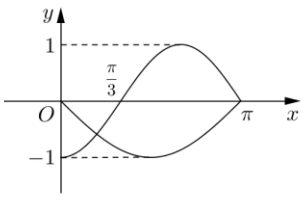
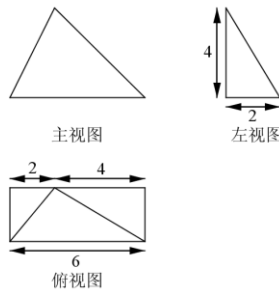


# 格致中学高三月考数学试卷

2016.12

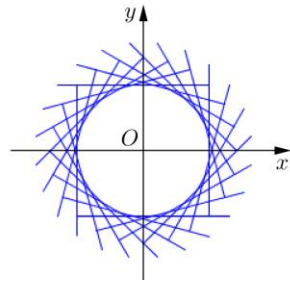
## 一. 填空题

1. 已知复数  $z = \frac{1-3i}{1+i}$ , 则复数  $z$  的虚部为\_\_\_\_\_
  2. 已知集合  $M = \{y | y = 2^x, x > 0\}$ ,  $N = \{y | y = \sqrt{2x-x^2}\}$ , 则  $M \cap N =$ \_\_\_\_\_
  3. 已知  $|\vec{a}| = 1$ ,  $|\vec{b}| = \sqrt{2}$ , 且  $\vec{a} \parallel \vec{b}$ , 则  $\vec{a} \cdot \vec{b} =$ \_\_\_\_\_
  4. 不等式  $\frac{(x-1)(x-2)}{\sqrt{x-1}} \geq 0$  的解集为\_\_\_\_\_
  5. 函数  $f(x) = \sin(2x + \varphi)$  ( $-\pi < \varphi < 0$ ) 图像的一条对称轴是直线  $x = \frac{\pi}{8}$ , 则  $\varphi =$ \_\_\_\_\_
  6. 已知函数  $y = f(x)$  是偶函数,  $y = g(x)$  的奇函数, 它们的定义域为  $[-\pi, \pi]$ , 且它们在  $x \in [0, \pi]$  上的图像如图所示, 则不等式  $\frac{f(x)}{g(x)} > 0$  的解集为\_\_\_\_\_
- 
7. 如图是某一几何体的三视图, 则这个几何体的体积为\_\_\_\_\_
- 
8. 已知动点  $(x, y)$  符合条件  $\begin{cases} y \geq 2x-1 \\ y \geq -2x+3 \end{cases}$ , 则  $\frac{y}{x}$  范围为\_\_\_\_\_
  9. 在  $(\sqrt{2} - \sqrt[3]{3})^{50}$  的展开式中有\_\_\_\_\_项为有理数
  10. 若  $a, b \in \{1, 2, 3, \dots, 11\}$ , 构造方程  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , 则该方程表示的曲线为落在矩形区域  $\{(x, y) | |x| < 11, |y| < 9\}$  内的椭圆的概率是\_\_\_\_\_
  11. 若关于  $x$  的方程  $a^{2x} + (1 + \frac{1}{m})a^x + 1 = 0$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) 有解, 则  $m$  的取值范围是\_\_\_\_\_
  12. 已知正方体  $ABCD - A_1B_1C_1D_1$  棱长为 1, 动点  $P$  在此正方体的表面上运动, 且  $PA = r$  ( $0 < r < \sqrt{3}$ ), 记点  $P$  的轨迹长度为  $f(r)$ , 则关于  $r$  的方程  $f(r) = \frac{3\pi}{2}$  的解集为\_\_\_\_\_

## 二. 选择题

13. “直线与抛物线相切”是“直线与抛物线只有一个公共点”的( )条件
  - A. 充分非必要
  - B. 必要非充分
  - C. 充分必要
  - D. 既非充分又非必要
14. 已知  $a, b, c$  满足  $c < b < a$ , 且  $ac < 0$ , 那么下列结论中不一定成立的是( )
  - A.  $ab > ac$
  - B.  $c(b-a) < 0$
  - C.  $cb^2 < ab^2$
  - D.  $ac(a-c) < 0$

