

2016-2017 学年第一学期高三年级阶段性测评

数学试卷

(考试时间: 上午 7:30—9:30)

一、选择题

1、已知集合 $M = \{-1, 0, 1\}$, $N = \{x | x(x-2) \leq 0\}$, 则 $M \cap N =$ ()

A $\{-1, 2\}$ B $[-1, 2]$ C $\{0, 1\}$ D $[0, 1]$

考点: 集合的运算、不等式的计算

答案: C

解析: $\because x(x-2) \leq 0$

$\therefore N = \{x | 0 \leq x \leq 2\}$

$\because M = \{-1, 0, 1\}$

$\therefore M \cap N = \{0, 1\}$

2、函数 $y = \frac{1}{x-2} + \lg(x+1)$ 的定义域是 ()

A $(-1, +\infty)$ B $(-1, 2) \cup (2, +\infty)$ C $(-1, 2)$ D $(2, +\infty)$

考点: 常见函数的定义域

答案: B

解析: $\because y = \frac{1}{x-2} + \lg(x+1)$

$\begin{cases} x-2 \neq 0 \\ x+1 > 0 \end{cases}$

$\therefore x > -1$

$\therefore x \in (-1, 2) \cup (2, +\infty)$

3. 设函数 $f(x), g(x)$ 分别是 R 上的偶函数和奇函数, 则下列结论正确的是 ()

A. $f(x) + g(x)$ 是奇函数 B. $f(x) - g(x)$ 是偶函数

C. $f(x) \cdot g(x)$ 是奇函数 D. $f(x) \cdot g(x)$ 是偶函数

考点: 函数奇偶性

答案: C

解析:

$\because f(x)$ 是偶函数, $\therefore f(-x) = f(x)$,

$\because g(x)$ 是奇函数, $\therefore g(-x) = -g(x)$,

令 $F(x) = f(x) + g(x)$, 则 $F(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) - g(x) \neq -F(x)$, 所以 $F(x)$ 不是奇函数;

令 $G(x) = f(x) - g(x)$, 则 $G(-x) = f(-x) - g(-x) = f(x) + g(x) \neq G(x)$, 所以 $G(x)$ 不是偶函数;

令 $H(x) = f(x) \cdot g(x)$, 则 $H(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot (-g(x)) = -H(x)$, 所以 $H(x)$ 是奇函数, 不是偶函数.

4. 已知等比数列 $\{a_n\}$ 中, 公比 $q = \frac{1}{2}$, $a_3 a_5 a_7 = 64$, 则 $a_4 =$ ()

A.1 B.2 C.4 D.8

考点: 等比数列的定义, 等比中项的概念

答案: D

解析: $\because a_3 a_5 a_7 = 64 \therefore a_5 = 4 \therefore a_5 = a_4 \cdot q$, 即 $a_4 = 8$

5. 设函数 $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x + m$ 的极大值为 1, 则函数 $f(x)$ 的极小值为 ()

A. $-\frac{1}{3}$ B. -1 C. $\frac{1}{3}$ D.1

考点: 导数的极值应用

答案: A

解析: $f'(x) = x^2 - 1$, 令 $f'(x) = 0$ 得 $x_1 = -1, x_2 = 1$, 则函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, -1)$ 上单调递增, 在 $(-1, 1)$ 上单调递减,

在 $(1, +\infty)$ 上单调递增; 则 $f(x)$ 在 $x = -1$ 上取得极大值, 所以 $f(-1) = 1$, 即 $m = \frac{1}{3}$, 则 $f(x)$ 得极小值为 $f(1) = -\frac{1}{3}$,

选 A

6. 函数 $y = \frac{e^x}{x}$ 的单调递减区间是 ()

- A. $(-\infty, 1]$ B. $(1, +\infty]$ C. $(0, 1]$ D. $(-\infty, 0)$ 和 $(0, 1]$

考点: 利用函数的导数求单调性

答案: D

解析: 函数的定义域为 $\{x | x \neq 0\}$, $y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, 令 $y' < 0$ 得 $x \notin 1$, 又 $x \neq 0$, 选 D.

