长春市十一高中 2016-2017 学年度高三上学期期中考试

数 学 试 题 （理）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分.在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.）

1.设 i 是虚数单位，集合 $M=\{z|\ iz=1\}$，$N=\{z|\ z+i=1\}$，则集合 M 与 N 中元素的乘积是（　　）

A. $-1+i$　　B. $-1-i$　　C. i　　D. $-i$

2. A,B 是 ΔABC 的两个内角，p：$\sin A\sin B<\cos A\cos B$；$q$：$\Delta ABC$ 是钝角三角形.则 p 是 q 成立的（　　）

A. 充分不必要条件　　B. 必要不充分条件

C. 充要条件　　D. 既不充分也不必要条件

3.已知 $a=4^{\log_3 4.1}$，$b=4^{\log_3 2.7}$，$c=(\frac{1}{2})^{\log_3 0.1}$ 则（　　）

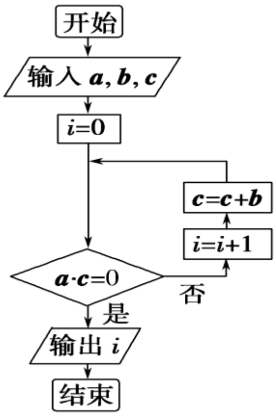
A. $a>b>c$　　B. $b>a>c$　　C. $a>c>b$　　D. $c>a>b$

4.函数 $f(x)=|x-3|-\ln(x+1)$ 在定义域内零点的个数为（　　）

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5.当向量 $\vec{a}=\vec{c}=(-2,2),\vec{b}=(1,0)$ 时，执行如图所示的程序框图，输出的 i 值为（　　）

A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5



6.若 $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+a\ln(x+2)$ 在 $(-1,+\infty)$ 上是减函数，则 a 的取值范围是（　　）

A. $[-1,+\infty)$　　B. $(-1,+\infty)$

C. $(-\infty,-1]$　　D. $(-1,1)$

7.在等比数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_1=2$，$a_2+a_5=0$，$\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，则 $S_{2016}+S_{2017}=$（　　）

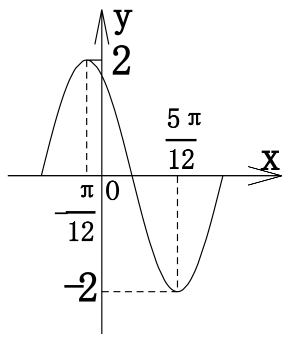
A. 4034　　B. 2　　C. -2　　D. -4032

8.设 $\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{3}{7}$，$\tan(\beta-\dfrac{\pi}{4})=-\dfrac{1}{3}$，则 $\tan(\alpha+\dfrac{\pi}{4})$ 的值是（　　）

A. $\dfrac{2}{3}$　　B. $\dfrac{8}{9}$　　C. $\dfrac{1}{12}$　　D. $\dfrac{1}{9}$

9.函数 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 在一个周期内的图象如图所示，

则此函数的一个解析式为（　　）



A. $y=2\sin(2x+\dfrac{\pi}{3})$　　B. $y=2\sin(2x+\dfrac{2\pi}{3})$

C. $y=2\sin(\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{3})$　　D. $y=2\sin(2x-\dfrac{\pi}{3})$

10.已知双曲线 C：$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，P 为 C 的右支上一点，且 $\left|PF_2\right|=\dfrac{3}{5}\left|F_1F_2\right|$，则 ΔPF_1F_2 的面积等于（　　）

A. 8　　B. $8\sqrt{7}$　　C. $8\sqrt{14}$　　D. 16

11.已知函数 $f(x)=2x+\sin x$，且 $f(y^2-2y+3)+f(x^2-4x+1)\le 0$，则当 $y\ge 1$ 时，$\dfrac{y}{x+1}$ 的取值范围是（　　）

A. $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{3}{4}\right]$　　B. $\left[0,\dfrac{3}{4}\right]$　　C. $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2}\right]$　　D. $\left[\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{3}\right]$

