

山西省 2016 年 中考真题及答案

数学

第一卷 选择题（共 30 分）

一、选择题（本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分.在每个小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请选出并在答题卡上将该项涂黑）

1. $-\frac{1}{6}$ 的相反数是（ ）

A. $\frac{1}{6}$

B. -6

C. 6

D. $-\frac{1}{6}$

【答案】A

【考点】相反数的定义

【解析】 $-(-\frac{1}{6}) = \frac{1}{6}$

2. 不等式组 $\begin{cases} x+5 > 0 \\ 2x < 6 \end{cases}$ 的解集是（ ）

A. $x > -5$

B. $x < 3$

C. $-5 < x < 3$

D. $x < 5$

【答案】C

【考点】解不等式、不等组的取值

【解析】解①式得 $x > -5$ ；解②式得 $x < 3$ ； \therefore 原不等式组的解集是 $-5 < x < 3$ 。

3. 以下问题不适合全面调查的是（ ）

A. 调查某校学生每周课前预习的时间

B. 调查某中学在职教师的身体健康状况

C. 调查全国中小学生课外阅读情况

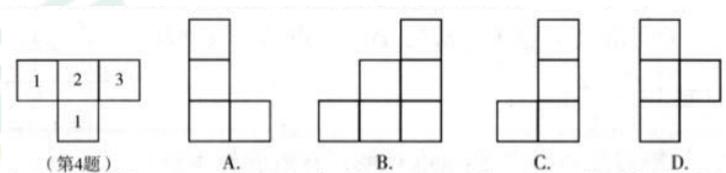
D. 调查某校篮球队员的身高

【答案】C

【考点】普查与抽样调查

【解析】C 选项全国中小学生人数巨大，所以不适合普查。

4. 如图是由几个大小相同的小正方体搭成的几何体的俯视图，小正方形中的数字表示该位置小正方体的个数，则该几何体的左视图是 ()

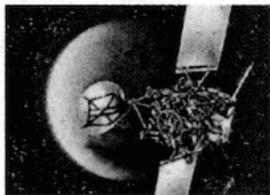


【答案】 A

【考点】 立体图形三视图

5. 我国计划在 2020 年左右发射火箭探测卫星，据科学研究，火星距离地球的最近距离约为 5500 万千米，这个数据用科学计数法可表示为 ()

- A. 5.5×10^6 千米 B. 5.5×10^7 千米 C. 55×10^6 千米 D. 0.55×10^8 千米



(第 5 题)

【答案】 B

【考点】 科学计数法

【解析】 5500 万千米 = 55 000 000 千米 = 5.5×10^7 千米

6. 下列运算正确的是 ()

- A. $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{9}{4}$ B. $(3a^2)^3 = 9a^6$ C. $5^{-3} \div 5^{-5} = \frac{1}{25}$ D. $\sqrt{8} - \sqrt{50} = -3\sqrt{2}$

【答案】 D

【考点】 幂的运算、二次根式的运算

【解析】 A. $\left(-\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$ B. $(3a^2)^3 = 27a^6$ C. $5^{-3} \div 5^{-5} = 5^{-3-(-5)} = 5^2$ D. $\sqrt{8} - \sqrt{50} = -3\sqrt{2}$

7. 甲、乙两个搬运工搬运某种货物，已知乙比甲每小时多搬运 600kg，甲搬运 5000kg 所用时间与乙搬运 8000kg 所用时间相等，求甲、乙两人每小时分别搬运多少 kg 货物，设甲每小时搬运 x kg 货物，则可列方程为 ()

- A. $\frac{5000}{x-600} = \frac{8000}{x}$ B. $\frac{5000}{x} = \frac{8000}{x+600}$ C. $\frac{5000}{x+600} = \frac{8000}{x}$ D. $\frac{5000}{x} = \frac{8000}{x-600}$

【答案】 B

【考点】 分式方程的应用

【解析】 设甲每小时分别搬运 x kg 货物, 则乙每小时分别搬运 $(x+600)$ kg 货物.

$$\text{由题意可得: } \frac{5000}{x} = \frac{8000}{x+600}$$

8. 将抛物线 $y = x^2 - 4x - 4$ 向左平移 3 个单位, 再向上平移 5 个单位, 得到抛物线的函数表达式为 ()

- A. $y = (x+1)^2 - 13$ B. $y = (x-5)^2 - 3$ C. $y = (x-5)^2 - 13$ D. $y = (x+1)^2 - 3$

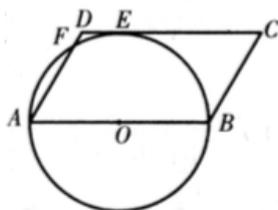
【答案】 D

【考点】 二次函数图象的平移问题

【解析】 抛物线 $y = x^2 - 4x - 4 = (x-2)^2 - 8$. 根据“左加右减, 上加下减”可得: $y = (x+1)^2 - 3$

9. 如图, 在 $\square ABCD$ 中, AB 为 $\odot O$ 的直径, $\odot O$ 与 DC 相切于点 E , 与 AD 相交于点 F , 已知 $AB=12$, $\angle C=60^\circ$, 则 \widehat{FE} 的长为 ()

- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π



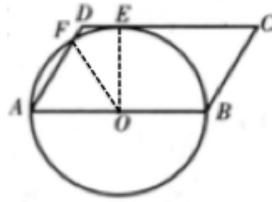
【答案】 C

【考点】 弧长的计算

【解析】 连接 OE , OF , $\because CD$ 与 $\odot O$ 的切线, $\therefore OE \perp CD$, $\because AB \parallel CD$, $\therefore OE \perp AB$,

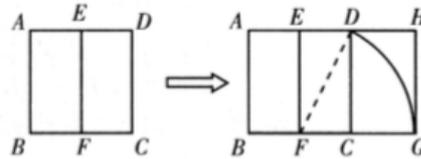
$$\therefore \angle AOE = 90^\circ, \text{ 又 } \because OA = OF, \angle A = 60^\circ, \therefore \angle AOF = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle EOF = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ, \therefore \widehat{FE} = \frac{30^\circ \times 6\pi}{180^\circ} = \pi.$$



10. 宽与长的比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (约 0.618) 的矩形叫做黄金矩形。黄金矩形蕴藏着丰富的美学价值，给我们以协调和匀称的美感，我们可以用这样的方法画出黄金矩形；作正方形 ABCD，分别取 AD，BC 的中点 E、F，连接 EF；以点 F 为圆心，以 FD 为半径画弧，交 BC 的延长线与点 G；作 GH ⊥ AD，交 AD 的延长线于点 H，则图中下列矩形是黄金矩形的是 ()

- A. 矩形 ABFE B. 矩形 EFCD C. 矩形 EFGH D. 矩形 DCGH



【答案】D

【考点】黄金矩形的画法

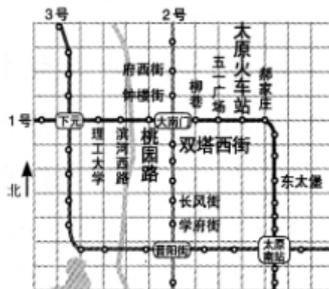
【解析】A 宽与长的比是 1:2；错。 B 宽与长的比是 1:2；错。

C 宽与长的比是 $2:\sqrt{5}$ ；错。 D 宽与长的比是 $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ ；正确。

第二卷 非选择题 (共 90 分)

二、填空题 (本大题共 10 个小题，每小题 3 分，共 30 分)

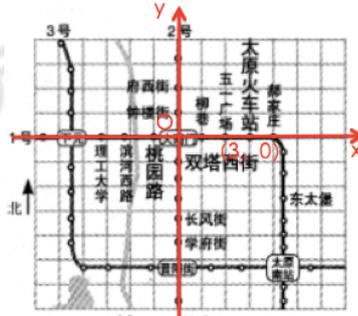
11. 如图是利用网格画出的太原市地铁 1, 2, 3 号线路部分规划示意图。若建立适当的平面直角坐标系，表示双塔西街点的坐标为 (0, -1)，表示桃园路的点的坐标为 (-1, 0)，则表示太原火车站的点 (正好在网格点上) 的坐标是_____。



【答案】 (3, 0)

【考点】 平面直角坐标系的建立及点的坐标

【解析】 建立平面直角坐标系如下：



太原火车站在 x 轴正半轴，从原点数第三个单位长度

∴太原火车站表示的坐标为 (3, 0)

12. 已知点 $(m-1, y_1)$, $(m-3, y_2)$ 是反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ ($m < 0$) 图象上的两点，则 y_1 _____ y_2

(填 “>” 或 “=” 或 “<”)。

【答案】 >

【考点】 反比例函数的增减性

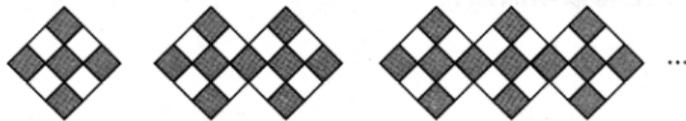
【解析】 ∵ 反比例函数 $y = \frac{m}{x}$ 且 $m < 0$

∴ 在每一象限内，y 随 x 的增大而增大

∵ $m-1 > m-3$

∴ $y_1 > y_2$

13. 如图是一组有规律的图案，它们是由边长相同的小正方形组成，其中部分小正方形涂有阴影，依此规律，第 n 个图案中有 _____ 个涂有阴影的小正方形 (用含有 n 的代数式表示)。



【答案】 $(4n+1)$

【考点】 规律探索

【解析】 第 1 个图中，阴影小正方形个数为 $5=1+4$

第 2 个图中，阴影小正方形个数为 $9=5+4=1+4+4$

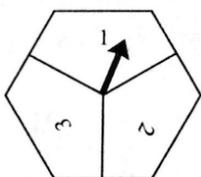
第 3 个图中, 阴影小正方形个数为 $13=9+4=5+4+4=1+4+4+4$

.....

第 n 个图中, 阴影小正方形个数为 $1+4+4+\dots+4$ (共 n 个 4)

\therefore 第 n 个图案中有 $(4n+1)$ 个涂有阴影的小正方形

14. 如图是一个能自由旋转的正六边形转盘, 这个转盘被三条分割线分成形状相同, 面积相等的三部分, 且分别标有“1”“2”“3”三个数字, 指针的位置固定不动, 让转盘自由旋转两次, 当每次转盘停止后, 纪录指针指向的数 (当指针指向分割线时, 视其指向分割线左边的区域), 则两次指针指向的数都是奇数的概率为_____.