7. 在公差 $d = 3$ 的等差数列 $\{a_n\}$ 中, $a_2 + a_4 = -2$, 则数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为 ()

- A. 127 B. 125 C. 89 D. 70

考点: 等差数列求和

答案: C

解析: 在等差数列中, $a_2 + a_4 = -2 = 2a_3$

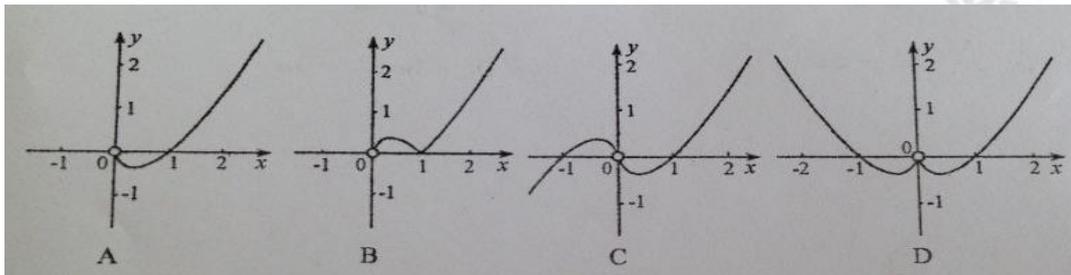
即 $a_3 = -1$ $a_1 = a_3 - 2d = -1 - 6 = -7$

$a_n = -7 + 3(n-1) = 3n - 10$

$n \leq 3$ 时, $a_n < 0$; $n > 3$ 时, $a_n > 0$

设 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 故数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项和为 $-2S_3 + S_{10} = 89$

8. 函数 $y = x|\ln x|$ 的图像大致为 ()

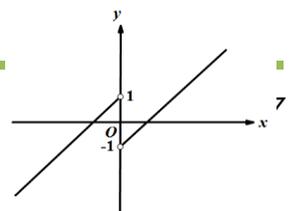


考点: 函数的图象与性质

答案: B

解析: 由函数解析式知, 定义域为 $x > 0$, 排除 C、D; 值域为 $y \geq 0$, 排除 A.

9. 设 $f(x)$ 是定义在 R 上的奇函数, 当 $x > 0$ 时, $f(x) = x - 1$, 则不等式 $f(x) < 0$ 的解集为 ()



A. $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$

B. $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

C. $(-1, 1)$

D. $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$

考点: 奇偶性与单调性的综合考查

答案: A

解析: 由题意可得 $f(x)$ 的图像如右图所示, 故选 A.

10. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_3 = 9$, $a_2 a_4 = 21$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} = 1 - \frac{1}{2^n} (n \in N^*)$,

若 $b_n < \frac{1}{10}$, 则 n 的最小值为 ()

A. 6

B. 7

C. 8

D. 9

考点: 等差数列的公式以及等差中项的性质, 并利用 $a_n = S_n - S_{n-1}$, 求解数列 $\{b_n\}$ 通项公式.

答案: C

解析:

$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 3a_2 = 9, \therefore a_2 = 3, a_4 = 7, d = 2, \therefore a_n = 2n - 1,$$

$$\text{令 } T_n = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} = \frac{b_1}{1} + \frac{b_2}{3} + \dots + \frac{b_n}{2n-1} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

$$T_{n+1} = \frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} + \frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} = \frac{b_1}{1} + \frac{b_2}{3} + \dots + \frac{b_n}{2n-1} + \frac{b_{n+1}}{2n+1} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$T_{n+1} - T_n = \frac{b_{n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^{n+1}}$$

$$b_{n+1} = \frac{2n+1}{2^{n+1}}, \therefore b_n = \frac{2n-1}{2^n}$$

当 $b_n < \frac{1}{10}$ 时, 即 $\frac{2n-1}{2^n} < \frac{1}{10}$, 得 n 的最小值为 8.

11. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^x - 2, & x \geq 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(-x), & x < 0 \end{cases}$, 若 $f[f(m)] < 0$, 则实数 m 的取值范围为 ()

A. $(-3, -1] \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (2, +\infty)$

B. $(-\infty, -2) \cup \left[-1, -\frac{1}{2}\right) \cup [1, \log_2 3)$

C. $(-\infty, -1] \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup [1, +\infty)$

D. $(-\infty, -3) \cup [-1, 0) \cup [1, \log_2 3)$

考点: 复合函数

答案: B

解析: 先解外层函数, 再解内层函数。先画出 $f(x)$ 的图像, 从图像中可以解出 $0 \leq f(m) < 1$ 和 $f(m) < -1$, 然后分别在分段函数中解这两个不等式。

12、已知函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 若方程 $f(x+1) = |x^2 + 2x - 3|$ 的零点分别为 x_1, x_2, \dots, x_n , 则 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = (\quad)$

A. n B. $-n$ C. $-2n$ D. $-3n$

考点: 函数对称性、函数零点的综合应用

答案: B.

解析: 函数 $f(x)$ 是定义在 R 上的偶函数, 则函数 $f(x)$ 图像关于 y 轴轴对称, $f(x+1)$ 图像是 $f(x)$ 图像向左平移一个单位得到, 对称轴为 $x = -1$ (可直接根据 $f(x+1)$ 是二次函数来判断其对称轴), 则一个零点 x_1 关于对称轴 $x = -1$ 一定存在对称点 x_2 , 满足 $x_1 + x_2 = -2$, 所以 $x_1 + x_2 + \dots + x_n = -n$.

二、填空题

13、已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2\}$, 则满足条件 $B \subseteq C \subseteq A$ 的集合 C 的个数为_____。

考点: 集合

答案: 3

解析: 集合 B 包含于集合 C , 集合 C 又真包含于集合 A , 故集合 C 只能有三个, 即 $\{1, 2\}$ 、 $\{1, 2, 3\}$ 、 $\{1, 2, 4\}$

14. 设曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与曲线 $y = e^x$ 在点 P 处的切线垂直, 则点 P 的坐标为_____。

考点: 利用导数研究曲线上某点的切线方程; 两直线垂直

答案: $(0,1)$

解析: 由 $y = \frac{1}{x}$ 得 $y' = -\frac{1}{x^2}$, 所以 $y'|_{x=1} = -1$,

因为曲线 $y = \frac{1}{x}$ 在点 $(1,1)$ 处的切线与曲线 $y = e^x$ 在点 P 处的切线垂直, 设 $P(a,b)$

所以 $y'|_{x=a} = 1$, 即 $e^a = 1$, $a = 0$, $b = e^0 = 1$, 即 $P(0,1)$.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n (n \in N^*)$, 数列 $\{b_n\}$ 满足 $a_n = 3 \log_2 b_n - 2 (n \in N^*)$, 则数列 $\{a_n \cdot b_n\}$

的前 n 项和 $T_n =$ _____.

考点: 数列求和中的错位相减;

答案: $10 + (3n - 5)2^{n+1}$;

解析: 由 $S_n = \frac{3}{2}n^2 - \frac{1}{2}n (n \in N^*)$ 得 $a_n = S_n - S_{n-1} = 3n - 2$;

又由 $a_n = 3\log_2 b_n - 2 (n \in N^*)$ 得 $b_n = 2^n$;

所以 $T_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n = 1 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 + \dots + (3n - 2)2^n$ ①

$2T_n = 1 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2^3 + \dots + (3n - 2)2^{n+1}$ ②

① - ② 得 $T_n = 10 + (3n - 5)2^{n+1}$.

16. 已知函数 $f(x) = \frac{-3x-7}{x+2}$, $g(x) = x^2 - 2x$, 若存在实数 $a \in (-\infty, -2)$, 使得 $f(a) + g(b) = 0$ 成立, 则实数 b 的取值范围是 _____.

