

2017 届高三第一阶段教学调研数学试卷

一、 填空题（共 14 题，每题小题 4 分，共 56 分）

1. 已知复数 $z = \frac{i}{\sqrt{2}+i}$ (i 为虚数单位), 则 $z \cdot \bar{z} =$ _____
2. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0 \end{cases}$, 则 $f(f(x)) =$ _____
3. 若不等式组 $\begin{cases} x-1 \geq 2016 \\ x+1 \leq a \end{cases}$ 的解集中有且仅有有限个数, 则 $a =$ _____
4. 函数 $y = \cos^2 x + \sqrt{3} \sin x \cos x$ 的最小值为 _____
5. 设二项式 $\left(3\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^n$ 的展开式中各项系数的和为 p , 二次式系数的和为 q , 且 $p+q=272$, 则 n 的值为 _____
6. 若函数 $f(x) = -x^2 - 10x$ 在 $(-\infty, \lambda]$ 上为增函数, 则方程组 $\begin{cases} (\lambda-1)x + 4y = 1 \\ 3x + \lambda y = 2 \end{cases}$ 的解的组数为 _____
7. 已知 $\arcsin(a^2+1) - \arcsin(b-1) \geq \frac{\pi}{2}$, 则 $\arccos(a^2-b^2) =$ _____
8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , $a_1 = \frac{1}{5}$, 且对任意正整数 m, n 均有 $a_{m+n} = a_m a_n$, 若 $S_n < a$ 对任意的 $n \in \mathbb{N}^*$ 恒成立, 则实数 a 的最小值为 _____
9. 已知函数 $f(x) = ax \sin x - \frac{3}{2}$ ($a \in \mathbb{R}$), 若函数 $f(x)$ 在 $(0, \pi)$ 的零点为 2 个, 则当 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)$ 的最大值为 _____
10. 已知直线 $f(x) = k_0 x + b$ 与曲线 $g(x) = \frac{k^2}{x}$ 交于点 $M(m, -1)$, $N(n, 2)$, 则不等式 $f^{-1}(x) \geq g^{-1}(x)$ 的解集为 _____
11. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 0$, $|a_{n+1}| = |a_n - 2|$, 记数列 $\{a_n\}$ 的前 2016 项和为 S , 则 S 的最

大值为_____

12. 已知点 $A(3,1), B\left(\frac{5}{3}, 2\right)$, 且平行四边形 $ABCD$ 的四个顶点都在函数

$f(x) = \log_2 \frac{x+1}{x-1}$ 的图像上, 设 O 为原点, 已知三角形 OAB 的面积为 S , 则平行四边

形 $ABCD$ 的面积为_____

13. 在边长为 1 的等边 $\triangle ABC$ 中, O 为边 AC 的中点, BO 为边 AC 上的中线, $\overrightarrow{BG} = 2\overrightarrow{GO}$.

设 $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AG}$, 若 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC} (\lambda \in R)$, 则 $|\overrightarrow{AD}| =$ _____

14. 已知 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$, 由 $\sin x = 0$ 有无穷多个根;

$0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$, 可得: $\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots$, 把这个式子的

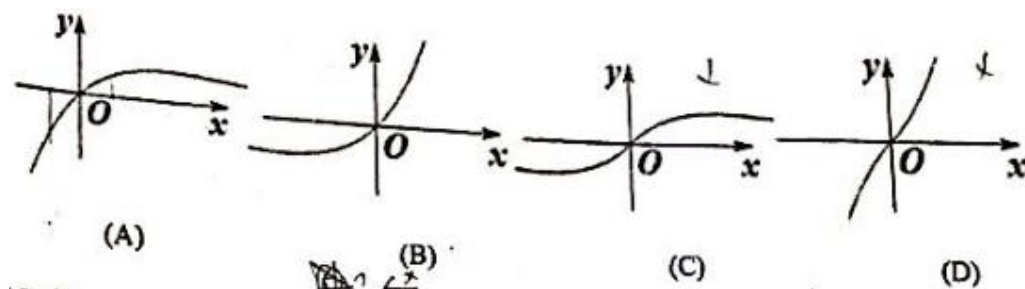
右边展开, 发现 $-x^3$ 的系数为 $\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \dots = \frac{1}{3!}$, 即

