2016 年普通高等学校招生全国统一考试

理科数学

第 I 卷

（1）A

（2）C

（3）D

（4）A

（5）B

（6）C

（7）B

（8）C

（9）D

（10）C

（11）A

（12）B

第 *II* 卷

(13) $\frac{21}{13}$

(14)2,3,4

（15）1 和 3

（16）1

17.

（1）$b_1=0, b_{11}=1, b_{101}=2$

（2）1893

18.

（1）0.55（2）$\frac{3}{11}$ （3）1.23

19.

（1）菱形$ABCD$中,$OA=\frac{1}{2}AC=3, OD=\sqrt{AD^2-OA^2}=4$

$\frac{AE}{AD}=\frac{\frac{5}{4}}{5}=\frac{1}{4}=\frac{CF}{CD}$,由定比分点性质可知：

$EF//AC$且$\frac{OH}{OD}=\frac{1}{4}$

则$OH=1, D'H=DH=OD-OH=3$

$OH^2+D'H^2=1+9=10=OD'^2 \Rightarrow D'H\perp OH$

$EF//AC \Rightarrow \angle EHD=\angle AOD=90^\circ \Rightarrow EF\perp DH$,即：$EF\perp D'H$

又$\because OH\cap EF=O, \therefore D'H\perp$平面$ABCD$

（2）建立如图所示空间直角坐标系

$D'(0,0,3), B(5,0,0), C(1,3,0), A(1,-3,0)$

$\overrightarrow{D'A}=(1,-3,-3), \overrightarrow{AB}=(4,3,0), \overrightarrow{AC}=(0,6,0)$

设平面$BD'A$的法向量$\vec{m}=(x_1,y_1,z_1)$,平面$CD'A$的法向量$\vec{n}=(x_2,y_2,z_2)$

则$\begin{cases}x_1-3y_1-3z_1=0\\4x_1+3y_1=0\end{cases}, \vec{m}=(3,-4,5)$

$\begin{cases}x_2-3y_2-3z_2=0\\6y_2=0\end{cases}, \vec{n}=(3,0,1)$

$$\cos\theta=\frac{\vec{m}\cdot\vec{n}}{|\vec{m}|\cdot|\vec{n}|}=\frac{3\times3+(-4)\times0+5\times1}{\sqrt{9+16+25}\times\sqrt{9+0+1}}=\frac{14}{10\sqrt{5}}=\frac{7\sqrt{5}}{25}$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\frac{245}{625}}=\frac{2\sqrt{95}}{25}$$

20.

（1）$S=\frac{144}{49}$　（2）$k\in\left(\sqrt[3]{2},2\right)$

21. （本小题满分 12 分）

（1）讨论函数 $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}e^x$ **的单调性，并证明当** $x>0$ **时，** $(x-2)e^x+x+2>0$ **；**

（2）证明：当 $a\in[0,1)$ **时，函数** $g(x)=\dfrac{e^x-ax-a}{x^2}(x>0)$ **有最小值.设** $g(x)$ **的最小值为** $h(a)$ **,求函数** $h(a)$ **的值域.**

解：(I) $f'(x)=\dfrac{x^2e^x}{(x+2)^2}>0$ ，$\therefore f(x)$ 在 R 上单调递增

当 $x>0$ 时，$f(x)>f(0)=-1$，即 $\dfrac{x-2}{x+2}e^x>-1$ ，$\because x>0, x+2>0$ $\therefore (x-2)e^x+x+2>0$

(II) $g'(x)=\dfrac{e^x(x-2)+a(x+2)}{x^3}$ 设 $k(x)=e^x(x-2)+a(x+2)$

则 $k'(x)=e^x(x-1)+a$ $k''(x)=e^x\cdot x>0$

$\therefore x\in(0,+\infty)$ 时，$k'(x)$ 单调递增，且 $k'(0)=a-1<0, k'(1)=a>0$

$\therefore \exists x_1\in(0,1)$ 使 $k'(x_1)=0$，则 $x\in(0,x_1)$ 时 $k'(x)<0$，$k(x)$ 递减

$x\in(x_1,+\infty)$ 时，$k'(x)>0$，$k(x)$ 递增

$\therefore k(x_1)<k(0)=2a-2<0$ ；$k(2)=4a>0$

$\therefore \exists x_0\in(x_1,+\infty)$，使 $k(x_0)=0$

$x\in(0,x_0), k(x)<0, g'(x)<0, g(x)$ 递减

$x\in(x_0,+\infty), k(x)>0, g'(x)>0, g(x)$ 递增

$\therefore x=x_0$ 时，函数 $g(x)$ 取最小值

最小值 $g(x_0)=\dfrac{e^{x_0}-a(x_0+1)}{x_0^2}$

$\because k(x_0)=0$ 即 $e^{x_0}(x_0-2)+a(x_0+2)=0$ 即 $a=-\dfrac{e^{x_0}(x_0-2)}{x_0+2}$

由(I)得 $f\left(x\right)=\dfrac{e^{x}\left(x-2\right)}{x+2}$ 在 R 上递增，则 $y=-\dfrac{e^{x_0}\left(x_0-2\right)}{x_0+2}$ 是 R 上减函数

