

山西大学附中

2016~2017 学年高三第一学期 9 月 (总第二次) 模块诊断

数学 · 试卷分析

一、 选择题

1. 已知集合 $A = \{x | x^2 - 1 \geq 0, x \in R\}$, $B = \{x | 0 \leq x < 3, x \in R\}$, 则 $A \cap B = (\quad)$.

A. $\{x | 1 < x < 3, x \in R\}$ B. $\{x | 1 \leq x \leq 3, x \in R\}$ C. $\{x | 1 \leq x < 3, x \in R\}$ D. $\{x | 0 < x < 3, x \in R\}$

答案: C

考点: 集合的运算

解析: $A = \{x | x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1\}$, 故 $A \cap B = \{x | 1 \leq x < 3, x \in R\}$

2. 已知 θ 的终边过点 (2, 3), 则 $\tan\left(\frac{7\pi}{4} + \theta\right)$ 等于 ().

A. $-\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{5}$ C. -5 D. 5

答案: B

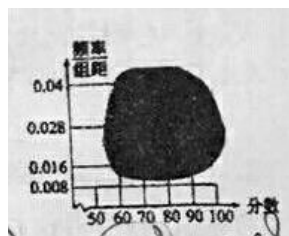
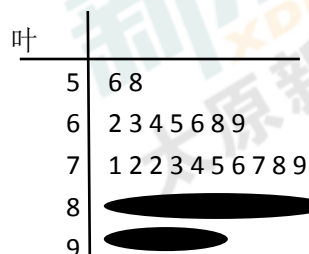
考点: 三角函数

解析:

由题意可知: $\tan \theta = \frac{3}{2}$, $\tan\left(\frac{7\pi}{4} + \theta\right) = \tan\left(-\frac{\pi}{4} + \theta\right) = \frac{\tan \theta - \tan \frac{\pi}{4}}{1 + \tan \theta \cdot \tan \frac{\pi}{4}} = \frac{\frac{3}{2} - 1}{1 + \frac{3}{2}} = \frac{1}{5}$

3. 某高二 (1) 班一次阶段考试数学成绩的茎叶图和频率分布直方图可见部分如图, 根据图中的信息, 可确定被抽测的人数及分数在 [90, 100] 内的人数分别为 ()

A. 20, 2 B. 24, 4 C. 25, 2 D. 25, 4



答案: C

考点: 概率与统计

解析: 由频率分布直方图可知, 分数在 [50, 60] 之间的人数和概率 ($0.008 \times 10 = 0.08$) 与 [90, 100] 的一样, 又由茎叶图可知, 分数在 [50, 60] 之间的人数为 2 人, 所以 [90, 100] 人数为 2 人, 总人数 = $2 \div 0.08 = 25$ 人。

4.已知 i 是虚数单位，若复数 $Z = \frac{2+ai}{2+i}$ 在复平面内对应的点在第四象限，

则实数 a 的值可以是().

A. -2 B. 1 C. 2 D. 3

答案：A

考点：复数的概念及运算

解

析

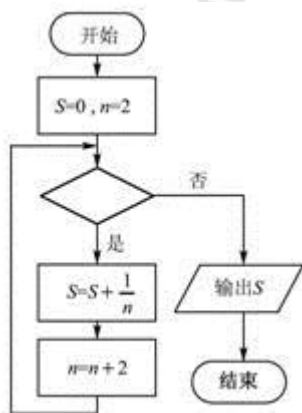
$Z = \frac{2+ai}{2+i} = \frac{(2+ai)(2-i)}{(2+i)(2-i)} = \frac{(4+a)+2(a-1)i}{5}$, 由于在第四象限, 所以
$$\begin{cases} \frac{4+a}{5} > 0 \\ \frac{2}{5}(a-1) < 0 \end{cases}$$

 $\Rightarrow -4 < a < 1$, 答案中只有A符合。

5.阅读如图所示的程序框图，运行相应的程序，若输出的 S 为 $\frac{11}{12}$ ，

则判断框中填写的内容可以是 ()

