

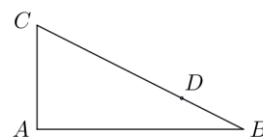
延安中学高三月考数学试卷

2016.12

一. 填空题

1. 已知集合 $U = \{x | 1 < x < 5, x \in \mathbb{N}^*\}$, 集合 $A = \{2, 3\}$, 则 $C_U A =$ _____
2. 已知 $\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \frac{1}{3}$, 则 $\cos(\pi - \alpha) =$ _____
3. 直线 $l_1: 2x - y + 1 = 0$ 与直线 $l_2: x - y - 2 = 0$ 的夹角大小为 _____
4. 不等式 $\frac{4}{x} > |x|$ 的解集为 _____
5. 函数 $f(x) = \log_2(1+x)$ ($x > 0$) 的反函数 $f^{-1}(x) =$ _____
6. 设直线 $ax - y + 3 = 0$ 与圆 $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 4$ 相交于 A 、 B 两点, 且弦 AB 的长为 $2\sqrt{3}$, 则 $a =$ _____
7. 已知双曲线 C 经过点 $(1, 1)$, 它的一条渐近线方程为 $y = \sqrt{3}x$, 则双曲线 C 的标准方程为 _____

8. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle BAC = 90^\circ$, $AB = 6$, D 在斜边 BC 上, 且 $CD = 3DB$, 则 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} =$ _____



9. 若 m 是 2 和 8 的等比中项, 则圆锥曲线 $x^2 + \frac{y^2}{m} = 1$ 的焦距为 _____
10. 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 若对于任意的正整数 k , 均有 $a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_k)$ 成立, 则公比 $q =$ _____

11. 下列有关平面向量分解定理的四个命题中, 所有正确命题的序号是 _____

- ① 一个平面内有且只有一对不平行的向量可作为表示该平面所有向量的基
- ② 一个平面内有无数多对不平行向量可作为表示该平面所有向量的基
- ③ 平面向量的基向量可能互相垂直
- ④ 一个平面内任一非零向量都可唯一的表示成该平面内三个互不平行向量的线性组合

12. 设点 $M(m, 0)$ 在椭圆 $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ 的长轴上, 点 P 是椭圆上任意一点, 当 $|MP|$ 最小时, 点 P 恰好落在椭圆的右顶点, 则实数 m 的取值范围是 _____

13. 函数 $f(x)$ 的定义域为实数集 R , $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x \leq 1 \\ (0.5)^x - 1, & -1 \leq x < 0 \end{cases}$, 对于任意的 $x \in R$ 都有 $f(x+1) = f(x-1)$, 若在区间 $[-1, 3]$ 上函数 $g(x) = f(x) - mx - m$ 恰有四个不同的零点, 则实数 m 的取值范围是 _____

14. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列, 记 $b_n = a_n a_{n+1} a_{n+2}$ ($n \in \mathbb{N}^*$), 设 S_n 为 $\{b_n\}$ 的前 n 项和, 且 $3a_5 = 8a_{12} > 0$, 则当 S_n 取最大值时, $n =$ _____

二. 选择题

15. 已知条件 $p: \log_2(x-1) < 1$ 的解, $q: x^2 - 2x - 3 < 0$ 的解, 则 p 是 q 的 () 条件

- A. 充分非必要 B. 必要非充分 C. 充分必要 D. 既非充分又非必要

16. 若方程 $x^2 \cos \alpha - y^2 \sin \alpha + 2 = 0$ 所表示的曲线为双曲线, 则圆 $x^2 + y^2 + 2x \cos \alpha - 2y \sin \alpha = 0$ 的圆心在 () 象限

- A. 第一或第三 B. 第二或第四 C. 第一或第二 D. 第三或第四

17. 现有某种细胞 100 个, 其中有约占 $\frac{1}{2}$ 的细胞每小时分裂一次, 即由 1 个细胞分裂成 2 个细胞, 按这种规律发展下去, 要使细胞总数超过 10^{10} 个, 需至少经过 () 小时

- A. 42 B. 46 C. 50 D. 52

18. 已知 $f(x)$ 是定义在 R 上的增函数, 函数 $y = f(x-1)$ 的图像关于点 $(1, 0)$ 对称, 若实数 m, n 满足等式 $f(n-3) + f(\sqrt{4m-m^2-3}) = 0$, 则 $\frac{n}{m}$ 的取值范围是 ()

- A. $[2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}]$ B. $[1, 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}]$ C. $[2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}, 3]$ D. $[1, 3]$