$a=0$ 时， $x_0=2$ ；

$a=1$ 时， $x_0=0$ ，$\therefore x_0\in\left(0,2\right]$

把 $a=-\dfrac{e^{x_0}\left(x_0-2\right)}{x_0+2}$ 带入 $g\left(x_0\right)=\dfrac{e^{x_0}-a\left(x_0+1\right)}{x_0^2}$

即 $h\left(a\right)=g\left(x_0\right)=\dfrac{e^{x_0}-a\left(x_0+1\right)}{x_0^2}=\dfrac{e^{x_0}}{x_0^2}\left(2+x_0+\dfrac{4}{2+x_0}-4\right)$，$x_0\in\left(0,2\right]$

$g^{'}\left(x_0\right)=\dfrac{e^{x_0}\left(x_0+1\right)}{\left(x_0+2\right)^2}>0$

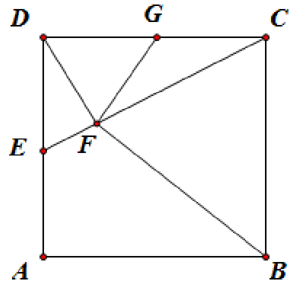
$\therefore g\left(x_0\right)$ 在 $x_0\in\left(0,2\right]$ 上单调递增

有洛必达法则 $\lim\limits_{x_0\to 0}g\left(x_0\right)=\dfrac{1}{2}$

$\therefore h\left(a\right)$ 值域为 $\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{e^2}{4}\right]$

请考生在 22、23、24 题中任选一题作答,如果多做,则按所做的第一题计分,做答时请写清题号

22.（本小题满分 10 分）选修 4-1：集合证明选讲



如图，在正方形 $ABCD$，E,G 分别在边 DA,DC 上（不与端点重合），且 $DE=DG$，过 D 点作 $DF\perp CE$，垂足为 F

（1）证明：B,C,G,F 四点共圆；

（2）若 $AB=1,E$ 为 DA 的中点，求四边形 $BCGF$ 的面积.

【答案】（1）详见解析 (2)$\frac{1}{2}$

【解析】（1）证明：$Rt\triangle DEC$ 中 $DF\perp CE$

$\therefore\triangle DFE$ 相似于$\triangle CFD$

$\therefore\frac{DE}{CD}=\frac{DF}{BF}$ 且 $\angle EDF=\angle DCF$ 又$\because DE=DG\ \therefore\frac{DG}{CD}=\frac{DF}{BF}$

又$\because\angle GDF+\angle EDF=\angle DCF+\angle BCF=90^{\circ}$

$\therefore\angle DGF=\angle BCF$

$\therefore\triangle DGF$ 相似于$\triangle BCF$

$\therefore\angle DFG=\angle BFC$

$\because\angle DFG+\angle GFC=90^{\circ}$

$\therefore\angle BFC+\angle GFC=90^{\circ}$ 即 $\angle BFG=90^{\circ}$

$\angle BFG+\angle BCG=180^{\circ}$

$\therefore B,C,G,F$ 四点共圆

(2) $\because AB=1,E$ 为 DA 的中点

$\therefore DE=DG=CG=GF=\frac{1}{2}$

$S_{\triangle BCG}=\frac{1}{2}BC\cdot CG=\frac{1}{4}$

$S_{BCGF}=2S_{\Delta BCG}=\frac{1}{2}$

23. （本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

在直线坐标系 xOy 中，圆 C 的方程为 $(x+6)^2+y^2=25$

（1）以坐标原点为极点，x 轴正半轴为极轴建立极坐标系，求 C 的极坐标方程；

（2）直线 l 的参数方程是（t 为参数），l 与 C 交于 A、B 两点，$|AB|=\sqrt{10}$，求 l 的斜率。

【答案】1）$\rho^2+12\rho\cos\theta+11=0$；2）$k=\pm\dfrac{\sqrt{15}}{3}$

【解析】1）利用直角坐标与极坐标的互化公式，代入整理可得出答案；

2）利用直线与圆的关系可求出圆心到直线的距离 $d=\dfrac{3\sqrt{10}}{2}$，由此利用点到直线距离公式可求出答案.

【点评】本题比较基础，要求考生熟练掌握极坐标与直角坐标之间互化公式，掌握直线与圆相交基本题型，熟悉点到直线距离，属于常见基础题型，难度较小.

24. （本小题满分 10 分），选修 4—5：不等式选讲

已知函数 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|+\left|x+\dfrac{1}{2}\right|$，$M$ 为不等式 $f(x)<2$ 的解集.

（1）求 M；

（2）证明：当 $a,b\in M$ 时，$|a+b|<|1+ab|$

【答案】1）$[-1,1]$；2）详见解析

【解析】1）用零点讨论法将 $f(x)$ 化成分段函数，画出函数图像可得不等式的解集为 $[-1,1]$；

2）证明：$|a+b|^2-|1+ab|^2=a^2+b^2-1-a^2b^2=(a^2-1)(1-b^2)$，因为 $a^2\le 1,b^2\le 1$，所以 $(a^2-1)(1-b^2)\le 0$，所以 $|a+b|\le|1+ab|$.

【点评】本题主要考察绝对值不等式的解法，分类讨论思想的应用，不等式的证明方法，做差法，难度不大.