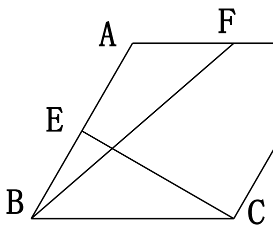
12．已知函数 $f(x)=\begin{cases} a\cdot e^x, & x\le 0 \\ -\ln x, & x>0 \end{cases}$，其中 e 为自然对数的底数，若关于 x 的方程 $f(f(x))=0$ 有且只有一个实数解，则实数 a 的取值范围为（　　）

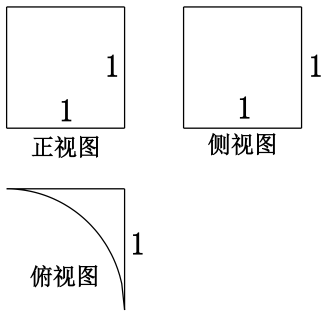
A. $(-\infty,0)$　　B. $(0,1)\cup(1,+\infty)$　　C. $(0,1)$　　D. $(-\infty,0)\cup(0,1)$

二. 填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分.请把正确答案填写在横线上）

13．函数 $f(x)=\sin x-4\sin^3\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}$ 的最小正周期为____________.

14.如图，边长为1的菱形 $ABCD$， $\angle ABC=60^\circ$， E 为 AB 中点， F 为 AD 中点，则 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{BF}=$______.





15.一个几何体的三视图如图所示，其中俯视图的曲线部分是四分之一圆弧，则该几何体的体积为____________________.

16.已知函数 $f(x)=|\cos x|\sin x$，给出下列五个说法：

① $f(\frac{82}{3}\pi)=-\frac{\sqrt{3}}{4}$；②若 $|f(x_1)|=|f(x_2)|$，则 $x_1=x_2+k\pi\ (k\in Z)$；③ $f(x)$ 在区间 $\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right]$ 上单调递增；④函数 $f(x)$ 的周期为 π.⑤ $f(x)$ 的图象关于点 $(\frac{\pi}{2},0)$ 成中心对称.其中正确说法的序号是________________.

三、解答题 （本大题共 6 小题，共 70 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.）

17.（本小题满分 12 分）

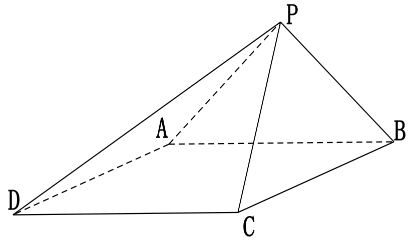
在 ΔABC 中，角 A,B,C 所对的边长分别为 a,b,c， 且 $\cos\frac{A+C}{2}=\frac{1}{2}$.

（1）若 $a=3$， $b=\sqrt{7}$，求 c 的值；

（2）若 $f(A)=\sin\frac{A}{2}(\sqrt{3}\cos\frac{A}{2}-\sin\frac{A}{2})+\frac{1}{2}$，求 $f(A)$ 的取值范围.

18.（本小题满分 12 分）

如图，已知四棱锥 $P-ABCD$ 的底面为菱形，$\angle BAD=120^\circ$，$AB=PC=2$，$AP=BP=\sqrt{2}$



（1）求证：$AB\perp PC$；

（2）求二面角 $B-PC-D$ 的余弦值.

19.（本小题满分 12 分）

某闯关游戏有这样一个环节：该关卡有一道上了锁的门，要想通过该关卡，要拿到门前密码箱里的钥匙，才能开门过关.但是密码箱需要一个密码才能打开，并且3次密码尝试错误，该密码箱被锁定，从而闯关失败．某人到达该关卡时，已经找到了可能打开密码箱的 6 个密码（其中只有一个能打开密码箱)，他决定从中随机地选择1个密码进行尝试．若密码正确，则通关成功；否则继续尝试，直至密码箱被锁定．

（1）求这个人闯关失败的概率；

（2）设该人尝试密码的次数为 X，求 X 的分布列和数学期望．

20. （本小题满分 12 分）

已知椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的一个顶点为 $B(0,4)$，离心率 $e=\frac{\sqrt{5}}{5}$，直线 l 交椭圆于 M,N 两点.