A. $n=6$ B. $n < 6$ C. $n \leq 6$ D. $n \leq 8$



答案：C

考点：程序框图

$$s=0, n=2, \text{满足条件}, s=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}, n=2+2=4$$

$$n=4, \text{满足条件}, s=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}, n=4+2=6$$

$$\text{解析: } n=6, \text{满足条件}, s=\frac{3}{4}+\frac{1}{6}=\frac{11}{12}, n=6+2=8$$

$n=8$, 不满足条件, 输出结果。

故 $n \leq 6$

$$6. a=2^{\frac{4}{3}}, b=4^{\frac{2}{5}}, c=25^{\frac{1}{3}}, \text{则} ()$$

$$A. b < a < c \quad B. a < b < c \quad C. b < c < a \quad D. c < a < b$$

答案: A

考点: 指数函数

$$\text{解析: } a=2^{\frac{4}{3}}=4^{\frac{2}{3}}, b=4^{\frac{2}{5}}, b < a; c=25^{\frac{1}{3}}=5^{\frac{2}{3}}, a < c. \text{故 } b < a < c$$

7.(文科)要得到 $g(x)=\log_2 2x$ 的图象, 只需将函数 $f(x)=\log_2 x$ 的图象 ()

A. 向左平移1个单位 B. 向右平移1个单位 C. 向上平移1个单位 D. 向下平移1个单位

答案: C

考点: 函数图像变换

$$\text{解析: } g(x)=\log_2 2x=\log_2 x+\log_2 2=\log_2 x+1$$

将 $f(x)$ 函数图像向上平移一个单位

7.(理科) $(x-2y)^6$ 的展开式中, x^4y^2 的系数为 ()

A. 15 B. -15 C. 60 D. -60

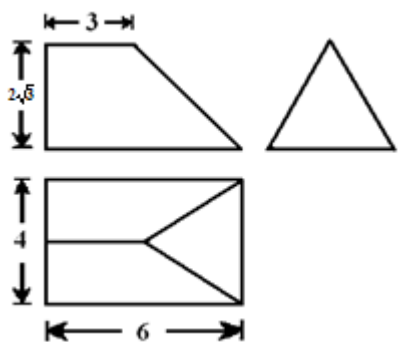
答案: C

考点: 二项式

$$\text{解析: } \text{二项式展开第三项为 } C_6^2 x^4 (-2y)^2, x^4 y^2 \text{ 系数为 } 4C_6^2 = 60$$

8. 已知某几何体的三视图的侧视图是一个正三角形, 如图所示, 则该几何体的体积等于 ()

- A. $12\sqrt{3}$ B. $16\sqrt{3}$ C. $20\sqrt{3}$ D. $32\sqrt{3}$



答案: C

考点: 立体几何三视图

该几何体可看成一个三棱柱和一个四棱锥组成,

解析: $V_{\text{三棱柱}} = S \cdot h = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{3} \times 4 \times 3 = 12\sqrt{3}$,

$V_{\text{四棱锥}} = \frac{1}{3} \cdot S \cdot h = \frac{1}{3} \times 3 \times 4 \times 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}$, $V = 12\sqrt{3} + 8\sqrt{3} = 20\sqrt{3}$.

9. 下列函数中, 与函数 $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{3}$ 的奇偶性、单调性相同的是 _____

A. $y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

B. $y = x^2$

C. $y = \tan x$

D. $y = e^x$

答案: A

考点: 函数单调性与奇偶性

解析: 因为 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{3}$ 是奇函数、增函数

$y = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ 由 $y = \ln u$ 与 $u = x + \sqrt{1+x^2}$ 复合而成, 两个函数都是增函数,

又因为 $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \ln(\sqrt{1+x^2} - x) = 0$
所以说明该函数为奇函数, 因此选A

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且 $a_1 = -20$ ，在区间 $(3, 5)$ 内任取一个实数作为数列 $\{a_n\}$ 的公差，则 S_n 的最小值仅为 S_6 的概率为_____

- A. $\frac{1}{5}$ B. $\frac{1}{6}$ C. $\frac{3}{14}$ D. $\frac{1}{3}$

答案:D

考点：数列通项公式、几何概型

解析： $\because a_n = a_1 + (n-1)d, a_n = -20 + (n-1)d$

又由 S_n 的最小值仅为 S_6 可得 $\begin{cases} a_6 \leq 0 \\ a_7 > 0 \end{cases}$, 解得 $\frac{10}{3} < d \leq 4$,