15. 右图为从空中某个角度俯视北京奥运会主体育场“鸟巢”顶棚所得的局部示意图，在平面直角坐标系中，下列给定的一系列直线中（其中 $\theta$ 为参数， $\theta \in \mathbf{R}$ ），能形成这种效果的只可能是（ ）



- A.  $y = x \sin \theta + 1$                       B.  $y = x + \cos \theta$   
 C.  $x \cos \theta + y \sin \theta + 1 = 0$       D.  $y = x \cos \theta + \sin \theta$

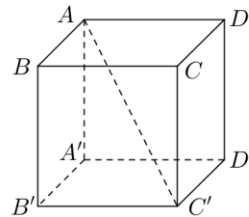
16. 已知函数  $f(x) = a \sin x - b \cos x$  ( $a, b$  为常数,  $a \neq 0, x \in \mathbf{R}$ ) 的图像关于直线  $x = \frac{\pi}{4}$  对称, 则函数  $y = f(\frac{3\pi}{4} - x)$  为 ( )

- A. 偶函数且图像关于点  $(\pi, 0)$  对称      B. 奇函数且图像关于点  $(\pi, 0)$  对称  
 C. 奇函数且图像关于点  $(\frac{3\pi}{2}, 0)$  对称      D. 偶函数且图像关于点  $(\frac{3\pi}{2}, 0)$  对称

17. 对于正整数  $n$ , 定义“ $n!!$ ”如下: 当  $n$  为偶数时,  $n!! = n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots 6 \cdot 4 \cdot 2$ ; 当  $n$  为奇数时,  $n!! = n \cdot (n-2) \cdot (n-4) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1$ ; 则: ①  $(2005!!) \cdot (2004!!) = 2005!$ ; ②  $2004!! = 2^{1002} \cdot 1002!$ ; ③  $2004!!$  的个位数是 0; ④  $2005!!$  的个位数是 5; 上述命题中, 正确的命题有 ( )

- A. 1 个      B. 2 个      C. 3 个      D. 4 个

18. 在正方体  $ABCD - A'B'C'D'$  中, 若点  $P$  (异于点  $B$ ) 是棱上一点, 则满足  $BP$  与  $AC'$  所成的角为  $45^\circ$  的点  $P$  的个数为 ( )

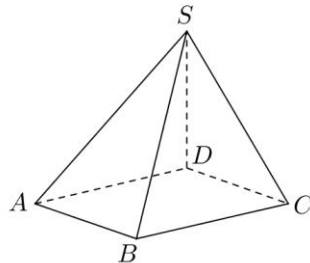


- A. 0      B. 3      C. 4      D. 6

### 三. 解答题

19. 如图, 四棱锥  $S - ABCD$  的底面是边长为 1 的菱形, 其中  $\angle DAB = 60^\circ$ ,  $SD$  垂直于底面  $ABCD$ ,  $SB = \sqrt{3}$ ;

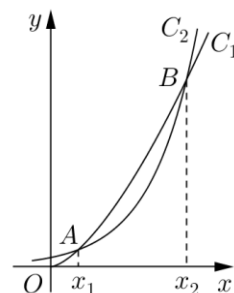
- (1) 求四棱锥  $S - ABCD$  的体积;  
 (2) 设棱  $SA$  的中点为  $M$ , 求异面直线  $DM$  与  $SB$  所成角的大小;



20. 函数  $y = 2^x$  和  $y = x^3$  的图像的示意图如图所示，设两函数的图像交于点  $A(x_1, y_1)$ ， $B(x_2, y_2)$ ，且  $x_1 < x_2$ ；

(1) 设曲线  $C_1$ 、 $C_2$  分别对应函数  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$ ，请指出图中曲线  $C_1$ 、 $C_2$  对应的函数解析式，若不等式  $kf[g(x)] - g(x) < 0$  对任意  $x \in (0, 1)$  恒成立，求  $k$  的取值范围；

(2) 若  $x_1 \in [a, a+1]$ ， $x_2 \in [b, b+1]$ ，且  $a, b \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$ ，求  $a$ 、 $b$ ；

