2016～2017学年度上学期高三年级期中考试·数学(理科)

参考答案、提示及评分细则

1. C

2. B

3. A　$\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Rightarrow\lambda=2,\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(3,1),|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=\sqrt{10}$.

4. B　设等差数列$\{a_n\}$的公差为d,依题意有$a_1+5d=1$,且$6a_1+\frac{6\times5}{2}d=12$,解得$a_1=7,d=-2,a_5=a_1+4d=7-8=-1$.

5. B　$y=\log_{0.2}x$是减函数,所以$b<a<0$,又$c>0$,所以$b<a<c$.

6. D　$\because f(-x)=f(x),\therefore 1+|a+1|=1+|a-1|,\therefore a=0$,故命题$p$为真命题.

$\because\Delta=4-4m\geqslant0,m\leqslant1$时,方程有解,$\therefore q$为假命题,$\therefore p\vee q$与$(\neg p)\vee(\neg q)$为真命题.

7. C　由题意可知,$\frac{1}{2}a=\frac{\sqrt{2}}{2}b=c,a:b:c=2:\sqrt{2}:1$,设$a=2k,b=\sqrt{2}k,c=k$,那么由余弦定理知$\cos A=\frac{(\sqrt{2}k)^2+k^2-(2k)^2}{2\sqrt{2}k\times k}=-\frac{\sqrt{2}}{4}$.

8. D　$f'(x)=A\omega\cos(\omega x+\varphi)$,由图象可知$A\omega=1,\frac{T}{4}=\frac{7\pi}{12}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4},T=\pi,\omega=2$,

$A=\frac{1}{2}$.将点$(\frac{\pi}{3},0)$代入$f'(x)=A\omega\cos(\omega x+\varphi)$,得$0=2A\cos(2\times\frac{\pi}{3}+\varphi)$,

解得$\varphi=-\frac{\pi}{6}+k\pi,k\in\mathbf{Z},\because|\varphi|<\frac{\pi}{2},\therefore\varphi=-\frac{\pi}{6}$.故$f(x)=\frac{1}{2}\sin(2x-\frac{\pi}{6})$.

9. B　$\because\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$的夹角为$60^\circ$,且$|\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{b}|=2,\therefore\boldsymbol{a}^2+4\boldsymbol{b}^2-4\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}|^2+4|\boldsymbol{b}|^2-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=4\geqslant4|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|-2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|=2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,即$|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\leqslant2,\therefore\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\frac{1}{2}|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\leqslant1$.

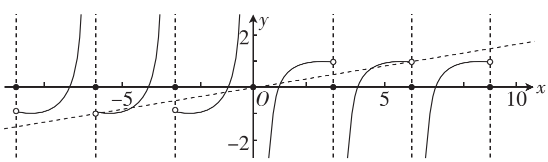
10. C

11. A

12. D　依题意,$f'(x)=\frac{\mathrm{e}(1-\ln x)}{x^2}$,故函数$f(x)$在$(0,\mathrm{e})$上单调递增,在$(\mathrm{e},3)$上单调递减,

故当$x\in(0,3)$时,$f(x)_{\max}=f(\mathrm{e})=1$,又函数$f(x)$是定义在$\mathbf{R}$上的奇函数,且$x>0$时,$f(-x)+f(x+3)=0$,即$f(x+3)=f(x)$,且$f(0)=0$;由$6f(x)-x=0$可知,$f(x)=\frac{x}{6}$.

在同一直角坐标系中,作出函数$y=f(x)$与$y=\frac{x}{6}$在$[-9,9]$上的图象如下图所示,



观察可知，$y=f(x)$与 $y=\frac{x}{6}$有 7 个交点，即方程 $6f(x)-x=0$ 的解有 7 个，故选 D.

13. $\frac{1}{2}$

14. $(-3,-9)$　由 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$ 得 $t=6$，$\therefore \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(-3,-9)$.

15. $(-\infty,8]$　$f'(x)=2x-\frac{m}{x}=\frac{2x^2-m}{x}$，令 $f'(x)\geqslant 0$，故 $m\leqslant 2x^2$ 在$[2,+\infty)$上恒成立，故 $m\leqslant 8$，故实数 m 的取值范围为$(-\infty,8]$.