区间长度为 $4 - \frac{10}{3} = \frac{2}{3}$, 又 $\because (3, 5)$ 的区间长度为 2, $\therefore \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$

11. 双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 , 过 F_2 的直线与双曲线的右支交于 A、B 两点，若 $\triangle F_1AB$ 是以 A 为直角顶点的等腰直角三角形，则 $e^2 =$ _____

- A. $1 + 2\sqrt{2}$
B. $4 - 2\sqrt{2}$
C. $5 - 2\sqrt{2}$
D. $3 + 2\sqrt{2}$

答案：C

考点：双曲线第二定义、勾股定理、离心率

解析: 设 $|AF_1| = |AB| = m$, 则 $|BF_1| = \sqrt{2}m$, $|AF_2| = m - 2a$,

$|BF_2| = \sqrt{2}m - 2a$, $\therefore |AB| = |AF_2| + |BF_2| = m$,

$\therefore m - 2a + \sqrt{2}m - 2a = m$,

$\therefore 4a = \sqrt{2}m$, $\therefore |AF_2| = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})m$,

$\therefore \triangle AF_1F_2$ 为 Rt 三角形, $\therefore |F_1F_2|^2 = |AF_1|^2 + |AF_2|^2$

$\therefore 4c^2 = (\frac{5\sqrt{2}}{2})m^2$

$\therefore 4a = \sqrt{2}m$

$\therefore 4c^2 = (\frac{5}{2} - \sqrt{2}) \cdot 8a^2$

$\therefore e^2 = 5 - 2\sqrt{2}$

故选 D

12. 设函数 $f(x) = e^x(2x-1) - ax + a$, 其中 $a < 1$, 若存在唯一的整数 t , 使得 $f(t) < 0$, 则 a 的取值范围是 _____

A. $[-\frac{3}{2e}, 1)$

B. $[-\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$

C. $[\frac{3}{2e}, \frac{3}{4})$

D. $[\frac{3}{2e}, 1)$

答案: D

考点: 导数运算、函数图像

解析: 设 $g(x) = e^x(2x-1)$, $y = ax - a$

由题意知存在唯一的整数 x_0 使得 $g(x_0)$ 在直线 $y = ax - a$ 的下方, $\therefore g'(x) = e^x(2x-1) + 2e^x$

$= e^x(2x+1)$, $\therefore$ 当 $x < -\frac{1}{2}$, $g'(x) < 0$, 当 $x > -\frac{1}{2}$, $g'(x) > 0$, 当 $x = -\frac{1}{2}$ 时, $g(x)$ 取最小值

$-2e - \frac{1}{2}$, 当 $x = 0$ 时, $g(0) = -1$, 当 $x = 1$ 时, $g(1) = e > 0$, 直线 $y = ax - a$ 恒过定点 $(1, 0)$

且斜率为 a , 故 $-a > g(0) = -1$, 且 $g(-1) = -3e^{-1} \geq -a - a$, 解得 $\frac{3}{2e} \leq a < 1$

二、填空题

13.(文科)与直线 $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$ 垂直的直线的倾斜角为_____。

(理科)曲线 $y = 2\sin x (0 \leq x \leq \pi)$ 与直线 $y = 1$ 围成的封闭图形的面积为_____。

答案: (文科) $\frac{\pi}{3}$

(理科) $2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$

考点: (文科)平面内两条直线的位置关系;斜率的定义

(理科)定积分

解析: (文科) 直线 $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$ (的斜率为 $-\frac{1}{\sqrt{3}}$, 则与直线 $x + \sqrt{3}y - 1 = 0$ (的斜率为

$$k = \tan \alpha = \sqrt{3}$$

则所求直线倾斜角为 $\alpha = \frac{\pi}{3}$

(理科) 令 $2\sin x = 1 (0 \leq x \leq \pi)$, 即 $\sin x = \frac{1}{2}$, 可得 $x = \frac{\pi}{6}$ 或 $\frac{5\pi}{6}$

因此, 围成的面积:

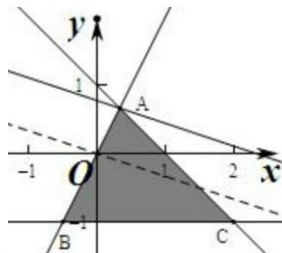
$$S = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} (2\sin x - 1) dx = (-2\cos x - x) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{5\pi}{6}} = \left(-2\cos \frac{5\pi}{6} - \frac{5\pi}{6}\right) - \left(-2\cos \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{6}\right) = 2\sqrt{3} - \frac{2\pi}{3}$$

14. 设 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} y \leq 2x \\ x + y \leq 1 \\ y + 1 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = x + 3y$ 的最大值是_____。

答案: $\frac{7}{3}$

考点: 线性规划

解析: 由 $z = x + 3y$ 得 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{z}{3}$, 作出不等式组对应的平面区域 (阴影部分).



平移直线 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{z}{3}$, 由图像可知当直线 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{z}{3}$ 经过点 $A\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 时,

直线 $y = -\frac{1}{3}x + \frac{z}{3}$ 的截距最大, 此时 Z 也最大, 此时 $z = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times 3 = \frac{7}{3}$

15. 已知 $x = 1, x = 3$ 是函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 两个相邻的两个极值点, 且 $f(x)$ 在 $x = \frac{3}{2}$

处的导数 $f'\left(\frac{3}{2}\right) < 0$, 则 $f\left(\frac{1}{3}\right) =$ _____。

答案: $\frac{1}{2}$

考点: 正弦函数的图像

解析: $\because x = 1, x = 3$ 是函数 $f(x) = \sin(\omega x + \varphi)$ ($\omega > 0$) 两个相邻的两个极值点

$$\therefore f(x) \text{ 的周期 } T = \frac{2\pi}{\omega} = 2 \times (3 - 1) = 4, \therefore \omega = \frac{\pi}{2}.$$

$$\because f'\left(\frac{3}{2}\right) < 0, \therefore f(x) \text{ 在 } [1, 3] \text{ 上是减函数,}$$

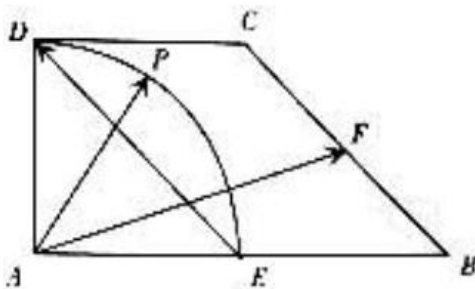
$$\therefore f(1) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = 1, \therefore \frac{\pi}{2} + \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \therefore \varphi = 2k\pi.$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6} + 2k\pi\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

16. 在直角梯形 $ABCD$, $AB \perp AD$, $DC \parallel AB$, $AD = DC = 1$, $AB = 2$, E, F 分别为 AB, AC 的中点, 点

P 在以 A 为圆心, AD 为半径的圆弧 DE 上变动 (如图所示). 若 $\overrightarrow{AP} = \lambda \overrightarrow{ED} + \mu \overrightarrow{AF}$, 其中

$\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, 则 $2\lambda - \mu$ 的取值范围是 _____。



答案: $[-1,1]$

考点：平面向量坐标运算与三角函数综合

解析：以 A 为原点， AB 所在直线为 x 轴建立平面直角坐标系，设 $\angle BAP = \theta$ ，则

$\overrightarrow{AP} = (\cos \theta, \sin \theta)$, $\overrightarrow{ED} = (-1, 1)$, $\overrightarrow{AF} = \left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 则由题意可得:

$$\begin{cases} \cos \theta = \lambda + \frac{3}{2}\mu \\ \sin \theta = \lambda + \frac{1}{2}\mu \end{cases}, \text{则 } 2\lambda - \mu = \sin \theta - \cos \theta = \sqrt{2} \sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right), \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\therefore -\frac{\pi}{4} \leq \theta - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}, \therefore -1 \leq 2\lambda - \mu \leq 1$$

三、解答题

17. (本小题满分 12 分) 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, $a_3 = \frac{3}{2}$, $S_3 = \frac{9}{2}$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $b_n = \log_2 \frac{6}{a_{2n+1}}$, 且 $\{b_n\}$ 为递增数列, 若 $c_n = \frac{1}{b_n \cdot b_{n+1}}$,

求证: $c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n < \frac{1}{4}$.

