长春市十一高中2016-2017学年度高三上学期期中考试

数 学 试 题 （文）

一．选择题（本大题共12小题，每小题5分，共60分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1.已知集合 $A=\{1,2,3,4\}, B=\{n\mid n=\log_2(3k-1), k\in A\}$，则 $A\cap B=$（　　）

A. $\{3\}$　　　B. $\{1\}$　　　C. $\{1,3\}$　　　D. $\{1,2,3\}$

2．“$x>1$”是“$\log_{\frac{1}{2}}(x+2)<0$”的（　　）

A．充要条件　　　B．充分不必要条件

C．必要不充分条件　　　D．既不充分也不必要条件

3．已知角 θ 的顶点为坐标原点，始边为 x 轴的非负半轴，若 $P(-\sqrt{3},m)$ 是角 θ 终边上的一点，且 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{13}}{13}$，则 m 的值为（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　　B. 6　　　C. $\dfrac{1}{2}$ 或 $-\dfrac{1}{2}$　　　D．6 或 -6

4.已知 $f(x)$ 是 R 上的奇函数，且当 $x\in(-\infty,0]$ 时，$f(x)=-x\lg(3-x)$，则 $f(1)=$（　　）

A．0　　　B. $\lg 3$　　　C. $-\lg 3$　　　D. $-\lg 4$

5．将函数 $y=\sin(2x-\dfrac{\pi}{6})$ 的图象向左平移 $\dfrac{\pi}{4}$ 个单位，所得函数图象的一条对称轴的方程为（　　）

A. $x=\dfrac{\pi}{3}$　　　B. $x=\dfrac{\pi}{6}$　　　C. $x=\dfrac{\pi}{12}$　　　D. $x=-\dfrac{\pi}{12}$

6. 已知函数 $f(x)=\begin{cases}(1-2a)^x, x\le 1,\\ \log_a x+\dfrac{1}{3}, x>1\end{cases}$ 当 $x_1\ne x_2$ 时，$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<0$，则 a 的取值范围是（　　）

A. $(0,\dfrac{1}{3}]$　　　B. $[\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{2}]$　　　C. $(0,\dfrac{1}{2}]$　　　D. $[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}]$

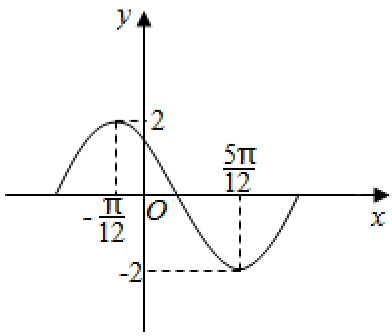
7. 已知α为第三象限角，且$\sin\alpha+\cos\alpha=2m,\sin 2\alpha=m^2$，则$m$ 的值为（　　）

A. $\frac{\sqrt{3}}{3}$　　B. $-\frac{\sqrt{3}}{3}$　　C. $-\frac{1}{3}$　　D. $-\frac{\sqrt{2}}{3}$

8. 函数$f(x)=x+\frac{\ln x}{x}$在$x=1$处的切线与两坐标轴围成的三角形的面积为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{3}{2}$　　D. $\frac{5}{4}$

9. 函数$y=A\sin(\omega x+\varphi)$（$|\varphi|<\pi$）在一个周期内的图象如图所示，此函数的一个解析式为（　　）



A. $y=2\sin(2x+\frac{\pi}{3})$　　B. $y=2\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$

C. $y=2\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3})$　　D. $y=2\sin(2x-\frac{\pi}{3})$

10. 若关于x的不等式$x^2+ax-2>0$在区间$[1,2]$上有解，则实数a的取值范围为（　　）

A. $(-\infty,-1)$　　B. $(-\infty,1)$　　C. $(1,+\infty)$　　D. $(-1,+\infty)$

11. 定义运算：$a*b=\begin{cases}a,a\le b\\ b,a>b\end{cases}$. 例如$1*2=1$，则函数$f(x)=\sin x*\cos x$的值域为（　　）

A. $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$　　B. $[-1,1]$　　C. $\left[\frac{\sqrt{2}}{2},1\right]$　　D. $\left[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right]$

12. 设奇函数$f(x)$在R上存在导数$f'(x)$，且在$(0,+\infty)$上$f'(x)<x^2$，若$f(1-m)-f(m)\ge\frac{1}{3}\left[(1-m)^3-m^3\right]$，则实数$m$的取值范围为（　　）

A. $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$　　B. $\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$　　C. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]$　　D. $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right]\cup\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$

二．填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.请把正确答案填写在横线上）

13．函数 $f\left(x\right)=a^{x-1}+4\left(a>0,且\ a\neq1\right)$ 的图象过一个定点，则这个定点坐标是________.