(第 14 题)

【答案】 $\frac{4}{9}$

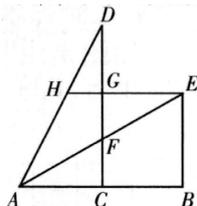
【考点】列表法或树状图法求概率

【解析】列表法得:

	1	2	3
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)

共有 9 种等可能的结果, 两次指针指向的数都是奇数的有 4 种情况, 即 (1, 1) (1, 3) (3, 1) (3, 3), 则两次指针指向的数都是奇数的概率为 $\frac{4}{9}$.

15. 如图, 已知点 C 为线段 AB 的中点, $CD \perp AB$ 且 $CD=AB=4$, 连接 AD, $BE \perp AB$, AE 是 $\angle DAB$ 的平分线, 与 DC 相交于点 F, $EH \perp DC$ 于点 G, 交 AD 于点 H, 则 HG 的长为_____.



(第 15 题)

【答案】 $3 - \sqrt{5}$ (或 $\frac{2\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+1}$)

【考点】 三角形相似

【解析】 \because 点 C 为线段 AB 的中点, $AB=4$

$$\therefore AC = BC = 2$$

$$\because CD \perp AB, BE \perp AB, EH \perp DC$$

$$\therefore CD \parallel BE, EH \parallel AB$$

\therefore 四边形 BCGE 是平行四边形

$$\therefore GE = BC = 2$$

\because AE 是 $\angle DAB$ 的平分线

$$\therefore \angle DAE = \angle EAB$$

$$\because EH \parallel AB$$

$$\therefore \angle AEH = \angle EAB$$

$$\therefore \angle DAE = \angle AEH$$

$$\therefore AH = HE$$

在 $Rt\triangle DAC$ 中, $AC=2, DC=4$, 则 $AD = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$

设 $HG = x$, 则 $AH = HE = x + 2$

由 $\triangle DHG \sim \triangle DAC$, 得 $\frac{DH}{AD} = \frac{HG}{AC}$

$$\text{即 } \frac{2\sqrt{5} - (2+x)}{2\sqrt{5}} = \frac{x}{2}$$

$$\text{解得 } x = \frac{2\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+1} = 3 - \sqrt{5}, \therefore HG = \frac{2\sqrt{5}-2}{\sqrt{5}+1} = 3 - \sqrt{5}$$

三、解答题 (本大题共 8 个小题, 共 75 分, 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤)

16. (本题共 2 个小题, 每小题 5 分, 共 10 分)

(1) 计算: $(-3)^2 - (\frac{1}{5})^{-1} - \sqrt{8} \times \sqrt{2} + (-2)^0$.

【答案】 1

【考点】 实数的运算

【解析】 原式=9 - 5 - 4 + 1 (4分)

=1 (5分)

(2) 先化简, 再求值: $\frac{2x^2 - 2x}{x^2 - 1} - \frac{x}{x+1}$, 其中 $x = -2$

【答案】 2

【考点】 分式化简求值

【解析】 原式= $\frac{2x(x-1)}{(x+1)(x-1)} - \frac{x}{x+1}$ (7分)

= $\frac{2x}{x+1} - \frac{x}{x+1}$ (8分)

= $\frac{x}{x+1}$ (9分)

当 $x = -2$ 时, 原式= $\frac{x}{x+1} = \frac{-2}{-2+1} = 2$ (10分)

17. (本题 7 分) 解方程: $2(x-3)^2 = x^2 - 9$.

【答案】 $x_1 = 3, x_2 = 9$

【考点】 一元二次方程的解法

【解析】

解法一: 原方程可化为 $2(x-3)^2 = (x+3)(x-3)$ (1分)

$2(x-3)^2 - (x+3)(x-3) = 0$ (2分)

$(x-3)[2(x-3) - (x+3)] = 0$ (3分)

$(x-3)(x-9) = 0$ (4分)

$\therefore x-3=0$ 或 $x-9=0$ (5分)

$\therefore x_1 = 3, x_2 = 9$ (7分)

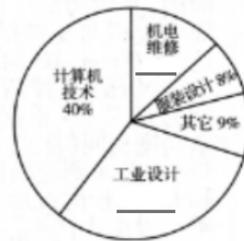
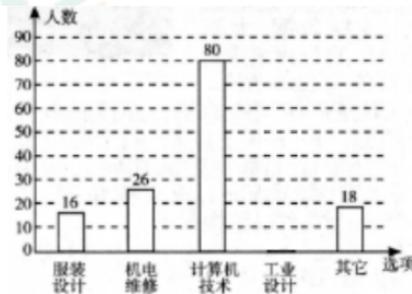
解法二: 原方程可化为 $x^2 - 12x + 27 = 0$ (3分)

这里 $a = 1$, $b = -12$, $c = 27$. $\therefore b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 27 = 36 > 0$.