解析:(1)

$$\because a_3 = \frac{3}{2}, S_3 = \frac{9}{2},$$

$$\therefore \begin{cases} S_3 - a_3 = a_1 + a_2 = a_1(1+q) = 3 \\ a_3 = a_1 \cdot q = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q=1 \\ a_1 = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} q = -\frac{1}{2} \\ a_1 = 6 \end{cases}$$

$$\therefore a_n = \frac{3}{2} \text{ 或 } a_n = 6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2)

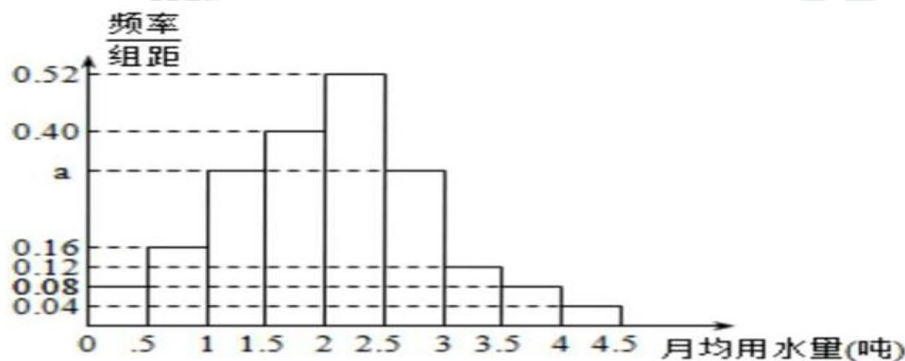
$$\text{由题意知 } b_n = \log_2 \frac{6}{a_{2n+1}} = \log_2 \frac{6}{6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{2n}} = \log_2 2^{2n} = 2n,$$

$$\therefore c_n = \frac{1}{b_n \cdot b_{n+1}} = \frac{1}{4n(n+1)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$\therefore c_1 + c_2 + c_3 + \dots + c_n = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4(n+1)} < \frac{1}{4}.$$

18. (文科) (本小题满分 12 分) 我国是世界上严重缺水的国家, 某市政府为了鼓励居民节约用水, 计划调整居民生活用水收费方案, 拟确定一个合理的月用水量标准 x (吨), 一位居民的月用水量不超过 x 的部分按平价收费, 超过 x 的部分按议价收费. 为了了解居民用水情况, 通过抽样, 获得了某年 100 位居民每人的月均用水量 (单位: 吨), 将数据按照 $[0, 0.5)$, $[0.5, 1)$, $\dots$, $[4, 4.5)$ 分成 9 组, 制成了如图所示的频率分布直方图.



(I) 求直方图中 a 的值；

(II) 设该市有 30 万居民，估计全市居民中月均用水量不低于 3 吨的人数，并说明理由；

(III) 若该市政府希望使 85% 的居民每月的用水量不超过标准 x (吨)，估计 x 的值，并说明理由.

(理科) (本小题满分 12 分) 在一次篮球定点投篮训练中，规定每人最多投 3 次，在 A 处每投进一球得 3 分；在 B 处每投进一球得 2 分，如果前两次得分之和超过 3 分就停止投篮；否则投第 3 次. 某同学在 A 处的投中率 $q_1 = 0.25$ ，在 B 处的投中率为 q_2 ，该同学选择现在 A 处投第一球，以后都在 B 处投，且每次投篮都互不影响，用 X 表示该同学投篮训练结束后所得的总分，其分布列为：

X	0	2	3	4	5
P	0.03	P_2	P_3	P_4	P_5

(I) 求 q_2 的值；

(II) 求随机变量 X 的数学期望 $E(X)$ ；

(III) 试比较该同学选择上述方式投篮得分超过 3 分与选择都在 B 处投篮得分超过 3 分的概率的大小.