$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$, 请由 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{2(n-1)!} + \dots$

出现, 类比上述思路与方法, 可写出类似的一个结论_____

二、 选择题 (4*5=20)

15. 下图中, 哪个最有可能是函数 $y = \frac{x}{2^x}$ 的图像 ()



16. 若 $m, n \in N^*$ 则 $a > b$ 是 $(a^m - b^m) \cdot (a^n - b^n) > 0$ 成立的 ()

A. 充分非必要条件 B. 必要非充分条件 C. 充分必要条件 D. 即非充分又非必要条件

17. 将函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi) (A > 0, \omega > 0)$ 的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位, 所得函数的图

像与函数 $y = f(x)$ 的图像关于 x 轴对称, 则 ω 的值不可能是 ()

A. 2 B. 4 C. 6 D. 10

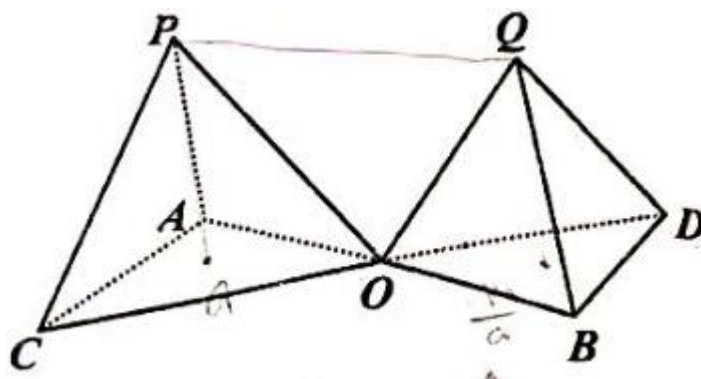
18. 若存在实数 a, b , 对任意实数 $x \in [0, 4]$, 使不等式 $\sqrt{x} - m \leq ax + b \leq \sqrt{x} + m$ 恒成立,

则 m 的取值范围为 ()

- A. $m \geq 1$ B. $m \leq 1$ C. $m \leq \frac{1}{4}$ D. $m \geq \frac{1}{4}$

三、解答题 (12+14+14+16+18)

19. (12 分) 如图所示的“相邻塔”形立体建筑, 已知 $P-OAC$ 和 $Q-OB D$ 是边长分别为 a 和 $\frac{m}{a}$ (m 是常数) 的两个正四面体, 底面中 AB 与 CD 交于点 O , 试求出塔尖 P, Q 之间的距离关于边长 a 的函数, 并求出 a 为多少时, 塔尖 P, Q 之间的距离最短。



20. (本大题两小题, 第 1 小题 6 分, 第 2 题 8 分)

在 $\triangle ABC$ 中, 角 A 、 B 、 C 的对边分别为 a 、 b 、 c 。若 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{2\cos B} = \frac{c}{3\cos C}$, 求

(1) $\tan A : \tan B : \tan C$ 的值;

(2) 求角 A 的值

21. (14 分, 第 1 小题 6 分, 第 2 小题 8 分)

某中学为丰富教职工生活, 在元旦期间举办趣味投篮比赛, 设置 A, B 两个投篮位置, 在 A 点投中一球得 1 分, 在 B 点投中一球得 2 分, 规则是: 每人按先 A 后 B 的顺序各投篮一次 (计为投篮两次), 教师甲在 A 点和 B 点投中的概率分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$, 且在 A, B 两点投中与否相互独立

- (1) 若教师甲投篮两次, 求教师甲投篮得分 0 分的概率
- (2) 若教师乙与教师甲在 A, B 投中的概率相同, 两人按规则投篮两次, 求甲得分比乙高的概率。

22. (16 分) 设 $f(x) = a^{x-1}$, $g(x) = b^{x-1}$ ($a, b > 0$), 记 $h(x) = f(x) - g(x)$

