

太原五中

2016~2017 学年度第一学期阶段性练习

高一数学 ▪ 试卷分析 (2016.09.14)

一、 选择题

1.已知全集 $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, 集合 $S = \{1,3,5\}$, $T = \{3,6\}$, 则 $C_U S \cap C_U T = (\quad)$.
 A. ϕ B. $\{2,4,7,8\}$ C. $\{1,3,5,6\}$ D. $\{2,4,6,8\}$

答案： B

考点： 集合的运算

解析： $C_U S = \{2,4,6,7,8\}$, $C_U T = \{1,2,4,5,7,8\}$, $C_U S \cap C_U T = \{2,4,7,8\}$

2.如果 $A = \{x | x > -1\}$, 则下列关系正确的是().
 A. $0 \subseteq A$ B. $\{0\} \in A$ C. $\phi \in A$ D. $\{0\} \subseteq A$

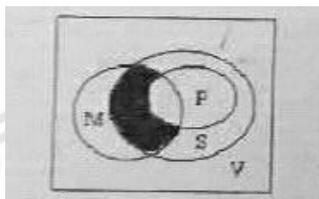
答案： D

考点： 元素与集合， 集合与集合间的关系

解析： 元素与集合间的关系用符号 \in, \notin 连接， 集合与集合间的关系用符号 $\subseteq, =, \subset$ 连接，

$0 \in A, \{0\} \subseteq A, \phi \subseteq (\subset) A$

3.如图所示， M, P, S 是 V 的三个子集， 则阴影部分所表示的集合是()
 A. $(M \cap P) \cap S$ B. $(M \cap P) \cup S$ C. $(M \cap S) \cap (C_S P)$ D. $(M \cap P) \cup (C_V S)$



答案： C

考点： 集合中的 Venn 图

解析： Venn 图中阴影部分不含有集合 P， 所以结果中不能与 P 相交， 故选 C

4.已知集合 $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{(x, y) | x \in A, y \in A, x - y \in A\}$, 则 B 中所含元素的个数为().
 A. 3 B. 6 C. 8 D. 10

答案： D

考点： 元素与集合的关系， 集合的表示方法

解析： B 中的元素可以为 $(2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (3,2), (4,2), (5,2), (4,3), (5,3), (5,4)$.

5. 设 \oplus 是 R 上的一个运算, A 是 R 上的非空子集, 若对任意的 $a, b \in A$, 有 $a \oplus b \in A$, 则称 A 对运算 \oplus 封闭, 下列数集对加法、减法、乘法和除法(除数不等于0)四则运算都封闭的是().

A. 自然数集 B. 整数集 C. 有理数集 D. 无理数集

答案: C

考点: 新定义集合

解析: 可以通过举反例找出答案, 取 $a=3, b=2$, 则 $a \div b = \frac{3}{2}$, A, B 均排除; 取

$a = \sqrt{12}, b = \sqrt{3}, \frac{a}{b} = 2$, 排除 D. 故选 C

6. 已知集合 $A = \left\{ x \mid \frac{x-a}{x+a} < 0 \right\}$, 若 $1 \notin A$, 则实数 a 的取值范围为().

A. $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ B. $[-1, 1]$ C. $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ D. $(-1, 1)$

答案: B

考点: 元素

解析: 因为 $1 \notin A$, 所以 $\frac{1-a}{1+a} \geq 0$, 或 $A = \varnothing (1+a=0)$, 可得 $a \in [-1, 1]$

7. 集合 $P = \{x \mid x = 2k, k \in Z\}$, $Q = \{x \mid x = 2k + 1, k \in Z\}$, $R = \{x \mid x = 4k + 1, k \in Z\}$, 且 $a \in P, b \in Q$, 则一定成立的是 _____