解析：(文科) (I) $\because 0.5 \times (0.08 + 0.16 + 0.4 + 0.52 + 0.12 + 0.08 + 0.04 + 2a) = 1$ ，

$$\therefore a = 0.3$$

(II) 由图可得月均用水量不低于 3 吨的频率为：

$$0.5 \times (0.12 + 0.08 + 0.04) = 0.12, 30 \times 0.12 = 3.6$$

$\therefore$ 全市居民中月均用水量不低于 3 吨的人数约为 3.6 万；

(III) 由图可得月均用水量不低于 2.5 吨的频率为：

$$0.5 \times (0.08 + 0.16 + 0.3 + 0.4 + 0.52) = 0.73 < 85\% ;$$

月均用水量低于 3 吨的频率为：

$$0.5 \times (0.08 + 0.16 + 0.3 + 0.4 + 0.52 + 0.3) = 0.88 > 85\% ;$$

$$\text{则 } x = 2.5 + 0.5 \times \frac{0.85 - 0.73}{0.3 \times 0.5} = 2.9 \text{ 吨.}$$

解析:(理科)(I)由题意可知, $X=0$ 对应的事件为“三次投篮没有一次投中”

$$\therefore P(X=0) = (1-q_1)(1-q_2)^2 = 0.03,$$

$$\therefore q_1 = 0.25, \text{ 解得 } q_2 = 0.8.$$

(II) 根据题意

$$p_1 = p(X=2) = 0.75 \times C_2^1 \times 0.2 \times 0.8 = 0.24,$$

$$p_2 = p(X=3) = 0.25 \times 0.2^2 = 0.01,$$

$$p_3 = p(X=4) = 0.75 \times 0.8^2 = 0.48,$$

$$p_4 = p(X=5) = 0.24,$$

$$\therefore E(X) = 0 \times 0.03 + 2 \times 0.24 + 3 \times 0.01 + 4 \times 0.48 + 5 \times 0.24 = 3.63$$

(III) 用 C 表示事件“该同学在 A 处投第一球,以后都在 B 处投,得分超过 3 分”,

用 D 表示事件“该同学都在 B 处投,得分超过 3 分”,

$$P(C) = P(X=4) + P(X=5) = 0.48 + 0.24$$

$$P(D) = 0.28 + C_2^1 \times 0 \times 2 \times 0.8 = 0.896$$

$$\therefore P(D) > P(C)$$

即该同学选择都在 B 处投篮得分超过 3 分的概率的大于该同学在 A 处投第一球,以后都在 B 处投,得分超过 3 分的概率.

19.如图,四棱锥 $P-ABCD$ 中, $PA \perp ABCD$, $AD \parallel BC$,

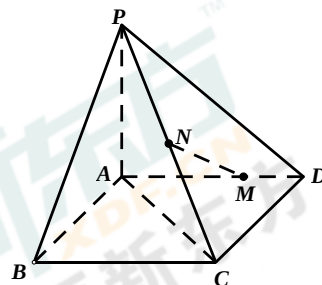
$AB = AD = AC = 3$, $PA = BC = 4$, M 为线段 AD 上一点,

$AM = 2MD$, N 为 PC 的中点.

(1) 证明: $MN \parallel$ 平面 PAB ;

(2) 求直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值.

(3) 证明: 取 PB 中点 G , 连结 AG, NG



解析: (1) $\because N$ 为 PC 的中点

$$\therefore NG \parallel \frac{1}{2} BC$$

$$\text{又 } AM = \frac{2}{3} AD = 2, BC = 4, \text{ 且 } AD \parallel BC,$$

$$\therefore AM \parallel \frac{1}{2} BC, \text{ 则 } NG \parallel AM$$

$\therefore$ 四边形 $AMNG$ 为平行四边形, 则 $NM \parallel AG$,

$\because AG \subset \text{平面} PAB, NM \not\subset \text{平面} PAB,$

$\therefore MN \parallel \text{平面} PAB.$

(2) 在三角形 AMC 中, 由 $AM = 2, AC = 3, \cos \angle MAC = \frac{2}{3}$, 得

$$CM^2 = AC^2 + AM^2 - 2AC \cdot AM \cdot \cos \angle MAC = 5,$$

$$AM^2 + MC^2 = AC^2, \text{ 则 } AM \perp MC,$$

$\because PA \perp \text{底面} ABCD, PA \subset \text{平面} PAD,$

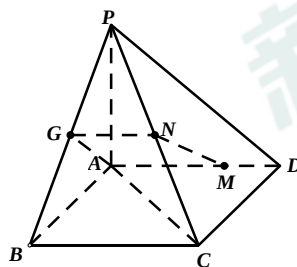
$\therefore \text{平面} ABCD \perp \text{平面} PAD, \text{ 且 } \text{平面} ABCD \cap \text{平面} PAD = AD,$