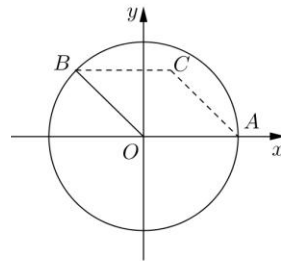
三. 解答题

19. 如图, 在 xOy 平面上, 点 $A(1, 0)$ 、点 B 在单位圆上, $\angle AOB = \theta$ ($0 < \theta < \pi$);

(1) 若点 $B(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5})$, 求 $\tan(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})$ 的值;

(2) 若 $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$, 四边形 $OACB$ 的面积

用 S_θ 表示, 求 $S_\theta + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ 的取值范围;



20. 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$), 右焦点 $F(\sqrt{2}, 0)$, 点 $D(\sqrt{2}, 1)$ 在椭圆上;

(1) 求椭圆 C 的标准方程;

(2) 是否存在过原点的直线 l 与椭圆 C 交于 A 、 B 两点, 且 $\angle AFB = 90^\circ$? 若存在, 请求出所有符合要求的直线; 若不存在, 请说明理由;

21. 某厂预计从 2016 年初开始的前 x 个月内, 市场对某种产品的需求总量 $f(x)$ (单位: 台) 与月份 x 的近似关系为: $f(x) = x(x+1)(35-2x)$, $x \in N^*$ 且 $x \leq 12$;

(1) 写出 2016 年第 x 个月的需求量 $g(x)$ 与月份 x 的关系式;

(2) 如果该厂此种产品每月生产 a 台, 为保证每月满足市场需求, 则 a 至少为多少?

22. 设 $f(x)$ 是定义在 $[a, b]$ 上的函数, 若存在 $\hat{x} \in (a, b)$, 使得 $f(x)$ 在 $[a, \hat{x}]$ 上单调递增, 在 $[\hat{x}, b]$ 上单调递减, 则称 $f(x)$ 为 $[a, b]$ 上的单峰函数, \hat{x} 称为峰点, 包含峰点的区间称为含峰区间;

(1) 判断下列函数: ① $f_1(x) = x - 2x^2$, ② $f_2(x) = |\log_2(x+0.5)|$, 哪些是 “[0,1] 上的单峰函数”? 若是, 指出峰点, 若不是, 说明理由;

(2) 若函数 $f(x) = ax^3 + x$ ($a < 0$) 是 $[1, 2]$ 上的单峰函数, 求实数 a 的取值范围;

(3) 设 $f(x)$ 是 $[a, b]$ 上的单峰函数, 若 $m, n \in (a, b)$, $m < n$, 且 $f(m) \geq f(n)$, 求证: (a, n) 为 $f(x)$ 的含峰区间;

23. 设数列 $\{a_n\}$ 对任意 $n \in N^*$ 都有 $(kn+b)(a_1+a_n) + p = 2(a_1+a_2+\dots+a_n)$, 其中 k 、 b 、 p 是常数;

(1) 当 $k=0$ 、 $b=3$ 、 $p=-4$ 时, 求 $a_1+a_2+\dots+a_n$;

(2) 当 $k=1$ 、 $b=0$ 、 $p=0$ 时, 若 $a_3=3$, $a_9=15$, 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 若数列 $\{a_n\}$ 中任意 (不同) 两项之和仍是该数列中一项, 则称该数列是 “封闭数列”, 当 $k=1$ 、 $b=0$ 、 $p=0$ 时, 设 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_2 - a_1 = 2$, 试问: 是否存在 “封闭数列” $\{a_n\}$, 使得对任意 $n \in N^*$, 都有 $S_n \neq 0$, 且 $\frac{1}{12} < \frac{1}{S_1} + \frac{1}{S_2} + \dots + \frac{1}{S_n} < \frac{11}{18}$,

若存在, 求数列 $\{a_n\}$ 的首项 a_1 的所有取值, 若不存在, 说明理由;

参考答案

一. 填空题

1. {4} 2. $-\frac{1}{3}$ 3. $\arctan \frac{1}{3}$ 4. (0,2) 5. $2^x - 1 (x > 0)$
6. 0 7. $\frac{3x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ 8. 27 9. $2\sqrt{3}$ 或 $2\sqrt{5}$ 10. $\frac{1}{2}$
11. ②③ 12. [1,4] 13. $(0, \frac{1}{4}]$ 14. 16

二. 选择题

15. A 16. B 17. B 18. C

三. 解答题

19. (1) -3; (2) $(0, \sqrt{2} + 1]$;
20. (1) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1$; (2) $x = 0$;
21. (1) $g(x) = -6x^2 + 72x$; (2) 171;
22. (1) ①是, 峰点 $\frac{1}{4}$, ③不是; (2) $-\frac{1}{3} < a < -\frac{1}{12}$; (3) 略;
23. (1) $\frac{3^n - 1}{2}$; (2) $a_n = 2n - 3$; (3) 存在, $a_1 = 4$ 或 6 或 8 或 10;