考点: 函数的值域与含参范围的求解

答案: $(-1, 3)$

解析: $f(a) = \frac{-3a-7}{a+2} = -3 - \frac{1}{a+2}$

当 $a \in (-\infty, -2)$, $f(a) \in (-3, +\infty)$

因为 $f(a) + g(b) = 0$

所以 $g(b) = b^2 - 2b \in (-1, 3)$

三、解答题

17. 已知集合 $A = \{x | 1 < 2^x \leq 16\}$, $B = \{y | y = \sqrt{x}, x \in A\}$.

(1) 求 $A \cap B$;

(2) 若 $f(x) = \log_2 x - \frac{1}{x}$, $x \in A \cap B$, 求函数 $f(x)$ 的最大值.

考点: 指数不等式, 函数值域与集合运算.

答案: (1) $(0, 2]$ (2) $\frac{1}{2}$

解析:

$$(1) \because 1 < 2^x \leq 16$$

$$\therefore 2^0 < 2^x \leq 2^4, 0 < x \leq 4.$$

$$\therefore A = \{x | 0 < x \leq 4\}.$$

$$\because x \in (0, 4], \therefore y = \sqrt{x} \in (0, 2], B = \{x | 0 < x \leq 2\}.$$

$$\therefore A \cap B = (0, 2].$$

$$(2) f'(x) = \ln 2 \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \frac{x \cdot \ln 2 + 1}{x^2} > 0 \text{ 在 } (0, 2] \text{ 上恒成立.}$$

$\therefore f(x)$ 在 $(0, 2]$ 上单调递增.

$\therefore f(x)$ 在 $x = 2$ 上取得最大值, 最大值为 $\frac{1}{2}$.

18. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $S_n = 2a_n - 1 (n \in N^*)$, $\{b_n\}$ 是等差数列, 且 $b_1 = a_1, b_4 = a_3$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 若 $c_n = \frac{1}{a_n} - \frac{2}{b_n b_{n+1}} (n \in N^*)$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

考点: 等差等比数列的通项公式, 分组求和与列项相消

答案: (1) $a_n = 2^{n-1}, b_n = n$; (2) $\therefore T_n = \frac{2}{n+1} - 2^{1-n}$

解析: (1) $S_n = 2a_n - 1, S_{n+1} = 2a_{n+1} - 1$ 两式相减可得 $S_{n+1} - S_n = a_{n+1} = 2a_{n+1} - 2a_n, \therefore a_{n+1} = 2a_n$, 当 $n=1$ 时, $S_1 = a_1 = 2a_1 - 1, \therefore a_1 = 1$, 所以 a_n 是以 1 为首项, 2 为公比的等比数列, 所以 $a_n = 2^{n-1}$;

$$b_1 = a_1 = 1, b_4 = a_3 = 4, \therefore b_n = n$$

$$(2) c_n = \frac{1}{a_n} - \frac{2}{b_n b_{n+1}} = 2^{1-n} - \frac{2}{n(n+1)} = 2^{1-n} - 2\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right),$$

$$\therefore T_n = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} - 2\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 2 - \frac{1}{2^{n-1}} - 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2}{n+1} - 2^{1-n}$$

19. 已知定义在 R 上的函数 $f(x)$, 满足 $f(x+4) = f(x)$, $f(x) = \begin{cases} \frac{k}{x-1}, & -2 \leq x \leq 0, \\ x+2, & 0 < x < 2, \end{cases}$ 且 $f(3) = f(1) - 1$.

(1) 求实数 k 的值

(2) 若函数 $g(x) = f(x) + f(-x) (-2 \leq x \leq 2)$, 求 $g(x)$ 的值域.

