b+c+d$.

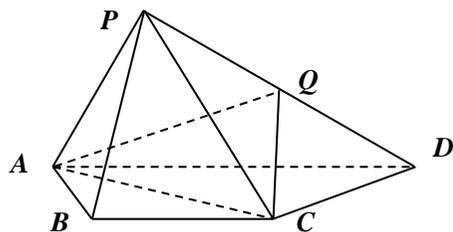
参考数据:

| | | | | | | |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $P(K^2 \geq k_0)$ | 0.15 | 0.10 | 0.05 | 0.025 | 0.010 | 0.005 |
| k_0 | 2.072 | 2.706 | 3.841 | 5.024 | 6.635 | 7.879 |

(19) (本小题满分 12 分)

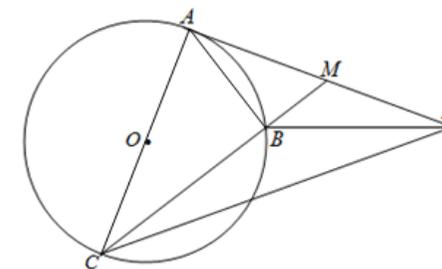
如图, 在四棱锥 $P-ABCD$ 中, 平面 $PAD \perp$ 底面 $ABCD$, 其中底面 $ABCD$ 为等腰梯形, $AD \parallel BC$, $PA = AB = BC = CD = 2$, $PD = 2\sqrt{3}$, $PA \perp PD$, Q 为 PD 的中点.

- (I) 证明: $CQ \parallel$ 平面 PAB ;
 (II) 求直线 PD 与平面 AQC 所成角的正弦值.



如图, 自圆 O 外一点 P 引圆 O 的切线, 切点为 A , M 为 AP 的中点, 过点 M 引圆的割线交圆 O 于 B, C 两点, 且 $\angle BMP = 120^\circ$, $\angle BPC = 30^\circ$, $MC = 8$.

- (I) 求 $\angle MPB$ 的大小;
 (II) 记 $\triangle MAB$ 和 MCA 的面积分别为 $S_{\triangle MAB}$ 和 $S_{\triangle MCA}$, 求 $\frac{S_{\triangle MAB}}{S_{\triangle MCA}}$.



(20) (本小题满分 12 分)

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 的离心率为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $B(0,1)$ 为椭圆的一个顶点, 直线 l 交椭圆于 P, Q (异于点 B) 两点, $BP \perp BQ$.

- (I) 求椭圆方程;
 (II) 求 $\triangle BPQ$ 面积的最大值.

(21) (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = a \ln(x+1) + \frac{1}{2}x^2 - x$, 其中 a 为非零实数.

- (I) 讨论 $f(x)$ 的单调性;
 (II) 若 $y = f(x)$ 有两个极值点 α, β , 且 $\alpha < \beta$, 求证: $\frac{f(\beta)}{\alpha} < \frac{1}{2}$. (参考数据:

$\ln 2 \approx 0.693$)

(23) (本小题满分 10 分) 选修 4—4: 极坐标与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $C_1: \begin{cases} x = 1 + \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数), 曲线

$$C_2: \frac{x^2}{2} + y^2 = 1.$$

- (I) 在以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中, 求 C_1, C_2 的极坐标方程;
 (II) 射线 $\theta = \frac{\pi}{6}$ ($\rho \geq 0$) 与 C_1 的异于极点的交点为 A , 与 C_2 的交点为 B , 求 $|AB|$.

(24) (本小题满分 10 分) 选修 4—5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x - a|$

- (I) 若不等式 $f(x) \leq 2$ 的解集为 $[0, 4]$, 求实数 a 的值;
 (II) 在 (I) 的条件下, 若 $\exists x_0 \in \mathbf{R}$, 使得 $f(x_0) + f(x_0 + 5) - m^2 < 4m$, 求实数 m 的

请考生在第 22、23、24 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分。
 作答时请写清题号。

(22) (本小题满分 10 分) 选修 4—1: 几何证明选讲

取值范围.