(1) 若 $h(2) = 2, h(3) = 12$, 当 $x \in [1, 3]$ 时, 求 $h(x)$ 的最大值

(2) $a = 2, b = 1$, 且方程 $|h(x)| = t \left(0 < t < \frac{1}{2} \right)$ 有两个不相等实根 m, n , 求 mn 的取值范围

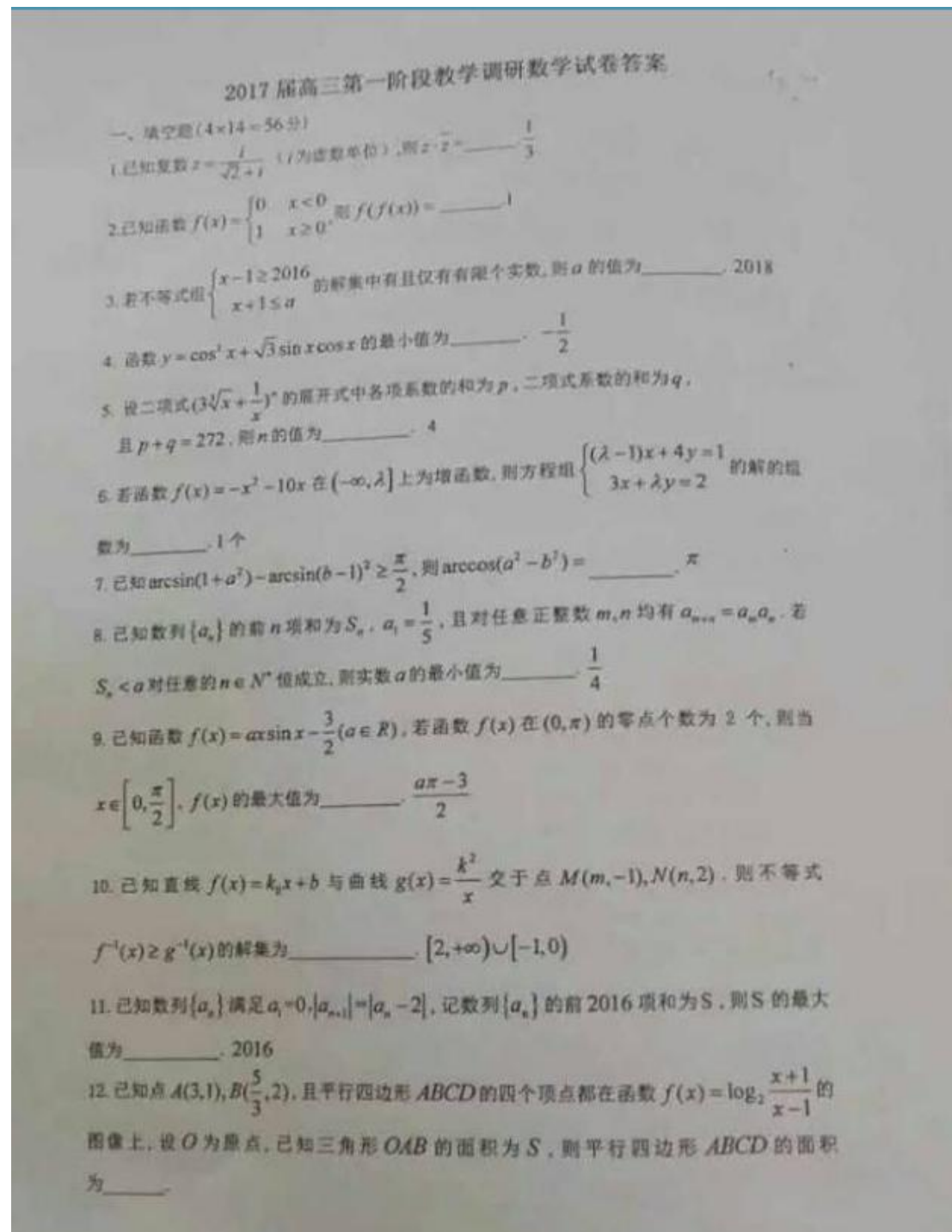
围

(3) 若 $a = 2, h(x) = c^{x-1}$ ($x > 1, c > 0$), 且 a, b, c 是三角形的三边长, 求出 x 的范围

23. (18 分) 正整数数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{S_n}{a_n} = pn + q$ (p, q 为常数), 其中 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项

和. (1) 若 $p=1, q=0$, 求证: $\{a_n\}$ 是等差数列 (2) 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 求 p 的值.