$$\therefore x = \frac{12 \pm \sqrt{36}}{2 \times 1} = \frac{12 \pm 6}{2} \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$$

因此，原方程的根为 $x_1 = 3$, $x_2 = 9$. $\dots\dots\dots (7 \text{ 分})$

18. (本题 8 分) 每年 5 月的第二周为“职业教育活动周”，今年我省开展了以“弘扬工匠精神，打造技能强国”为主题的系列活动，活动期间某职业中学组织全校师生并邀请学生家长和社区居民参加“职教体验观摩”活动，相关专业技术人员进行了现场演示，活动后该校教务处随机抽取了部分学生进行调查：“你最感兴趣的一种职业技能是什么？”并对此进行了统计，绘制了统计图（均不完整）。



请解答以下问题：

- (1) 补全条形统计图和扇形统计图；
- (2) 若该校共有 1800 名学生，请估计该校对“工业设计”最感兴趣的学生有多少人？
- (3) 要从这些被调查的学生中，随机抽取一人进行访谈，那么正好抽到对“机电维修”最感兴趣的学生的概率是_____。

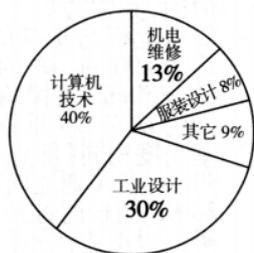
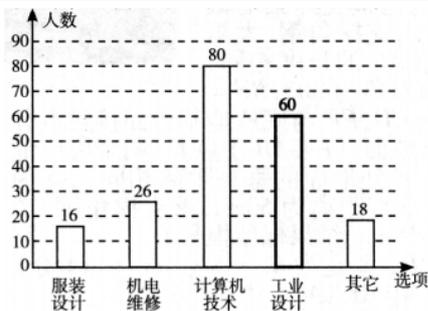
【答案】 (1) 工业设计 60 人；机电维修 13%；工业设计 30%

(2) 540 人 (3) 0.13 (或 13% 或 $\frac{13}{100}$)

【考点】 条形统计图；扇形统计图；用样本估算总体；概率

【解析】

(1) 如图所示： $\dots\dots\dots (4 \text{ 分})$



(2) 解: $1800 \times 30\% = 540$ (人)

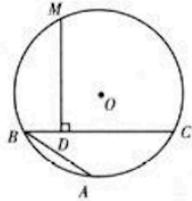
∴ 估计该校对“工业设计”最感兴趣的学生人数为 540 人. (6分)

(3) 正好抽到对“机电维修”最感兴趣的学生的概率是 0.13 (或 13% 或 $\frac{13}{100}$) (8分)

19. (本题 7 分) 请阅读下列材料, 并完成相应的任务:



阿基米德折弦定理
阿基米德 (Archimedes, 公元前 287 ~ 公元前 212 年, 古希腊) 是有史以来最伟大的数学家之一. 他与牛顿、高斯并称为三大数学王子.
阿拉伯 Al-Biruni (973 年 ~ 1050 年) 的译文中保存了阿基米德折弦定理的内容, 苏联在 1964 年根据 Al-Biruni 译本出版了俄文版《阿基米德全集》, 第一题就是阿基米德折弦定理.

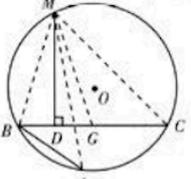


(图 1)

阿基米德折弦定理: 如图 1, AB 和 BC 是 $\odot O$ 的两条弦 (即折线 ABC 是圆的一条折弦), $BC > AB$, M 是 \widehat{ABC} 的中点, 则从 M 向 BC 所作垂线的垂足 D 是折弦 ABC 的中点, 即 $CD = AB + BD$.

下面是运用“截长法”证明 $CD = AB + BD$ 的部分证明过程.
证明: 如图 2, 在 CB 上截取 $CG = AB$, 连接 MA, MB, MC 和 MG.

∵ M 是 \widehat{ABC} 的中点,
∴ $MA = MC$.



(图 2)

任务: (1) 请按照上面的证明思路, 写出该证明的剩余部分;

(2) 填空: 如图 3, 已知等边 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $AB = 2$, D 为 \widehat{AC} 上一点, $\angle ABD = 45^\circ$, $AE \perp BD$ 于点 E, 则 $\triangle BDC$ 的周长是 _____

【答案】(1) 见解析

(2) $2 + 2\sqrt{2}$

【考点】圆的相关证明;

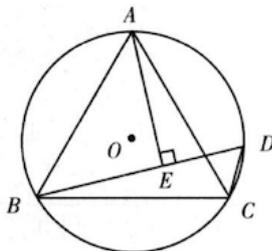
【解析】: (1) 证明: 又 $\because \angle A = \angle C$, (1分)

$\therefore \triangle MBA \cong \triangle MGC$, (2分)

$\therefore MB = MG$, (3分)

又 $\because MD \perp BC, \therefore BD = GD$, (4分)

$\therefore CD = CG + GD = AB + BD$, (5分)



(图3)