14. 已知 $\tan\left(\pi-\alpha\right)=-\dfrac{2}{3}$，则 $\dfrac{\cos\left(-\alpha\right)+3\sin\left(\pi+\alpha\right)}{\cos\left(\pi-\alpha\right)+9\sin\alpha}$ 的值为________.

15. 已知函数 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{2}{x},x<2\\-\left(x-3\right)^2+2,x\geq2\end{cases}$，若关于 x 的方程 $f\left(x\right)-k=0$ 有唯一一个实数根，则实数 k 的取值范围是___________.

16. 设函数 $f\left(x\right)=\dfrac{\left(x+1\right)^2+\sin x}{x^2+1}$ 的最大值为 M，最小值为 m，则 $M+m=$___________.

三．解答题（本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17. （本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=x^3-3x+1$.

（1）求 $f(x)$ 的单调区间和极值；

（2）求曲线在点 $(0,f(0))$ 处的切线方程.

18. （本小题满分 12 分）

设函数 $f(x)=2\cos^2x+\sqrt{3}\sin2x-1$

（1）求 $f(x)$ 的最大值及此时的 x 值；

（2）求 $f(x)$ 的单调减区间　；

（3）若 $x\in[-\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3}]$时，求$f(x)$的值域.

19. （本小题满分 12 分）

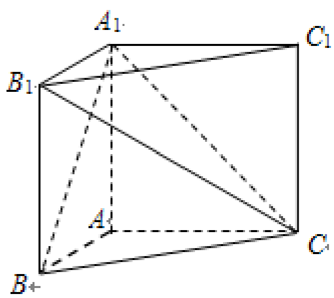
已知等差数列$\{a_n\}$中，$a_3=9,a_8=29$.

（1）求数列$\{a_n\}$的通项公式a_n及前n项和S_n的表达式；

（2）记数列$\left\{\dfrac{1}{a_na_{n+1}}\right\}$的前$n$项和为$T_n$，求$T_{100}$的值.

20. （本小题满分 12 分）

在直三棱柱$ABC-A_1B_1C_1$中，$AB=AC=1$，$\angle BAC=90^\circ$，且异面直线A_1B与B_1C_1所成的角等于60°，设$AA_1=a$.

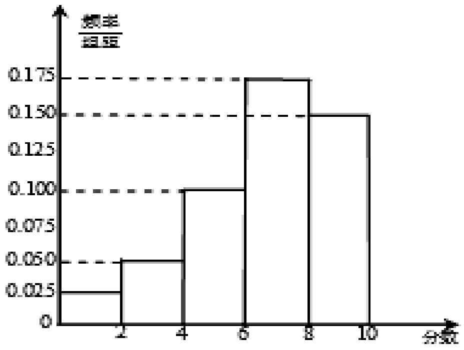


(1) 求a的值；

(2) 求三棱锥B_1-A_1BC的体积.

21. （本小题满分 12 分）

某汽车公司为了考查某$4S$店的服务态度，对到店维修保养的客户进行回访调查，每个用户在到此店或保养后可以对该店进行打分，最高分为 10 分. 上个月公司对该$4S$店的 100 位到店维修保养的客户进行了调查，将打分的客户按所打分值分成以下几组：第一组$[0,2)$，第二组$[2,4)$，第三组$[4,6)$，第四组$[6,8)$，第五组$\left[8,10\right]$，得到频率分布直方图如图所示.



（1）求所打分值在$\left[6,10\right]$的客户的人数；

（2）该公司在第二、三组客户中按分层抽样的方法抽取 6 名客户进行深入调查，之后将从这 6 人中随机抽取 2 人进行物质奖励，求得到奖励的人来自不同组的概率.

22. （本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2-2a\ln x+(a-2)x$

（1）当$a=1$时,求函数 $f\left(x\right)$在$\left[1,e\right]$上的最小值和最大值；

（2）是否存在实数a,对任意的$x_1,x_2\in\left(0,+\infty\right)$，且$x_1\neq x_2$,都有$\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>a$恒

成立.若存在，求出a的取值范围；若不存在，说明理由.