A. $a + b \in P$

B. $a + b \in Q$

C. $a + b \in R$

D. $a + b$ 不属于 P, Q, R 中的任意一个

答案: B

考点: 判断元素与集合的关系

解析: $\because P$ 表示偶数集, Q 表示奇数集

$R = \{\dots -5, 1, 5, 9, \dots\}$

\therefore 偶数加奇数得到奇数, 选 B

8. 设集合 $A = \{x \mid x^2 - 3|x| + 2 = 0\}$, $B = \{x \mid (a-2)x = 0\}$, 则满足

$B \subsetneq A$ 的 a 的值共有 _____ 个

答案: D

考点: 已知集合间关系求参

解析: 解A集合: $(|x|^2 - 3|x| + 2 = 0, \text{即} (|x| - 1)(|x| - 2) = 0,$
 解得 $x = \pm 1, x = \pm 2,$ 所以 $A = \{-2, -1, 1, 2\},$ 又因为B是A的真子集,
 所以 $B = \varnothing, a = 2, B = \{-1\}, a = 0, B = \{-2\}$ 时, $a = 1, B = \{1\}$ 时,
 $a = 4, B = \{2\}$ 时, $a = 3,$ 共5个

二、填空题

9. 函数 $y = \frac{\sqrt{2-x}}{2x^2 - 3x - 2}$ 的定义域为 _____

答案: $(-\infty, \frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 2)$

考点: 基本初等函数定义域

解析: $\begin{cases} 2-x \geq 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 \neq 0 \end{cases}$, 解得 $x \leq 2$ 且 $x \neq -\frac{1}{2}$

10. 设集合 $A = \{x | x = a^2 + 13, a \in N\}, B = \{y | y = b^2 + 20, b \in N\},$ 则 $A \cap B =$ _____

答案: $\{29\}$

考点: 集合运算

解析: 让 $a^2 + 13 = b^2 + 20$

解得 $a^2 - b^2 = 7$

$(a+b)(a-b) = 7$

因为 a, b 均为自然数, 所以 $\begin{cases} a+b=7 \\ a-b=1 \end{cases}$

解得 $a = 4, b = 3,$ 因此 $A \cap B = \{29\}$

11. 已知集合 $A = \{x | ax^2 + 2x + 1 = 0, x \in R\}$ 的子集只有两个, 则 a 的值为 _____

解析: 因为A的子集只有两个, 所以A中仅含有一个元素

当 $a = 0$ 时, $x = -\frac{1}{2}, A = \{-\frac{1}{2}\}$ 满足题意

当 $a \neq 0$ 时, $ax^2 + 2x + 1 = 0$ 为二次函数, 要使得A中有且仅有一个元素则 $\Delta = 4 - 4a = 0,$

所以 $a = 1, A = \{1\},$ 满足题意

故 $a = 0$ 或 $a = 1$

12. 设集合 $M = \left\{ (x, y) \mid x = (y+3) \cdot |y-1| + y+3, -\frac{5}{2} \leq y \leq 3 \right\}$, 若 $(a, b) \in M$, 且对 M 中的其他元素 (c, d) , 总有 $c \geq a$, 则 $a =$ _____

解析：由已知得，原题等价于求 M 所表示的集合中 x 元素的最小值

$$\text{当 } -\frac{5}{2} \leq x \leq 1 \text{ 时, } x = -(y + \frac{1}{2})^2 + \frac{25}{4}, \text{ 当 } y = -\frac{5}{2} \text{ 时, } x_{\min} = \frac{9}{4}$$

$$\text{当 } 1 \leq x \leq 3 \text{ 时, } x = (y + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4}, \text{ 当 } y = 1 \text{ 时, } x_{\min} = 4$$

三、解答题

13. 若集合 $S = \{3, a^2\}$, $T = \{x \mid 0 < x + a < 3, x \in \mathbb{Z}\}$, 且 $S \cap T = \{1\}$, $P = S \cup T$, 求集合 P 的所有子集.

解析：由已知得， S 、 T 中含有元素 1，所以 $a^2 = 1, \therefore a = \pm 1$

当 $a = 1$ 时， $T = \{0, 1\}$ 满足题意，故 $P = \{0, 1, 3\}$

所以 T 的所有子集为 $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 3\}, \{1, 3\}, \{0, 1, 3\}$

当 $a = -1$ 时， $T = \{2, 3\}$ 不满足题意

故 P 的所有子集为 $\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{3\}, \{0, 1\}, \{0, 3\}, \{1, 3\}, \{0, 1, 3\}$

14. 集合 $A = \{x \mid 2a \leq x \leq a^2 + 1\}$, $B = \{x \mid (x-2)[x-(3a+1)] \leq 0\}$ 其中 $a \in \mathbb{R}$, 求使 $A \subseteq (A \cap B)$ 的 a 的取值范围.