考点: 函数的值域, 函数的周期性和分类讨论思想结合

答案: (1) $k = -4$ (2) $\{\frac{8}{3}\} \cup [5, 6) \cup \{8\}$

解析: 由题意可得 $f(1)-1=1+2-1=2$, $f(3)=f(-1+4)=f(-1)=2$,

所以可得 $\frac{k}{-1-1}=2$, $k=-4$

$$(2) \text{ 由 } f(x) = \begin{cases} \frac{-4}{x-1}, & -2 \leq x \leq 0 \\ x+2, & 0 < x < 2 \end{cases} \text{ 得 } f(-x) = \begin{cases} \frac{-4}{-x-1}, & -2 < -x < 0 \\ -x+2, & 0 < -x < 2 \end{cases} = \begin{cases} \frac{4}{x+1}, & 0 < x < 2 \\ -x+2, & -2 < x < 0 \end{cases}$$

$$\therefore g(x) = f(x) + f(-x) = \begin{cases} x+2 + \frac{4}{x+1}, & 0 < x < 2 \\ \frac{-4}{x-1} - x + 2, & -2 < x < 0 \\ \frac{8}{3}, & x = 2 \text{ 或 } -2 \\ 8, & x = 0 \end{cases}$$

当 $0 < x < 2$ 时, $1 < x+1 < 3$, 所以 $g(x) = x+2 + \frac{4}{x+1} = x+1 + \frac{4}{x+1} + 1 \geq 2\sqrt{4} + 1$ 在 $(x+1)^2 = 4$ 即 $x=1$ 处取得最小值, 所以

$g(x)$ 在 $(0,1)$ 处单调递减, 在 $[1,2)$ 上单调递增,

当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x+2 + \frac{4}{x+1}) = 6$, 当 $x \rightarrow 2$ 时, $g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2 + \frac{4}{x+1}) = \frac{16}{3}$,

$\therefore g(x)$ 在 $(0,2)$ 上的值域为 $[5,6)$

当 $-2 < x < 0$ 时, $1 < 1-x < 3$, $\therefore g(x) = \frac{4}{1-x} + (1-x) + 1 \geq 5$ 当 $(1-x)^2 = 4$, 即 $x=-1$ 时取得最小值

当 $x \rightarrow -2$ 时, $g(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (2-x + \frac{4}{1-x}) = \frac{16}{3}$, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2-x + \frac{4}{1-x}) = 6$

$\therefore g(x)$ 在 $(-2,0)$ 上的值域为 $[5,6)$

综上所述, $g(x)$ 的值域为 $\{\frac{8}{3}\} \cup [5,6) \cup \{8\}$

20. 已知函数 $f(x) = x \ln x + \frac{1}{2}mx^2 - (m+1)x + 1$.

(1) 若 $g(x) = f'(x)$, 讨论 $g(x)$ 的单调性;

(2) 若 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极小值, 求实数 m 取值范围.

考点: 利用导数讨论函数单调性, 已知极值求参数取值范围

答案: (1) $m \geq 0$ 时, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数; $m < 0$ 时, $g(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{m})$ 上单调递增, 在 $(-\frac{1}{m}, +\infty)$ 上单调递减.

(2) $(-1, +\infty)$

解析:

(1) $g(x) = f'(x) = 1 + \ln x + mx - (m+1) (x > 0)$

$$g'(x) = \frac{1}{x} + m = \frac{1+mx}{x}$$

① $m=0$ 时, 当 $x>0$ 时, $g'(x)>0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数;

② $m>0$ 时, 当 $x>0$ 时, $g'(x)>0$, 所以 $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数;

③ $m<0$ 时, 令 $g'(x)=0$ 得 $x=-\frac{1}{m}$

所以当 $x \in (0, -\frac{1}{m})$ 时, $g'(x)>0$; 当 $x \in (-\frac{1}{m}, +\infty)$ 时, $g'(x)<0$

所以 $g(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{m})$ 上单调递增, 在 $(-\frac{1}{m}, +\infty)$ 上单调递减.

综上所述, $m \geq 0$ 时, $g(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上为增函数;

$m < 0$ 时, $g(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{m})$ 上单调递增, 在 $(-\frac{1}{m}, +\infty)$ 上单调递减.