(2) $\because \triangle ABC$ 是等边三角形, $AB=2$,

又 $\because \angle ABC=90^\circ$, $AE \perp BD$,

$$\therefore BE = \sqrt{2},$$

又 $\because A$ 为 \widehat{BDC} 中点,

\therefore 根据阿基米德折弦定理, $BE=ED+DC=\sqrt{2}$

$\therefore \triangle BCD$ 的周长为 $BC+BE+ED+DC=2+2\sqrt{2}$ (7分)

20. (本题 7 分) 我省某苹果基地销售优质苹果, 该基地对需要送货且购买量在 2000kg~5000kg (含 2000kg 和 5000kg) 的客户有两种销售方案 (客户智能选择其中一种方案):

方案 A: 每千克 5.8 元, 由基地免费送货。

方案 B: 每千克 5 元, 客户需支付运费 2000 元。

(1) 请分别写出按方案 A, 方案 B 购买这种苹果的应付款 y (元) 与购买量 x (kg) 之间的函数表达式;

(2) 求购买量 x 在什么范围时, 选用方案 A 比方案 B 付款少;

(3) 某水果批发商计划用 20000 元, 选用这两种方案中的一种, 购买尽可能多的这种苹果, 请直接写出他应选择哪种方案。



(第 20 题图)

【答案】(1) 方案 A: 函数表达式为 $y=5.8x$, 方案 B: 函数表达式为 $y=5x+2000$

(2) $2000 \leq x \leq 2500$

(3) B

【考点】一次函数与不等式的联系

【解析】(1) 方案 A: 函数表达式为 $y=5.8x$, (1 分)

方案 B: 函数表达式为 $y=5x+2000$, (2 分)

(2) 由题意, 得 $5.8x < 5x+2000$, (3 分)

解不等式, 得 $x < 2500$, (4 分)

\therefore 当购买量 x 的取值范围为 $2000 \leq x \leq 2500$ 时, 选用方案 A 比方案 B 付款少, (5 分)

(3) 方案 A: $5.8x = 20000$

解得: $x \approx 3448.3\text{kg}$,

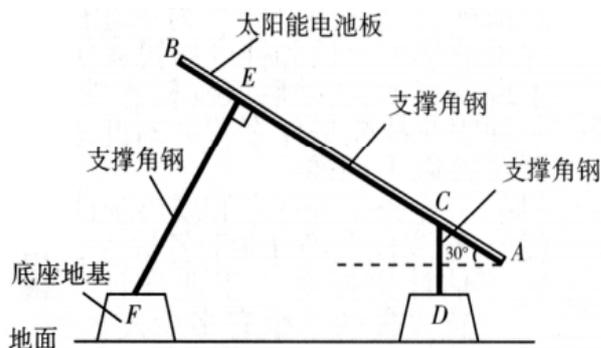
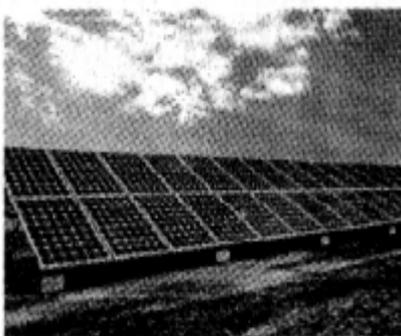
方案 B: $5x+2000=20000$

解得: $x=3600\text{kg}$

$\therefore 3600 > 3448.3$

他应选择方案 B, (7 分)

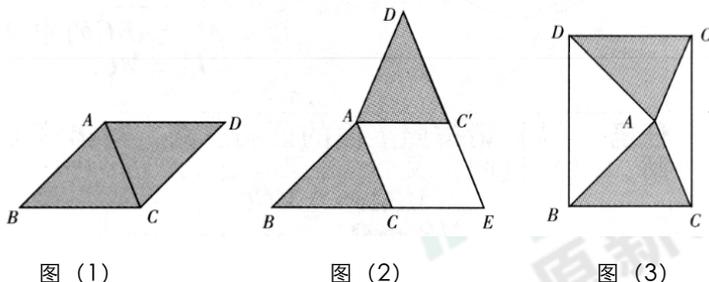
21. (本题 10 分) 太阳能光伏发电因其清洁、安全、便利、高效等特点, 已成为世界各国普遍关注和重点发展的新兴产业, 如图是太阳能电池板支撑架的截面图, 其中的粗线表示支撑角钢, 太阳能电池板与支撑角钢 AB 的长度相同, 均为 300cm, AB 的倾斜角为 30° , $BE=CA=50\text{cm}$, 支撑角钢 CD, EF 与底座地基台面接触点分别为 D, F, CD 垂直于地面, $FE \perp AB$ 于点 E. 两个底座地基高度相同 (即点 D, F 到地面的垂直距离相同), 均为 30cm, 点 A 到地面的垂直距离为 50cm, 求支撑角钢 CD 和 EF 的长度各位多少 cm (结果保留根号).