$\therefore CM \perp \text{平面} PAD, \text{ 则 } \text{平面} PMN \perp \text{平面} PAD$

在平面 PAD 内, 过 A 作 $AF \perp PM$, 交 PM 于 F , 连结 NF , 则 $\angle ANF$ 为直线 AN 与平面 PMN 所成角.

$$\text{在 } Rt\triangle PAM \text{ 中, 由 } PA \cdot AM = PM \cdot AF, \text{ 得 } AF = \frac{4\sqrt{5}}{5}, \therefore \sin \angle ANF = \frac{8\sqrt{5}}{25}$$

所以直线 AN 与平面 PMN 所成角的正弦值为 $\frac{8\sqrt{5}}{25}$.



20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点分别为 F_1, F_2 ，椭圆 C 过点 $P\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ，直线 PF_1 交 y

轴于 Q ，且 $\overrightarrow{PF_2} = 2\overrightarrow{QO}$ ， O 为坐标原点。

(1) 求椭圆 C 的方程；

(2) 设 M 是椭圆 C 上的顶点，过点 M 分别作直线 MA, MB 交椭圆于 A, B 两点，设这两条直线的斜率分别为 k_1, k_2 ，且 $k_1 + k_2 = 2$ ，证明：直线 AB 过定点。

解析：(1) $\overrightarrow{PF_2} = 2\overrightarrow{QO}, \therefore PF_2 \perp F_1F_2, \therefore c = 1$

$$\frac{1}{a^2} + \frac{2}{b^2} = 1, a^2 = b^2 + c^2 = b^2 + 1$$

$$\therefore b^2 = 1, a^2 = 2$$

$$\text{即 } \frac{x^2}{2} + y^2 = 1$$

(2) 设 AB 方程为 $y = kx + b$ 代入椭圆方程

$$\left(\frac{1}{2} + k^2\right)x^2 + 2kbx + b^2 - 1 = 0$$

$$x_A + x_B = \frac{-2kb}{\frac{1}{2} + k^2}, \quad x_A \cdot x_B = \frac{b^2 - 1}{\frac{1}{2} + k^2}$$

$$k_{MA} = \frac{y_A - 1}{x_A}, \quad k_{MB} = \frac{y_B - 1}{x_B}$$

$$\therefore k_{MA} + k_{MB} = \frac{y_A - 1}{x_A} + \frac{y_B - 1}{x_B} = \frac{y_A x_B + x_A y_B - (x_A + x_B)}{x_A \cdot x_B} = 2$$

$\therefore k = b + 1$ 代入 $y = kx + b$ 得： $y = kx + k - 1$ 所以，直线必过 $(-1, -1)$ 。

21. 已知函数 $f(x) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 + x, a \in R$

(1) 令 $g(x) = f(x) - (ax - 1)$ ，讨论 $g(x)$ 的单调区间

(2) 若 $a = -2$ ，正实数 x_1, x_2 满足 $f(x_1) + f(x_2) + x_1 x_2 = 0$ ，证明 $x_1 + x_2 \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$

解析:

$$(1) g(x) = f(x) - (ax - 1) = \ln x - \frac{1}{2}ax^2 + x - ax + 1$$

$$\text{所以 } g'(x) = \frac{-ax^2 + (1-a)x + 1}{x}$$

当 $a \leq 0$ 时, 因为 $x > 0$, 所以 $g'(x) > 0$, 即 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增

$$\text{当 } a > 0 \text{ 时, } g'(x) = \frac{-a(x-\frac{1}{a})(x+1)}{x}, \text{ 令 } g'(x) = 0 \text{ 得 } x = \frac{1}{a}$$

所以当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 时, $g'(x) > 0$, $g(x)$ 单调递增

