

复旦附中分校高三月考数学试卷

2016.11.28

一. 填空题

1. 函数 $f(x) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}$ 的定义域是_____
2. 已知复数 z 满足 $z+i=1-iz$ (i 是虚数单位), 则 $z =$ _____
3. 以抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点 F 为圆心, 与抛物线的准线相切的圆的标准方程为_____
4. 二元一次方程组的增广矩阵是 $\begin{pmatrix} m & 4 & m+2 \\ 1 & m & m \end{pmatrix}$, 若该方程组无解, 则实数 $m =$ _____
5. 已知定义域为 R 的函数 $y = f(x)$ 的图像关于点 $(-1, 0)$ 对称, $y = g(x)$ 是 $y = f(x)$ 的反函数, 若 $x_1 + x_2 = 0$, 则 $g(x_1) + g(x_2) =$ _____
6. 已知 $x, y \in R^+$, 且 $4x + y = 1$, 则 $\frac{1}{x} + \frac{9}{y}$ 的最小值是_____
7. 若二项式 $(x + \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 展开式中只有第四项的系数最大, 则这个展开式中任取一项为有理项的概率是_____
8. 等比数列 $\{a_n\}$ 前 n 项和 $S_n = a + (-\frac{1}{3})^n$, $n \in N^*$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{2n-1}) =$ _____
9. 把一个大金属球表面涂漆, 共需油漆 2.4 公斤, 若把这个大金属球熔化制成 64 个大小都相同的小金属球, 不计损耗, 将这些小金属球表面都涂漆, 需要用漆_____公斤
10. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3tx + 18, & x \leq 3 \\ (t-13)\sqrt{x-3}, & x > 3 \end{cases}$, 记 $a_n = f(n)$ ($n \in N^*$), 若 $\{a_n\}$ 是递减数列, 则实数 t 的取值范围是_____
11. 已知 $f(x) = a \sin 2x + b \cos 2x$ (a, b 为常数), 若对于任意 $x \in R$ 都有 $f(x) \geq f(\frac{5\pi}{12})$, 则方程 $f(x) = 0$ 在区间 $[0, \pi]$ 内的解集为_____
12. 对于具有相同定义域 D 的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$, 若存在函数 $h(x) = kx + b$ (k, b 为常数), 对任给的正数 m , 存在相应的 x_0 , 使得当 $x \in D$ 且 $x > x_0$ 时, 总有 $\begin{cases} 0 < f(x) - h(x) < m \\ 0 < h(x) - g(x) < m \end{cases}$, 则称直线 $l: y = kx + b$ 为 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 的“分渐近线”, 给出定义域 $D = (1, +\infty)$ 的四组函数如下: ① $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$; ② $f(x) = 10^{-x} + 2$, $g(x) = \frac{2x-3}{x}$; ③ $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$, $g(x) = \frac{x \ln x + 1}{\ln x}$; ④ $f(x) = \frac{2x^2}{x+1}$, $g(x) = 2(x-1-e^{-x})$;
其中, 曲线 $y = f(x)$ 和 $y = g(x)$ 存在“分渐近线”的是_____

20. 已知 $\triangle ABC$ 的三个内角分别为 A 、 B 、 C ，且 $2\sin^2(B+C) = \sqrt{3}\sin 2A$ ；

- (1) 求 A 的度数；
- (2) 若 $BC=7$ ， $AC=5$ ，求 $\triangle ABC$ 的面积 S ；

21. 平面直角坐标系中，点 $A(-2,0)$ 、 $B(2,0)$ ，平面内任意一点 P 满足：直线 PA 的斜率 k_1 ，直线 PB 的斜率 k_2 ， $k_1k_2 = -\frac{3}{4}$ ，点 P 的轨迹为曲线 C_1 ，双曲线 C_2 以曲线 C_1 的上下两顶点 M 、 N 为顶点， Q 是双曲线 C_2 上不同于顶点的任意一点，直线 QM 的斜率为 k_3 ，直线 QN 的斜率为 k_4 ；

- (1) 求曲线 C_1 的方程；
- (2) 如果 $k_1k_2 + k_3k_4 \geq 0$ ，分别求双曲线 C_2 的两条渐近线倾斜角的取值范围；

22. 各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足： $a_1=1$ ， $4S_n = (a_n+1)^2$ ， $n \in N^*$ ；

- (1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；
- (2) 设 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n+1}}$ ， $n \in N^*$ ，试求 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n - 2n)$ 的值；
- (3) 是否存在大于2的正整数 m 、 k ，使得 $a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_{m+k} = 300$ ？若存在，求出所有符合条件的 m 、 k ；若不存在，请说明理由；

23. 已知函数 $f(x) = \log_2(x+a)$ ；

- (1) 若 $0 < f(1-2x) - f(x) < \frac{1}{2}$ ，当 $a=1$ 时，求 x 的取值范围；
- (2) 若定义在 R 上奇函数 $g(x)$ 满足 $g(x+2) = -g(x)$ ，且当 $0 \leq x \leq 1$ 时， $g(x) = f(x)$ ，求 $g(x)$ 在 $[-3, -1]$ 上的反函数 $h(x)$ ；
- (3) 对于(2)中定义在 R 上的 $g(x)$ ，若关于 x 的不等式 $g\left(\frac{t-2^x}{8+2^{x+3}}\right) \geq 1 - \log_2 3$ 在 R 上恒成立，求实数 t 的取值范围；

参考答案

一. 填空题

1. $[-2, 0) \cup (0, 2]$ 2. $-i$ 3. $(x-1)^2 + y^2 = 4$ 4. -2
5. -2 6. 25 7. $\frac{4}{7}$ 8. $-\frac{3}{2}$ 9. 9.6
10. $(\frac{5}{3}, 4)$ 11. $\{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\}$ 12. ②④

二. 选择题

13. B 14. B 15. B 16. B 17. A 18. B

三. 解答题

19. (1) $\frac{8}{3}$; (2) $\frac{\pi}{3}$;
20. (1) $\frac{\pi}{3}$; (2) $10\sqrt{3}$;
21. (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (x \neq \pm 2)$; (2) $[\arctan \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{2}), (\frac{\pi}{2}, \pi - \arctan \frac{\sqrt{3}}{2}]$;
22. (1) $a_n = 2n - 1$; (2) 2 ; (3) $\begin{cases} k = 5 \\ m = 23 \end{cases}, \begin{cases} k = 9 \\ m = 11 \end{cases}$;
23. (1) $3 - 2\sqrt{2} < x < \frac{1}{3}$; (2) $h(x) = \begin{cases} -2^x - 1, & 0 \leq x \leq 1 \\ 2^{-x} - 3, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$; (3) $[-4, 20]$