(第 21 题)

【答案】 $CD=45\text{cm}$, $EF=\frac{290\sqrt{3}}{3}$

(2) 创新小组将图 1 中的 $\triangle ACD$ 以 A 为旋转中心，按逆时针方向旋转角 α ，使 $\alpha = 2\angle BAC$ ，得到如图 3 所示的 $\triangle AC'D$ ，连接 DB， $C'C$ ，得到四边形 $BCC'D$ ，发现它是矩形。请你证明这个结论；



实践探究

(3) 缜密小组在创新小组发现结论的基础上，量的图 3 中 $BC=13\text{cm}$ ， $AC=10\text{cm}$ ，然后提出一个问题：将 $\triangle AC'D$ 沿着射线 DB 方向平移 $a\text{cm}$ ，得到 $\triangle A'C'D'$ ，连接 BD' ， CC' ，使四边形 $BCC'D'$ 恰好为正方形，求 a 的值。请你解答此问题；

(4) 请你参照以上操作，将图 1 中的 $\triangle ACD$ 在同一平面内进行一次平移，得到 $\triangle A'C'D$ ，画出平移后构造出的新图形，标明字母，说明平移及构图方法，写出你发现的结论，不必证明。

【答案】(1) 菱形；(2) 见解析；(3) $\frac{71}{13}$ 或 $\frac{409}{13}$ (4) 答案不唯一，见解析

【考点】图形的平移与旋转，菱形，矩形的性质及判定

【解析】菱形..... (2分)

(1) \because 四边形 ABCD 是菱形

$\therefore \angle ACB = \angle CAD = \angle CAB$

则旋转过后， $\angle DC'A = \angle ACB$

又 \because 旋转角 $\alpha = \angle BAC$ ，

$\therefore \angle DC'A = \alpha$ ， $\angle ACB = \alpha$

$\therefore AC' \parallel CE$ ； $AC \parallel C'E$

\therefore 四边形 $ACEC'$ 是平行四边形

又 $AC = AC'$

\therefore 平行四边形 $ACEC'$ 是菱形

(2) 证明：作 $AE \perp CC'$ 于点 E..... (3分)

由旋转得 $AC' = AC$, $\therefore \angle CAE = \angle C'AE = \frac{1}{2}\alpha = \angle BAC$

\because 四边形 ABCD 是菱形, $\therefore BA = BC$

$\therefore \angle BCA = \angle BAC$

$\therefore \angle CAE = \angle BCA$, $\therefore AE \parallel BC$

同理 $AE \parallel DC'$

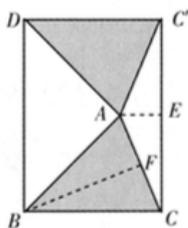
$\therefore BC \parallel DC'$

又 $\because BC = DC'$, \therefore 四边形 $BCC'D$ 是平行四边形..... (4分)

又 $\because AE \parallel BC$, $\angle CEA = 90^\circ$, $\angle BCC' = 180^\circ - \angle CEA = 90^\circ$

\therefore 四边形 $BCC'D$ 是矩形..... (5分)

(3) 过点 B 作 $BF \perp AC$, 垂足为 F



$\because BA = BC$, $\therefore CF = AF = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 10 = 5$

在 $Rt\triangle BCF$ 中, $BF = \sqrt{BC^2 - CF^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

在 $\triangle ACE$ 和 $\triangle CBF$ 中, $\because \angle CAE = \angle BCF$, $\angle CEA = \angle BFC = 90^\circ$,

$\therefore \triangle ACE \sim \triangle CBF$, $\therefore \frac{CE}{BF} = \frac{AC}{BC}$ 即 $\frac{CE}{12} = \frac{10}{13}$

解得 $CE = \frac{120}{13}$

$\because AC = AC'$, $AE \perp CC'$, $\therefore CC' = 2CE = 2 \times \frac{120}{13} = \frac{240}{13}$(7分)

当四边形 $BCC'D$ 恰好为正方形时, 分两种情况:

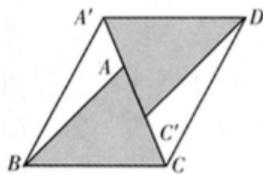
① 点 C' 在边 CC' 上, $a = c'c - 13 = \frac{240}{13} - 13 = \frac{71}{13}$ (8分)

② 点 C' 在边 CC 的延长线上, $a = c'c + 13 = \frac{240}{13} + 13 = \frac{409}{13}$ (9分)

综上所述, α 的值为 $\frac{71}{13}$ 或 $\frac{409}{13}$

(3) 答案不唯一

例: 画出正确图形, 如图:(10分)



平移及构图方法: 将 $\triangle ACD$ 沿着射线 CA 的方向平移, 平移距离为 $\frac{1}{2} AC$ 的长度, 得到 $\triangle A' C' D$,

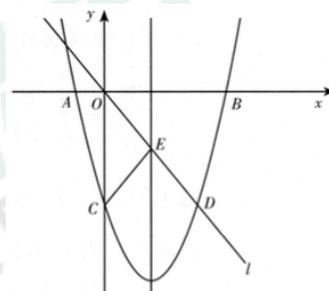
连接 $A' B, DC$(11分)

结论: 四边形 $A' BCD$ 是平行四边形.....(12分)

23. (本题 14 分) 综合与探究

如图, 在平面直角坐标系中, 已知抛物线 $y = ax^2 + bx - 8$ 与 x 轴交于 A, B 两点, 与 y 轴交于点 C , 直线 l 经过坐标原点 O , 与抛物线的一个交点为 D , 与抛物线的对称轴交于点 E , 连接 CE , 已知点 A, D 的坐标分别为 $(-2, 0), (6, -8)$.