16. $\left(\frac{13}{18},+\infty\right)$　$\because b_1=\frac{3}{2}(3-1)=3$，$n>1$ 时，$b_n=\frac{3}{2}(3^n-1-3^{n-1}+1)=3^n$，结合 b_1，

又 $a_n=2b_n+3$，$\therefore a_n=2\times 3^n+3$. 由 $\lambda a_n>3^n+36(n-3)+3\lambda$，得 $\lambda>\frac{3^n+36(n-3)}{2\times 3^n}=\frac{1}{2}+\frac{18(n-3)}{3^n}$，

因为$\frac{18(n-2)}{3^{n+1}}-\frac{18(n-3)}{3^n}=\frac{18(7-2n)}{3^{n+1}}$，所以当 $n=4$ 时，$\frac{3^n+36(n-3)}{2\times 3^n}=\frac{1}{2}+\frac{18(n-3)}{3^n}=\frac{13}{18}$，所以 $\lambda>\frac{13}{18}$.

17. 解：(1)因为$\frac{2}{a_n}=4n-2$，所以$\frac{a_n+2}{a_n}=1+\frac{2}{a_n}=4n-1$，

所以$\{\frac{a_n+2}{a_n}\}$是首项为 3，公差为 4 的等差数列.

所以 $S_n=3n+\frac{n(n-1)}{2}\times 4=2n^2+n$. ………………………………………………………… 5 分

(2)因为 $b_n=a_na_{n+1}=\frac{1}{2n-1}\times\frac{1}{2n+1}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})$，

所以 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_{n-1}+b_n$

$=\frac{1}{2}[(1-\frac{1}{3})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})+\cdots+(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1})+(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1})]$

$=\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2n+1})=\frac{n}{2n+1}$. ………………………………………………………………… 10 分

18. 解：(1)在$\triangle ABC$ 中，$A+B+C=\pi$，那么由$\sqrt{3}\sin C-\cos B=\cos(A-C)$，可得$\sqrt{3}\sin C=\cos(A-C)+\cos B$ $=\cos(A-C)-\cos(A+C)=2\sin A\sin C$，得 $\sin A=\frac{\sqrt{3}}{2}$，则在锐角$\triangle ABC$ 中，$A=\frac{\pi}{3}$. …………………… 6 分

(2)由(1)知 $A=\frac{\pi}{3}$，且 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}bc\sin A=3\sqrt{3}$，得 $bc=12$，由余弦定理得

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，那么，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-bc=(b+c)^2-3bc$，

则$(b+c)^2=a^2+3bc=48$，可得 $b+c=4\sqrt{3}$. ………………………………………………………… 12 分

19. 解：(1) $f(x)=1+\cos\omega x+a+\sqrt{3}\sin\omega x=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)+a+1$，

因为函数 $f(x)$在 $\mathbf{R}$ 上的最大值为 2，

所以 $3+a=2$，故 $a=-1$. ……………………………………………………………………………… 6 分

(2)由(1)知 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$,

把函数 $f(x)=2\sin\left(\omega x+\frac{\pi}{6}\right)$的图象向右平移$\frac{\pi}{6\omega}$个单位,可得函数 $y=g(x)=2\sin\omega x$,

又 $y=g(x)$在$\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$上为增函数,∴$g(x)$的周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}\geqslant\pi$,即 $\omega\leqslant 2$,所以 ω 的最大值为 2. ……… 12 分

20. 解:(1) $f(x)=\sin(x+\frac{\pi}{6})+\sin(x-\frac{\pi}{6})+a\cos x+b=2\sin x\cos\frac{\pi}{6}+a\cos x+b$

$=\sqrt{3}\sin x+a\cos x+b=\sqrt{a^2+3}\sin(x+\theta)+b$(其中 $\tan\theta=\frac{a}{\sqrt{3}}$),

所以,函数 $f(x)$的最小正周期为 2π. …………………………………………………………………… 6 分

(2) 由(1)可知:$f(x)$的最小值为$-\sqrt{a^2+3}+b$,所以,$-\sqrt{a^2+3}+b=2$. ①

另外,由 $f(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$上单调递增,可知$f(x)$在区间$\left(-\frac{\pi}{3},0\right)$上的最小值为 $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$,

所以,$f\left(-\frac{\pi}{3}\right)=2$,得 $a+2b=7$, ②

联立①②解得 $a=-1,b=4$. …………………………………………………………………………… 12 分

21. 解:(1)因为 $S_{n+1}-(n+1)=S_n+a_n+n$,所以 $a_{n+1}=a_n+2n+1$,

所以 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_3-a_2)+(a_2-a_1)+a_1=(2n-1)+(2n-3)+\cdots+5+3+1=$

$\frac{(2n-1+1)n}{2}=n^2$,

所以$\{a_n\}$的通项公式为 $a_n=n^2$.