（1）若直线 l 的方程为 $y=x-4$，求弦 MN 的长;

（2）如果 ΔBMN 的重心恰好为椭圆的右焦点 F，求直线 l 的方程.

21.（本小题满分 12 分）

已知函数 $f(x)=\left|x-a\right|-\frac{a}{2}\ln x$，$a\in R$

（1）求函数 $f(x)$ 的单调区间;

（2）若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，$(x_1<x_2)$，求证：$1<x_1<a<x_2<a^2$.

22．（本小题满分 10 分）选修 4—4：坐标系与参数方程

已知直线l：$\begin{cases} x=-1+t\cos\alpha \\ y=t\sin\alpha \end{cases}$（$t$为参数，$\alpha$为$l$的倾斜角），以坐标原点为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，曲线$C$为：$\rho^2-6\rho\cos\theta+5=0$.

（1）若直线l与曲线C相切，求α的值；

（2）设曲线C上任意一点的直角坐标为(x,y)，求$x+y$的取值范围.

23.（本小题满分 10 分）选修 4-5：不等式选讲

设 $f(x)=|ax-2|$

（1）若关于x的不等式 $f(x)<3$ 的解集为$(-\frac{5}{3},\frac{1}{3})$，求$a$的值；

（2） $f(x)+f(-x)\ge a$ 对于任意 $x\in R$ 恒成立，求实数a的取值范围.

长春市十一高中 2016-2017 学年度高三上学期阶段性考试

数 学 试 题 （理）参考答案

一、选择题

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	A	C	C	D	C	B	B	B	C	A	D

二、填空题

13. π　　14. $-\frac{3}{8}$　　15. $1-\frac{\pi}{4}$　　16. ①③

三、解答题

17.解：（1）在 ΔABC 中，$A+C=\pi-B$，∴ $\cos\frac{A+C}{2}=\cos\frac{\pi-B}{2}=\sin\frac{B}{2}=\frac{1}{2}$

∴ $\frac{B}{2}=\frac{\pi}{6}$，$B=\frac{\pi}{3}$ -----------3 分　　由余弦定理：$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，得 $c^2-3c+2=0$

所以：$c=1$ 或者 $c=2$ -------------------6 分

（2）$f(A)=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A-\frac{1-\cos A}{2}+\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin A+\frac{1}{2}\cos A=\sin(A+\frac{\pi}{6})$

由（1）$A+C=\pi-B=\frac{2\pi}{3}$，故 $A\in(0,\frac{2\pi}{3})$ ----------------9 分

所 以 ： $A+\frac{\pi}{6}\in(\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6})$ ， ∴ $\sin(A+\frac{\pi}{6})\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ 即 ： $f(A)\in\left(\frac{1}{2},1\right]$ --------------12 分

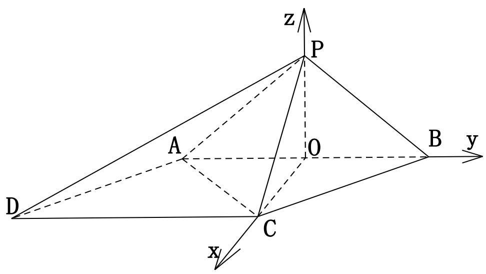
18. （1）证明：取 AB 的中点 O，连接 PO,CO,AC，∵ ΔPAB 为等腰直角三角形，

∴ $PO\perp AB$ -------------2 分　　底面为菱形，$\angle BAD=120°$，

所以 ΔABC 为等边三角形，　∴ $CO\perp AB$ ---------4 分

又 $CO\bigcap PO=O$，所以 $AB\perp$ 平面 POC，$PC\subset$ 平面 POC，

∴ $AB \perp PC$ -------------6 分



（2）求得 $PO=1, OC=\sqrt{3}$，$PO^2+OC^2=PC^2$，

$PO \perp OC$

以 O 为原点，OC，OB，OP 为 x,y,z 轴建立空间直角坐标系，则：$A(0,-1,0)$，$B(0,1,0)$，$C(\sqrt{3},0,0)$，$P(0,0,1)$，