- (1) 求抛物线的函数表达式, 并分别求出点 B 和点 E 的坐标;
- (2) 试探究抛物线上是否存在点 F , 使 $\triangle FOE \cong \triangle FCE$, 若存在, 请直接写出点 F 的坐标; 若不存在, 请说明理由;
- (3) 若点 P 是 y 轴负半轴上一个动点, 设其坐标为 $(0, m)$, 直线 PB 与直线 l 交于点 Q . 试探究: 当 m 为何值时, $\triangle OPQ$ 是等腰三角形.



(第 23 题)

【答案】(1) $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 8$; B (8, 0); E (3, -4)

(2) 存在; 点 F 坐标为 $(3 - \sqrt{17}, -4)$ 或 $(3 + \sqrt{17}, -4)$

(3) m 的值为 $-\frac{8}{3}$ 或 $-\frac{32}{3}$ 时, $\triangle OPQ$ 为等腰三角形.

【考点】抛物线解析式; 点的坐标; 与三角形综合.

【解析】(1) \because 抛物线 $y = ax^2 + bx - 8$ 经过点 A (-2, 0), D (6, -8).

$$\therefore \begin{cases} 4a - 2b - 8 = 0 \\ 36a + 6b - 8 = -8 \end{cases} \text{ 解得 } \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = -3 \end{cases} \dots\dots\dots (1 \text{ 分})$$

\therefore 抛物线的函数表达式为 $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 8 \dots\dots\dots (2 \text{ 分})$

$\therefore y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 8 = \frac{1}{2}(x-3)^2 - \frac{25}{2} \therefore$ 抛物线的对称轴为 $x = 3$.

又 \because 抛物线与 x 轴交于 A, B 两点, 点 A 的坐标为 (-2, 0).

\therefore 点 B 的坐标为 (8, 0). $\dots\dots\dots (4 \text{ 分})$

设直线 l 的函数表达式为 $y = kx$.

\because 点 D (6, -8) 在直线 l 上, $\therefore 6k = -8, \therefore k = -\frac{4}{3}$.

\therefore 直线 l 的函数表达式为 $y = -\frac{4}{3}x \dots\dots\dots (5 \text{ 分})$

\therefore 点 E 为直线 l 和抛物线对称轴的交点.

\therefore 点 E 的横坐标为 3, 纵坐标为 $-\frac{4}{3} \times 3 = -4$.

即点 E 的坐标为 (3, -4) $\dots\dots\dots (6 \text{ 分})$

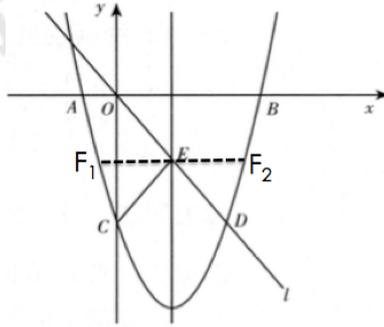
(2) \because O (0, 0), E (3, -4), C (0, -8)

$\therefore OE = CE = 5, \therefore$ 当 EF 为 OC 垂直平分线时, $\triangle FOE \cong \triangle FCE$,

此时 $OE = CE, OF = CF, EF = EF$ (公共边) (SSS) \therefore 点 F 与点 E 的纵坐标相同.

$$\therefore \frac{1}{2}x^2 - 3x - 8 = -4, \text{ 解得 } x_1 = 3 - \sqrt{17}, x_2 = 3 + \sqrt{17}$$

\therefore 点 F 坐标为 $(3 - \sqrt{17}, -4)$ 或 $(3 + \sqrt{17}, -4)$ (8分)



(3) 解法一: 分两种情况: ①当 $OP=OQ$ 时, $\triangle OPQ$ 是等腰三角形.

\therefore 点 E 的坐标为 $(3, -4)$, $\therefore OE = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

过点 E 作直线 $ME \parallel PB$, 交 y 轴于点 M, 交 x 轴于点 H.

则 $\frac{OM}{OP} = \frac{OE}{OQ} \therefore OM = OE = 5$ (9分)

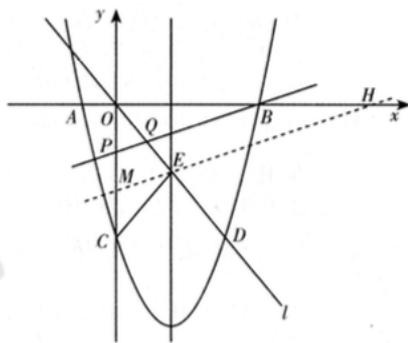
\therefore 点 M 的坐标为 $(0, -5)$.

设直线 ME 的函数表达式为 $y = k_1x - 5$. $\therefore 3k_1 - 5 = -4$, 解得 $k_1 = \frac{1}{3}$.

\therefore ME 的函数表达式为 $y = \frac{1}{3}x - 5$. 令 $y = 0$, 得 $\frac{1}{3}x - 5 = 0$, 解得 $x = 15$.