长春市十一高中 2016-2017 学年度高三上学期阶段性考试
数 学 试 题 （文）参考答案

一、选择题

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
C	B	A	D	C	A	B	B	B	D	D	B

二、填空题

13. $(1,5)$ ；**14** 。$-\dfrac{1}{5}$ **；15**。[0，1）∪（2，+∞）； **16.** 2

三、解答题

17. 【答案】（1）极大值为$f(-1)=3$，极小值为$f(1)=-1$（2）$3x+y-1=0$

解析：（1）$\because f(x)=x^3-3x+1$，$\therefore f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$，

（1 分）

设$f'(x)=0$，可得$x=1$，或$x=-1$.

① 当$f'(x)>0$，即$x>1$，或$x<-1$；

② 当$f'(x)<0$，即$-1<x<1$.

所以增区间为$(-\infty,-1),(1,+\infty)$；减区间为$(-1,1)$ （4 分）

当x变化时，$f'(x)$，$f(x)$的变化情况如下表：

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	单调递增↗	3	单调递减↘	-1	单调递增↗

（7 分）

当 $x=-1$ 时，$f(x)$ 有极大值，并且极大值为 $f(-1)=3$

当 $x=1$ 时，$f(x)$ 有极小值，并且极小值为 $f(1)=-1$　（8 分）

（2）$\because k=3x^2-3|_{x=0}=-3$，$f(0)=1$

$\therefore y-1=-3(x-0)\Rightarrow 3x+y-1=0$.　（10 分）

18. 【答案】（1）$x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ 时，$f(x)_{\max}=2$；

（2）$\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2}{3}\pi\right]$，$k\in Z$；

（3）$[-1,2]$.

解析：

$$f(x)=2\times\frac{1+\cos 2x}{2}+\sqrt{3}\sin 2x-1=\sqrt{3}\sin 2x+\cos 2x=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$$

（2 分）

（1）当 $2x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ 时，$x=\frac{\pi}{6}+k\pi$ 时，$f(x)_{\max}=2$

（4 分）

（2）由 $2k\pi+\frac{\pi}{2}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le 2k\pi+\frac{3}{2}\pi,k\in Z$

得 $2k\pi+\frac{\pi}{3}\le 2x\le 2k\pi+\frac{4}{3}\pi$，解得：$\frac{\pi}{6}+k\pi\le x\le\frac{2}{3}\pi+k\pi$

所以函数的单调递减区间为 $\left[k\pi+\frac{\pi}{6},k\pi+\frac{2}{3}\pi\right]$，$k\in Z$.（8 分）

（3） $f\left(x\right)=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)$

由 $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{3}$ 得：$-\frac{\pi}{6}\le 2x+\frac{\pi}{6}\le\frac{5}{6}\pi$，（9 分）

所以 $-\frac{1}{2}\le\sin\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\le 1$

所以 $-1\le f\left(x\right)\le 2$，故函数 $f\left(x\right)$ 的值域为 $\left[-1,2\right]$.（12 分）

19.【答案】（1） $a_n=4n-3,S_n=2n^2-n$ （2） $\frac{100}{401}$

解析：（1）∵等差数列 $\{a_n\}$ 中，$a_3=9,a_8=29$ ，

$\therefore\begin{cases}a_1+2d=9\\a_1+7d=29\end{cases}$，解得 $a_1=1,d=4$，（4 分）

$\therefore$ $a_n=1+\left(n-1\right)\times 4=4n-3$ （5 分）

$S_n=n+\frac{n(n-1)}{2}\times 4=2n^2-n$.（6 分）

（2）由（1）得 $\frac{1}{a_na_{n+1}}=\frac{1}{(4n-3)(4n-1)}=\frac{1}{4}(\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1})$，

（8 分）

$\therefore T_n=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1})\ =\frac{1}{4}(1-\frac{1}{4n+1})$

$\therefore T_{100}=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{401})=\frac{100}{401}$.（12 分）

20. 【答案】(1) $a=1$； (2) $\frac{1}{6}$

解析：(1)∵BC∥B_1C_1，∴∠A_1BC 就是异面直线 A_1B 与 B_1C_1 所成的角，
即∠A_1BC =60 ，（2 分）
又 AA_1⊥平面 ABC，AB=AC，则 $A_1B=A_1C$，∴△A_1BC 为等边三角形，