当 $x \in (\frac{1}{a}, +\infty)$ 时, $g'(x) < 0$, $g(x)$ 单调递减

综上, 当 $a \leq 0$ 时, 函数单调递增区间为 $(0, +\infty)$, 无递减区间

当 $a > 0$ 时, 函数单调递增区间为 $(0, \frac{1}{a})$, 单调递减区间为 $(\frac{1}{a}, +\infty)$

$$(2) \text{ 当 } a = -2 \text{ 时, } f(x) = \ln x + x^2 + x, x > 0$$

$$\text{由 } f(x_1) + f(x_2) + x_1x_2 = 0 \text{ 可得 } \ln x_1x_2 + x_1^2 + x_1 + x_2^2 + x_2 = 0$$

$$\text{即 } (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2) = x_1x_2 - \ln x_1x_2$$

$$\text{令 } t = x_1x_2, \varphi(t) = t - \ln t$$

$$\text{则 } \varphi'(t) = 1 - \frac{1}{t} = \frac{t-1}{t}$$

即 $\varphi(t)$ 在区间 $(0, 1)$ 上单调递减, 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增

$$\text{所以 } \varphi(t) \geq \varphi(1) = 1, \text{ 所以 } (x_1 + x_2)^2 + (x_1 + x_2) \geq 1$$

$$\text{又 } x_1 + x_2 > 0, \text{ 故 } x_1 + x_2 \geq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\text{由 } x_1 > 0, x_2 > 0 \text{ 可知 } x_1 + x_2 > 0$$

选做题

22. (本小题满分 10 分) 已知曲线 C 的极坐标方程为 $2\rho\sin\theta + \rho\cos\theta = 10$, 将曲线

$$C_1: \begin{cases} x = \cos\theta \\ y = \sin\theta \end{cases}, (\theta \text{ 为参数}), \text{经过伸缩变换} \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 2y \end{cases} \text{后得到曲线} C_2$$

(I) 求曲线 C_2 的参数方程.

(II) 若点 M 在曲线 C_2 上运动, 试求出 M 到曲线 C 的距离的最小值

解析: (I) 将曲线 $C_1: \begin{cases} x = \cos\alpha \\ y = \sin\alpha \end{cases}, (\alpha \text{ 为参数}),$ 化为

$$x^2 + y^2 = 1, \text{由伸缩变换} \begin{cases} x' = 3x \\ y' = 2y \end{cases} \text{化为} \begin{cases} x = \frac{1}{3}x' \\ y = \frac{1}{2}y' \end{cases}$$

$$\text{代入圆的方程} \left(\frac{1}{3}x'\right)^2 + \left(\frac{1}{2}y'\right)^2 = 1, \text{得到} C_2: \frac{(x')^2}{9} + \frac{(y')^2}{4} = 1$$

$$\text{可得参数方程为} \begin{cases} x' = 3\cos\alpha \\ y' = 2\sin\alpha \end{cases}$$

(II) 曲线 C 的极坐标方程 $2\rho\sin\theta + \rho\cos\theta = 10$

化为直角坐标方程: $2y + x - 10 = 0$

$$\text{点} M \text{到} C \text{的距离} d = \frac{|3\cos\theta + 4\sin\theta - 10|}{\sqrt{5}} = \frac{|5\sin(\theta - \varphi) - 10|}{\sqrt{5}} \geq \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

点 M 到 C 的距离的最小值为 $\sqrt{5}$

23. (本小题满分 10 分) 已知函数 $f(x) = |x+a| + |x-2|$.

(I) 若 $a = -4$ 求不等式 $f(x) \geq 6$ 的解集;

(II) 若 $f(x) \leq |x-3|$ 的解集包含 $[0, 1]$, 求实数 a 的取值范围.

解析: (I) 当 $a = -4$ 时, $f(x) \geq 6$, 即 $\begin{cases} x \leq 2 \\ 4 - x + 2 - x \geq 6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} 2 < x < 4 \\ 4 - x + x - 2 \geq 6 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x \geq 4 \\ x - 4 + x - 2 \geq 6 \end{cases}$, 解得 $x \leq 0$ 或 $x \geq 6$
不等式的解集为 $(-\infty, 0] \cup [6, +\infty)$
(II) 原命题等价于 $f(x) \leq |x - 3|$ 在 $[0, 1]$ 上恒成立, 即 $|x + a| + 2 - x \leq 3 - x$ 在 $[0, 1]$ 上恒成立, 即 $-1 - x \leq a \leq 1 - x$ 在 $[0, 1]$ 上恒成立, 即 $-1 \leq a \leq 0$
实数 a 的取值范围为 $[-1, 0]$