\therefore 点 H 的坐标为 $(15, 0)$ (10分)

又 $\because MH \parallel PB$, $\therefore \frac{OP}{OM} = \frac{OB}{OH}$, 即 $\frac{-m}{5} = \frac{8}{15} \therefore m = -\frac{8}{3}$ (11分)



②当 $QO=QP$ 时, $\triangle OPQ$ 是等腰三角形.

$\because x=0$ 时, $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 8 = -8 \therefore$ 点 C 的坐标为 $(0, -8)$.

$\therefore CE = \sqrt{3^2 + (8-4)^2} = 5 \therefore OE=CE.$

$\therefore \angle 1 = \angle 2.$ 又 $\because QO=QP, \therefore \angle 1 = \angle 3.$

$\therefore \angle 2 = \angle 3. \therefore CE \parallel PB. \dots\dots (12 \text{分})$

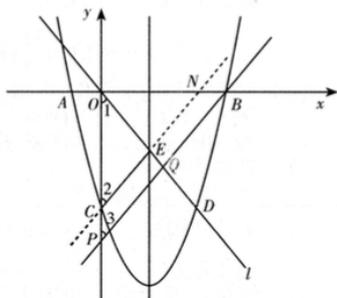
设直线 CE 交 x 轴于点 N , 其函数表达式为 $y = k_2x - 8.$

$\therefore 3k_2 - 8 = -4.$ 解得 $k_2 = \frac{4}{3}. \therefore CE$ 的函数表达式为 $y = \frac{4}{3}x - 8.$

令 $y=0$, 得 $\frac{4}{3}x - 8 = 0$, 解得 $x=6.$

\therefore 点 N 的坐标为 $(6, 0) \dots\dots (13 \text{分})$

又 $\because CN \parallel PB, \therefore \frac{OP}{OC} = \frac{OB}{ON}, \therefore \frac{-m}{8} = \frac{8}{6} \therefore m = -\frac{32}{3} \dots\dots (14 \text{分})$



综上所述, 当 m 的值为 $-\frac{8}{3}$ 或 $-\frac{32}{3}$ 时, $\triangle OPQ$ 为等腰三角形.

解法二: 当 $x=0$ 时, $y = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 8 = -8$. \therefore 点 C 的坐标为 $(0, -8)$.

$$\therefore OE = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, CE = \sqrt{3^2 + (8-4)^2} = 5 \therefore OE = CE \therefore \angle 1 = \angle 2.$$

设抛物线的对称轴交直线 PB 于点 M, 与 x 轴交于点 H. 分两种情况:

① 当 $QO = QP$ 时, $\triangle OPQ$ 是等腰三角形.

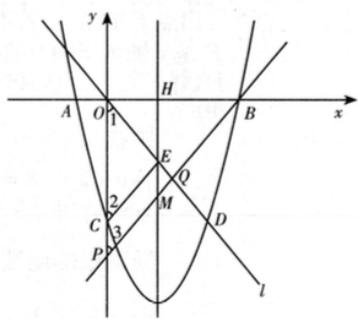
$$\therefore \angle 1 = \angle 3 \therefore \angle 2 = \angle 3 \therefore CE \parallel PB. \dots\dots (9 \text{ 分})$$

又 $\because HM \parallel y$ 轴, \therefore 四边形 PMEC 是平行四边形.

$$\therefore EM = CP = -8 - m. \therefore HM = HE + EM = 4 + (-8 - m) = -4 - m. BH = 8 - 3 = 5.$$

因为 $HM \parallel y$ 轴. 所以 $\triangle BHM \sim \triangle BOP$. $\therefore \frac{HM}{OP} = \frac{BH}{BO}$. $\dots\dots (10 \text{ 分})$

$$\therefore \frac{-4 - m}{-m} = \frac{5}{8} \therefore m = -\frac{32}{3} \dots\dots (11 \text{ 分})$$



② 当 $OP = OQ$ 时, $\triangle OPQ$ 是等腰三角形.

$$\because EH \parallel y \text{ 轴. } \triangle OPQ \sim \triangle EMQ. \therefore \frac{EQ}{OQ} = \frac{EM}{OP}.$$

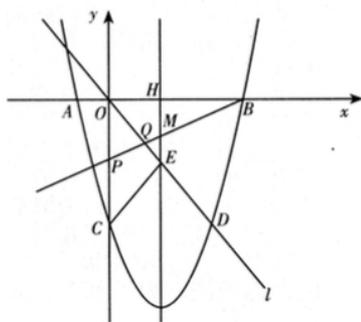
$$\therefore EQ = EM. \dots\dots (12 \text{ 分})$$

$$\therefore EM = EQ = OE - OQ = OE - OP = 5 - (-m) = 5 + m.$$

$$\therefore HM = 4 - (5 + m) = -1 - m$$

$\because EH \parallel y$ 轴, $\therefore \triangle BHM \sim \triangle BOP$. $\therefore \frac{HM}{OP} = \frac{BH}{BO}$ $\dots\dots (13 \text{ 分})$

$$\therefore \frac{-1 - m}{-m} = \frac{5}{8} \therefore m = -\frac{8}{3} \dots\dots (14 \text{ 分})$$



∴当 m 的值为 $-\frac{8}{3}$ 或 $-\frac{32}{3}$ 时， $\triangle OPQ$ 为等腰三角形。