由 $AB=AC=1$，$\angle BAC=90^\circ\Rightarrow BC=\sqrt{2}$，

$\therefore A_1B=\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{1+a^2}=\sqrt{2}\Rightarrow a=1$；　　　　　　　（6 分）

(2)连接 B_1C，则三棱锥 $B_1–A_1BC$ 的体积等于三棱锥 $C–A_1B_1B$ 的体积，

即：$V_{B_1-A_1BC}=V_{C-A_1B_1B}$，

$\triangle A_1B_1B$ 的面积 $S=\dfrac{1}{2}$，

又 $CA\perp A_1A, CA\perp AB, \therefore CA\perp$ 平面 A_1B_1B，

所以 $V_{C-A_1B_1B}=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times 1=\dfrac{1}{6}$，所以 $V_{B_1-A_1BC}=\dfrac{1}{6}$　　　　　（12 分）

21. 【答案】（1）65（2）$\dfrac{8}{15}$

解析：（1）由直方图知，所打分值在 $[6,10]$ 的频率为 $0.175\times 2+0.150\times 2=0.6$，（4 分）

所以所打分值在 $[6,10]$ 的客户的人数为 $0.65\times 100=65$ 人.（6 分）

（2）由直方图知，第二、三组客户人数分别为 10 人和 20 人，所以抽出的 6 人中，第二组有 2 人，设为 A，B；第三组有 4 人，设为 a，b，c，d.　　　　　　　　　　　　（8 分）

从中随机抽取 2 人的所有情况如下：AB，Aa，Ab，Ac，Ad，Ba，Bb，Bc，Bd，ab，ac，ad，bc，bd，cd 共 15 种，

（10 分）

其中，两人来自不同组的情况有：Aa，Ab，Ac，Ad，Ba，Bb，Bc，Bd 共有 8 种，

所以，得到奖励的人来自不同组的概率为 $\dfrac{8}{15}$.　　　　　（12 分）

22. 【答案】（1）最小值为 f（2）=-2ln2，最大值为 $f(1)=-\dfrac{1}{2}$；（2）$a\in(-\infty,-\dfrac{1}{2}]$.

解析：（1）当 a=1 时，$f(x)=\frac{1}{2}x^2-2\ln x-x$.

则 $f'(x)=x-\frac{2}{x}-1=\frac{x^2-x-2}{x}=\frac{(x+1)(x-2)}{x}$. $x\in[1,e]$ （1 分）

∴当 $x\in(1,2)$ 时，$f'(x)<0$,　　当 $x\in(2,e)$ 时，$f'(x)>0$.

∴f（x）在（1,2）上是减函数，在（2，e）上是增函数.（2 分）

（列表格）　　　　　　　　　　（4 分）

∴当 x=2 时，f（x）取得最小值，其最小值为 f（2）=-2ln2.

又 $f(1)=-\frac{1}{2}$,　　$f(e)=\frac{e^2}{2}-e-2$.

$f(e)-f(1)=\frac{e^2}{2}-e-2+\frac{1}{2}=\frac{e^2-2e-3}{2}<0$，　∴ $f(e)<f(1)$

∴ $f(x)_{\max}=f(1)=-\frac{1}{2}$.　　　　　　　　（6 分）

（2）　假设存在实数 a, 对任意的 $x_1,x_2\in$（0,+∞）,且 $x_1\neq x_2$,都有 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>a$ 恒成立

不妨设 $0<x_1<x_2$，　若 $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}>a$，　即 $f(x_2)-ax_2>f(x_1)-ax_1$.

（7 分）

g（x）=f（x）-ax=$\frac{1}{2}x^2-2a\ln x+(a-2)x$-ax=$\frac{1}{2}x^2-2a\ln x+-2x$.

只要 g（x）在（0,+∞）为增函数　　　　　　　　（9 分）

$g'(x)=x-\frac{2a}{x}-2=\frac{x^2-2x-2a}{x}=\frac{(x-1)^2-1-2a}{x}$

要使 $g'(x)\geq 0$ 在（0,+∞）恒成立，只需-1-2a≥0，$a\leq -\frac{1}{2}$.

故存在 $a\in(-\infty,-\frac{1}{2}]$ 满足题意.　　　　　　　　（12 分）