解析：

$$\because A \subseteq (A \cap B) \quad \therefore A \subseteq B$$

对于 $A, a^2 + 1 \geq 2a$ 恒成立, $\therefore A \neq \varnothing$

(1) 当 $2 > 3a + 1$ 即 $a < \frac{1}{3}$ 时,

$$B = \{x \mid 3a + 1 \leq x \leq 2\}$$

$$\text{则} \begin{cases} 3a + 1 \leq 2a \\ a^2 + 1 \leq 3a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq -1 \\ -1 \leq a \leq 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

(2) 当 $2 = 3a + 1$ 即 $a = \frac{1}{3}$ 时,

$$B = \{2\} \quad \therefore A = \{2\}$$

$\therefore 2a = a^2 + 1 = 2 \Rightarrow a = 1$ 矛盾, (舍)

(3) $2 < 3a + 1$ 即 $a > \frac{1}{3}$ 时,

$$B = \{x \mid 2 \leq x \leq 3a + 1\}$$

$$\text{则} \begin{cases} 2 \leq 2a \\ a^2 + 1 \leq 3a + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \geq 1 \\ 0 \leq a \leq 3 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq a \leq 3$$

综上所述: $1 \leq a \leq 3$ 或 $a = -1$

15. 设集合 $A = \{x \mid x = f(x), x \in R\}, B = \{x \mid x = f[f(x)], x \in R\}$

(1) 证明: $A \subseteq B$;

(2) 设函数 $f(x) = x^2 + ax + b$ ($a, b \in R$), 且 $A = \{-1, 3\}$ 时, 求 B ;

(3) 若 $f(x) = ax^2 - 1$ ($a \in R$), 且 $A = B \neq \varnothing$, 求实数 a 的取值范围.

解析:

(1) 若 $A = \varnothing$, 则 $A \subseteq B$ 成立;

若 $A \neq \varnothing$, 设 $t \in A$, 则 $f(t) = t, f(f(t)) = f(t) = t$,

$\therefore t \in B$, 故 $A \subseteq B$.

(2) $\because A = \{-1, 3\}$, 将 $x = x^2 + ax + b$ 中, 得

$$\begin{cases} a-1 = -2 \\ b = -3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ a = -1 \end{cases} \therefore f(x) = x^2 - x - 3$$

$$\therefore f(f(x)) = (x^2 - x - 3)^2 - (x^2 - x - 3) - 3 = x$$

$$\text{即 } (x^2 - x - 3)^2 = x^2$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 3 = x \text{ 或 } x^2 - x - 3 = -x$$

$$\Rightarrow x = -1, 3 \text{ 或 } x = \pm\sqrt{3}$$

$$\therefore B = \{-1, 3, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$$

(3) $\because A \neq \emptyset, \therefore ax^2 - 1 = x$ 有实根,

$$\therefore a \geq -\frac{1}{4}. \text{ 又 } \because A \subseteq B, \text{ 所以 } a(ax^2 - 1)^2 - 1 = x$$

$$\text{即 } a^2x^4 - 2a^2x^2 - x + a - 1 = 0 \Rightarrow (ax^2 - x - 1)(a^2x^2 + ax - a + 1) = 0$$

$$\because A = B,$$

$\therefore a^2x^2 + ax - a + 1 = 0$ 要么没有实根, 要么实根是方程 $ax^2 - x - 1 = 0$

的根. 若没有实根, 则 $a < \frac{3}{4}$; 若有实根, 则由方程 $ax^2 - x - 1 = 0$ 得

$$a^2x^2 = ax + a \text{ 代入 } a^2x^2 + ax - a + 1 = 0 \Rightarrow 2ax + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{2a}, \text{ 再代入得 } \frac{1}{4a} + \frac{1}{2a} - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{3}{4},$$

$$\therefore a \in \left[-\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$$