$D(\sqrt{3},-2,0)$

∴ $\overrightarrow{BC}=(\sqrt{3},-1,0)$，$\overrightarrow{PC}=(\sqrt{3},0,-1)$，$\overrightarrow{DC}=(0,2,0)$ ----------8 分

设平面 DPC 的一个法向量 $\vec{n}=(x,y,z)$，则 $\begin{cases}\overrightarrow{PC}\cdot\vec{n}=\sqrt{3}x-z=0\\ \overrightarrow{DC}\cdot\vec{n}=2y=0\end{cases}$，令 $x=1$，则

$\vec{n}=(1,0,\sqrt{3})$

同理平面 PCB 的法向量 $\vec{m}=(1,\sqrt{3},\sqrt{3})$ --------------10 分

设二面角 $B-PC-D$ 为 θ，显然 θ 为钝角，故：$\cos\theta=-\dfrac{|\vec{n}\cdot\vec{m}|}{|\vec{n}||\vec{m}|}=-\dfrac{1+0+3}{2\times\sqrt{7}}=-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$

所以二面角 $B-PC-D$ 的余弦值为 $-\dfrac{2\sqrt{7}}{7}$ --------------12 分

19.解：（1）设“密码箱被锁定”的事件为 A

则 $P(A)=\dfrac{5\times4\times3}{6\times5\times4}=\dfrac{1}{2}$----------------------5 分

（2）依题意，X 的可能取值为1, 2, 3，　　则 $P(X=1)=\dfrac{1}{6}$；

$P(X=2)=\dfrac{5\times1}{6\times5}=\dfrac{1}{6}$；　　$P(X=3)=\dfrac{5\times4}{6\times5}\times1=\dfrac{2}{3}$-----------------------8 分

所以分布列为

X	1	2	3

p	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$

所以：$E(X)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{2}{3}=\frac{5}{2}$ ----------------12 分

20.解：（1）由已知条件知：$b=4$，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{5}$，$a^2=16+c^2$，解得：

$a^2=20$，$c^2=4$， 所以椭圆方程为：$\frac{x^2}{20}+\frac{y^2}{16}=1$----------------3 分

把直线 $y=x-4$ 代入椭圆消去 y 得：$9x^2-40x=0$，解得：$x_1=0,x_2=\frac{40}{9}$

$\therefore |MN|=\sqrt{1+1^2}|x_2-x_1|=\sqrt{2}\times\frac{40}{9}=\frac{40\sqrt{2}}{9}$--------------------6 分

（2）椭圆的右焦点 $F(2,0)$，设线段 MN 中点 $P(x_0,y_0)$，则由三角形重心性质得：

$\overrightarrow{BF}=2\overrightarrow{FP}$，由 $B(0,4)$，则 $(2,-4)=2(x_0-2,y_0)$，即：$x_0=3,y_0=-2$，

$P(3,-2)$----------------9 分

设 $M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，则 $x_1+x_2=2x_0=6,y_1+y_2=2y_0=-4$，

且 $\begin{cases}\frac{x_1^2}{20}+\frac{y_1^2}{16}=1\\ \frac{x_2^2}{20}+\frac{y_2^2}{16}=1\end{cases}$，两式相减得：$\frac{(x_1+x_2)(x_1-x_2)}{20}+\frac{(y_1+y_2)(y_1-y_2)}{16}=0$，

所以：$k_{MN}=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=-\frac{4}{5}\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}=\frac{6}{5}$--------------11 分