(2) $f'(x) = \ln x + m(x-1)$

当 $m \geq 0$ 时 $f'(x)$ 单调递增, 恒满足 $f'(1)=0$, 且在 $x=1$ 处单调递增

当 $m < 0$ 时 $f'(x)$ 在 $(0, -\frac{1}{m})$ 单调递增, 故 $-\frac{1}{m} > 1$ 即 $-1 < m < 0$

综上所述 m 取值范围. 为 $(-1, +\infty)$

选修 4-4 极坐标与参数方程

一. 选择题

1. 在极坐标系中, 点 $(1, 0)$ 与点 $(2, \pi)$ 的距离为 ()

- A. 1 B. 3 C. $\sqrt{1+\pi^2}$ D. $\sqrt{9+\pi^2}$

考点: 极坐标系的应用

答案: B

解析: 将点 $(1, 0)$ 与点 $(2, \pi)$ 表示到极坐标系中, 根据两点在坐标系位置可知, 两点间距离为 3.

2. 在平面直角坐标系中, 若直线 $y=x$ 与直线 $\begin{cases} x=1+t\cos\theta \\ y=t\sin\theta \end{cases}$ (t 是参数, $0 \leq \theta < \pi$) 垂直, 则 $\theta =$ ()

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{4}$ C. $\frac{2\pi}{3}$ D. $\frac{3\pi}{4}$

考点: 直线的参数方程, 直线与直线得位置关系

答案: D

解析: 由题知直线的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + t \cos \theta \\ y = t \sin \theta \end{cases}$, (t 是参数, $0 \leq \theta < \pi$), 故直线的斜率为 $\tan \theta$, 又有直线 $y = x$ 与直线

$\begin{cases} x = 1 + t \cos \theta \\ y = t \sin \theta \end{cases}$, (t 是参数, $0 \leq \theta < \pi$) 垂直得 $\tan \theta \cdot 1 = -1$, 化简得 $\tan \theta = -1$, 又 $0 \leq \theta < \pi$, 故 $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

二、填空题

3. 在平面直角坐标系中, 曲线 $\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = \sin \alpha \end{cases}$ (α 是参数) 与曲线 $\begin{cases} x = t \cos \frac{\pi}{3} \\ y = t \sin \frac{\pi}{3} \end{cases}$ (t 是参数) 的交点的直角坐标为

考点: 极坐标与参数方程

答案: $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

解析: 联立 $x^2 + y^2 = 1$ 与 $\begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}t \end{cases}$ 得 $t = \pm 1$, 所以交点的直角坐标为 $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

4. 在极坐标系中, 曲线 $\rho = 1 + \cos \theta$ 与 $\rho \cos \theta = 1$ 的交点到极点的距离为__

考点: 考查极坐标与参数方程, ρ 的意义

答案: $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$

解析: 将两方程联立方程组得出 $\rho = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$

三、解答题

5. 在平面直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{3} \cos a \\ y = \sin a \end{cases}$ (a 为参数), 以坐标原点 O 为极点, x 轴正半轴为

极轴建立极坐标系, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho = \frac{4}{\sin \theta + \cos \theta}$

(1) 求曲线 C_1, C_2 的直角坐标方程;

(2) 已知点 P, Q 分别是曲线 C_1, C_2 上的动点, 求 $|PQ|$ 的最小值。

考点: 极坐标与参数方程方程转换, 最值

答案: $C_1: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$, $C_2: x + y - 4 = 0$

解析: $\sqrt{2}$

(1) $C_1: \frac{x^2}{3} + y^2 = 1$, $C_2: x + y - 4 = 0$

(2) 设 $P(\sqrt{3}\cos a, \sin a)$, $d = \frac{|\sqrt{3}\cos a + \sin a - 4|}{\sqrt{2}} = \frac{|2\sin(a + \frac{\pi}{3}) - 4|}{\sqrt{2}}$, $d_{\min} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