由 $b_{n+1}=3b_n+2$,得 $b_{n+1}+1=3(b_n+1)$,

所以$\{b_n+1\}$是等比数列,首项为 $b_1+1=2$,公比为 3,所以 $b_n+1=2\cdot 3^{n-1}$,

所以$\{b_n\}$的通项公式为 $b_n=2\cdot 3^{n-1}-1$. ……………………………………………………………… 6 分

(2)$c_n=\frac{2(n^2+n)}{2n\cdot 3^{n-1}}=\frac{n+1}{3^{n-1}}$,

所以 $T_n=\frac{2}{3^0}+\frac{3}{3^1}+\frac{4}{3^2}+\cdots+\frac{n}{3^{n-2}}+\frac{n+1}{3^{n-1}}$, ①

则 $3T_n=\frac{2\cdot 3}{3^0}+\frac{3}{3^0}+\frac{4}{3^1}+\cdots+\frac{n}{3^{n-3}}+\frac{n+1}{3^{n-2}}$, ②

②-①得 $2T_n=6+(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-2}})-\frac{n+1}{3^{n-1}}$

$=6+\frac{1-\frac{1}{3^{n-1}}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n+1}{3^{n-1}}=\frac{15}{2}-\frac{2n+5}{2\cdot 3^{n-1}}$.

所以 $T_n=\frac{15}{4}-\frac{2n+5}{4\cdot 3^{n-1}}$. ……………………………………………………………… 12 分

22. 解：(1)易知 $f(x)$定义域为$(0,+\infty)$，

$f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$，令 $f'(x)=0$，得 $x=1$. ………………………………………………………… 2 分

当 $0<x<1$ 时，$f'(x)>0$；当 $x>1$ 时，$f'(x)<0$.

$\therefore f(x)$在$(0,1)$上是增函数，在$(1,+\infty)$上是减函数. ………………………………………… 4 分

(2)$\because g(x)=1+\ln x+mx$，$g'(x)=m+\dfrac{1}{x}$，$x\in(0,e]$，

①若 $m\geqslant 0$，则 $g'(x)\geqslant 0$，从而 $g(x)$在$(0,e]$上是增函数，$\therefore g(x)_{\max}=g(e)=me+2\geqslant 0$，不合题意.

②若 $m<0$，则由 $g'(x)>0$，即 $0<x<-\dfrac{1}{m}$，若$-\dfrac{1}{m}\geqslant e$，$g(x)$在$(0,e]$上是增函数，由①知不合题意.

由 $g'(x)<0$，即$-\dfrac{1}{m}<x\leqslant e$.

从而 $g(x)$在$\left(0,-\dfrac{1}{m}\right)$上是增函数，在$\left(-\dfrac{1}{m},e\right]$为减函数，

$\therefore g(x)_{\max}=g\left(-\dfrac{1}{m}\right)=\ln\left(-\dfrac{1}{m}\right)$，

令 $\ln(-\dfrac{1}{m})=-3$，$\therefore m=-e^3$，$\because -\dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{e^3}<e$，$\therefore$所求的 $m=-e^3$. ……………………………… 8 分

(3)$\because x\geqslant 1$ 时 $f(x)\geqslant\dfrac{k}{x+1}$恒成立，$\therefore k\leqslant(x+1)f(x)=\ln x+\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}+1$，

令 $h(x)=\ln x+\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}+1$，$\therefore h'(x)=\dfrac{x-\ln x}{x^2}$恒大于 0，$\therefore h(x)$在$[1,+\infty)$为增函数，

$\therefore h(x)_{\min}=h(1)=2$，$\therefore k\leqslant 2$. ……………………………………………………………………… 12 分