所以 l：$y+2=\frac{6}{5}(x-3)$，即：$6x-5y-28=0$----------------12 分

21.解：（1）依题意有，函数的定义域为 $(0,+\infty)$，

（ⅰ）当 $a\le 0$ 时，$f(x)=|x-a|-\frac{a}{2}\ln x=x-a-\frac{a}{2}\ln x$，

$f'(x)=1-\frac{a}{2x}>0$，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$ -------------2 分

（ii）当 $a>0$ 时， $f(x)=|x-a|-\frac{a}{2}\ln x=\begin{cases} x-a-\frac{a}{2}\ln x, & x\ge a \\ a-x-\frac{a}{2}\ln x, & 0<x<a \end{cases}$，

若 $x\ge a$， $f'(x)=1-\frac{a}{2x}=\frac{2x-a}{2x}>0$，此时函数单调递增，------------ 4 分

若 $x<a$， $f'(x)=-1-\frac{a}{2x}<0$，此时函数单调递减，---------------- 5 分

综上所述，

当 $a\le 0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(0,+\infty)$，

当 $a>0$ 时，函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0,a)$，单调增区间为 $(a,+\infty)$ -------6 分

（2）由（1）知，当 $a\le 0$ 时，函数 $f(x)$ 单调递增，至多只有一个零点，不合题意；

则必有 $a>0$，--------------7 分

此时，函数 $f(x)$ 的单调减区间为 $(0,a)$，单调增区间为 $(a,+\infty)$

由题意，必须 $f(x)_{\min}=f(a)=-\frac{a}{2}\ln a<0$，解得 $a>1$

由 $f(1)=a-1-\frac{a}{2}\ln 1=a-1>0$， $f(a)<0$，得 $x_1\in(1,a)$ -------------8 分

而 $f(a^2)=a^2-a-a\ln a=a(a-1-\ln a)$

下面证明： $a>1$ 时， $a-1-\ln a>0$

设 $g(x)=x-1-\ln x,(x>1)$，则 $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}>0$

所以 $g(x)$ 在 $x>1$ 时递增，则 $g(x)>g(1)=0$

所以 $f(a^2)=a^2-a-a\ln a=a(a-1-\ln a)>0$ --------------11 分

又因为 $f(a)<0$，所以 $x_2\in(a,a^2)$，综上所述， $1<x_1<a<x_2<a^2$ -----------12 分

22．选修 4—4：坐标系与参数方程

解：（1）曲线 C 的直角坐标方程为 $x^2+y^2-6x+5=0$

即 $(x-3)^2+y^2=4$　　曲线 C 为圆心为(3,0)，半径为 2 的圆.

直线 l 的方程为: $x\sin\alpha-y\cos\alpha+\sin\alpha=0$------------3 分

∵直线 l 与曲线 C 相切　∴ $\dfrac{|3\sin\alpha+\sin\alpha|}{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}}=2$ ，即 $\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ ---------------4 分

∵ $\alpha\in[0,\pi)$　∴ $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ 或 $\dfrac{5\pi}{6}$ ----------------5 分

（2）设 $x=3+2\cos\theta, y=2\sin\theta$---------------6 分

则 $x+y=3+2\cos\theta+2\sin\theta=3+2\sqrt{2}\sin(\theta+\dfrac{\pi}{4})$ ----------------8 分

∴ $x+y$ 的取值范围是 $\left[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}\right]$.---------------10 分

23. 选修 4-5：不等式选讲

解：（1）由条件知 $-\dfrac{5}{3}$ 与 $\dfrac{1}{3}$ 是方程 $|ax-2|=3$ 的两个根，

即：$\left|-\dfrac{5}{3}a-2\right|=3$ 且 $\left|\dfrac{1}{3}a-2\right|=3$---------------3 分

解得 $a=-3$-------------5 分

（2）设 $g(x)=f(x)+f(-x)=|ax-2|+|ax+2|$，由绝对值不等式性质：

$g(x)=f(x)+f(-x)\geq|(ax-2)-(ax+2)|=4$，即：$g(x)_{\min}=4$，

若 $f(x)+f(-x)\geq a$ 对于任意 $x\in R$ 恒成立，只需：$a\leq 4$ --------10 分