选修 4-5 不等式选讲

一、选择题 (本大题共 2 小题, 每小题 5 分, 满分 10 分)

题号	1	2
选项		

1. 不等式 $|2x+3| < 1$ 的解集为 ()

- A. $(-2, -1)$ B. $(-\infty, -2) \cup (-1, +\infty)$
C. $(1, 2)$ D. $(-\infty, 1) \cup (2, +\infty)$

考点: 绝对值不等式

答案: A

解析: $|2x+3| < 1$ 等价于 $-1 < 2x+3 < 1 \Rightarrow -4 < 2x < -2 \Rightarrow -2 < x < -1$, 故选 A.

2. 若关于 x 的不等式 $|x-1| + |x+2| \geq m$ 在 R 上恒成立, 则实数 m 的取值范围为 ()

- A. $(1, +\infty)$ B. $(-\infty, 1]$ C. $(3, +\infty)$ D. $(-\infty, 3]$

考点: 绝对值不等式的解法与恒成立问题

答案: D

解析: $|x-1| + |x+2| \geq m$ 恒成立等价于 $(|x-1| + |x+2|)_{\min} \geq m$

由绝对值的几何意义可知 $|x-1| + |x+2|$ 表示数轴上的点到 1 和 -2 的距离之和, 所以最小值为 3

二、填空题

3. 不等式 $|x| < 2x-1$ 的解集为 _____.

考点: 绝对值不等式解法

答案: $x > 1$

解析: 法一: 由题知: $-2x+1 < x < 2x-1$

$$\therefore \begin{cases} x > 1 \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}, \text{ 故 } x > 1.$$

法二: 也可分 $x \geq 0, x < 0$ 两种情况讨论, $\begin{cases} x < 2x-1, x \geq 0 \\ -x < 2x-1, x < 0 \end{cases}$ 故 $\begin{cases} x > 1, x \geq 0 \\ x > \frac{1}{3}, x < 0 \text{ (舍)} \end{cases}$, 所以 $x > 1$.

4. 若不等式 $|ax+1| > 2$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立. 则实数 a 的取值范围为

考点: 绝对值不等式解法

答案: $(-\infty, -3]$

解析: 将式子两边同时平方得到类一元二次不等式, 结合二次函数图象及其对称轴得到 $a \leq -3$.

综上: $a \in (-\infty, -3]$

5. 已知 $f(x) = 2|x+1| - |x-1|$

(1) 画出函数 $f(x)$ 的图像;

(2) 解不等式 $|f(x)| > 1$

考点: 含绝对值的不等式, 函数的图像

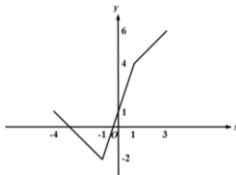
答案: (1) $f(x) = \begin{cases} -x-3, x \leq -1 \\ 3x+1, -1 < x < 1 \\ x+3, x \geq 1 \end{cases}$; (2) $(-\infty, -4) \cup (-1, -\frac{2}{3}) \cup (0, +\infty)$

解析: (1) 当 $x \geq 1$ 时 $f(x) = 2(x+1) - (x-1) = x+3$;

当 $-1 < x < 1$ 时, $f(x) = 2(x+1) + (x-1) = 3x+1$;

当 $x \leq -1$ 时, $f(x) = -2(x+1) + (x-1) = -x-3$

所以 $f(x) = \begin{cases} -x-3, x \leq -1 \\ 3x+1, -1 < x < 1 \\ x+3, x \geq 1 \end{cases}$



(2) 根据图像可得 $|f(x)|=1$ 时, $x=-4$ 或 -1 或 $-\frac{2}{3}$ 或 0 ,

所以 $|f(x)|>1$ 的解集为 $(-\infty, -4) \cup (-1, -\frac{2}{3}) \cup (0, +\infty)$

新东方
XDF.CN
太原新东方

新东方
XDF.CN
太原新东方