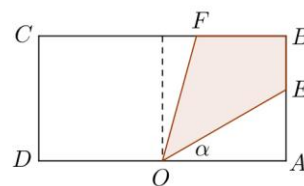


21. 已知  $m > 1$ ，直线  $l: x - my - \frac{m^2}{2} = 0$ ，椭圆  $C: \frac{x^2}{m^2} + y^2 = 1$ ， $F_1$ 、 $F_2$  分别为椭圆  $C$  的左、右焦点；

(1) 当直线  $l$  过右焦点  $F_2$  时，求直线  $l$  的方程；

(2) 设直线  $l$  与椭圆  $C$  交于  $A, B$  两点， $\triangle AF_1F_2$ 、 $\triangle BF_1F_2$  的重心分别为  $G$ 、 $H$ ，若原点  $O$  在以线段  $GH$  为直径的圆上，求实数  $m$  的值；

22. 如图一块长方形区域  $ABCD$ ， $AD=2$ ， $AB=1$ ，在边  $AD$  的中点  $O$  处有一个可转动的探照灯，其照射角  $\angle EOF$  始终为  $\frac{\pi}{4}$ ，设  $\angle AOE = \alpha$ ，探照灯照射在长方形  $ABCD$  内部区域的面积为  $S$ ；



(1) 当  $0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$  时，求  $S$  关于  $\alpha$  的函数关系式；

(2) 当  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$  时，求  $S$  的最大值；

(3) 若探照灯每 9 分钟旋转“一个来回”（ $OE$  自  $OA$  转到  $OC$ ，再回到  $OA$ ，称“一个来回”，忽略  $OE$  在  $OA$  及  $OC$  处所用的时间），且转动的角速度大小一定，设  $AB$  边上有一点  $G$ ，且  $\angle AOG = \frac{\pi}{6}$ ，求点  $G$  在“一个来回”中被照到的时间；

23. 设函数  $f(x) = x^2 - (3k + 2^k)x + 3k \cdot 2^k$ ， $x \in R$ ；

(1) 若  $f(1) \leq 0$ ，求实数  $k$  的取值范围；

(2) 若  $k$  为正整数，设  $f(x) \leq 0$  的解集为  $[a_{2k-1}, a_{2k}]$ ，求  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  及数列  $\{a_n\}$  的前  $2n$  项和  $S_{2n}$ ；

(3) 对于 (2) 中的数列  $\{a_n\}$ ，设  $b_n = \frac{(-1)^n}{a_{2n-1}a_{2n}}$ ，求数列  $\{b_n\}$  的前  $n$  项和  $T_n$  的最大值；

## 参考答案

### 一. 填空题

1.  $-2$       2.  $\emptyset$       3.  $\pm\sqrt{2}$       4.  $[2, +\infty)$       5.  $-\frac{3\pi}{4}$   
6.  $(-\pi, -\frac{\pi}{3}) \cup (0, \frac{\pi}{3})$       7.  $16$       8.  $(-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$       9.  $9$   
10.  $\frac{80}{121}$       11.  $[-\frac{1}{3}, 0)$       12.  $\{1, \sqrt{2}\}$

### 二. 选择题

13. A      14. C      15. C      16. B      17. D      18. B

### 三. 解答题

19. (1)  $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ; (2)  $\frac{\pi}{3}$ ;  
20. (1)  $f(x) = x^3$ ,  $g(x) = 2^x$ ,  $k \leq \frac{1}{4}$ ; (2)  $a = 1$ ,  $b = 9$ ;  
21. (1)  $x - \sqrt{2}y - 1 = 0$ ; (2)  $m = 2$ ;  
22. (1) 当  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{4}$ ,  $S = 1 - \frac{1}{2} \tan \alpha - \frac{1}{2} \tan(\frac{\pi}{4} - \alpha)$ ; 当  $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ ,  
 $S = \frac{1}{2} (\frac{1}{\tan \alpha} + \frac{1}{\tan(\frac{3\pi}{4} - \alpha)})$ ; (2)  $2 - \sqrt{2}$ ; (3) 2 分钟;  
23. (1)  $0 \leq k \leq \frac{1}{3}$ ; (2)  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 15$ ,  $S_{2n} = \frac{3}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 2 + 2^{n+1}$ ; (3)  $-\frac{1}{8}$ ;