(3) 证明: $a_{2016} = 2016a_1$ 的充要条件是 $p = \frac{1}{2}$



13. 在边长为1的等边 $\triangle ABC$ 中, O 为边 AC 的中点, BO 为边 AC 上的中线, $\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GO}$. 设 $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AG}$, 若 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \lambda \overrightarrow{AC}$ ($\lambda \in \mathbb{R}$), 则 $|\overrightarrow{AD}|$ 的值为 $\sqrt{7}$

14. 已知 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$. 由 $\sin x = 0$ 有无穷多个根:

$0, \pm\pi, \pm2\pi, \pm3\pi, \dots$, 可得: $\sin x = x \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{4\pi^2}\right) \left(1 - \frac{x^2}{9\pi^2}\right) \dots$. 把这个式子的右边

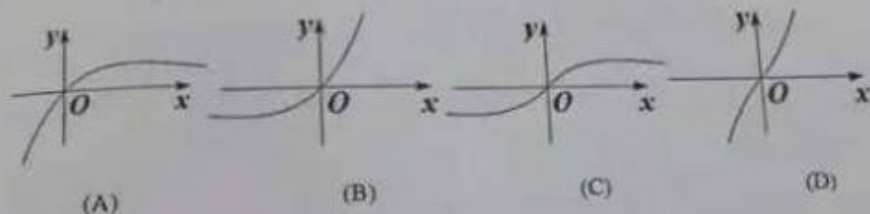
展开, 发现 $-x^3$ 的系数为 $\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{(2\pi)^2} + \frac{1}{(3\pi)^2} + \dots = \frac{1}{3!}$, 即 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}$

请由 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2(n-1)}}{2(n-1)!} + \dots$ 出发, 类比上述思路与方法, 可写

出类似的一个结论 $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots = \frac{\pi^2}{8}$

二、选择题 (4×5=20分)

15. 下图中, 哪个最有可能是函数 $y = \frac{x}{2^x}$ 的图像() A



16. 若 $m, n \in \mathbb{N}^*$, 则 $a > b$ 是 $(a^m - b^m) \cdot (a^n - b^n) > 0$ 成立的() D

(A) 充分非必要条件 (B) 必要非充分条件 (C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

17. 将函数 $f(x) = A \sin(\omega x + \varphi)$ ($A > 0, \omega > 0$) 的图像向左平移 $\frac{\pi}{2}$ 个单位, 所得函数的图像与函数 $y = f(x)$ 的图像关于 x 轴对称, 则 ω 的值不可能是() B

(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 10

18. 若存在实数 a, b , 对任意实数 $x \in [0, 4]$, 使不等式 $\sqrt{x} - m \leq ax + b \leq \sqrt{x} + m$ 恒成立, 则

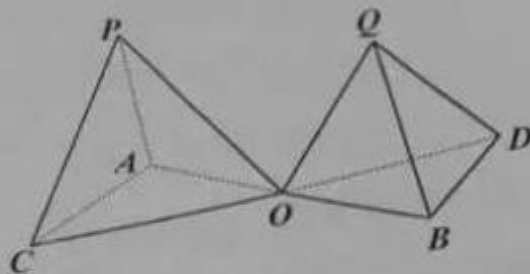
m 的取值范围为() D

(A) $m \geq 1$ (B) $m \leq 1$ (C) $m \leq \frac{1}{4}$ (D) $m \geq \frac{1}{4}$

三、解答题 (12+14+14+16+18=74分)

19. (12分) 如图所示的“相邻塔”形的立体建筑, 已知 $P-OAC$ 和 $Q-OBD$ 是边长分别

为 a 和 $\frac{m}{a}$ (m 是常数) 的两个正四面体, 底面中 AB 与 CD 交于点 O . 试求出塔尖 P, Q 之间的距离关于边长 a 的函数, 并求出 a 为多少时, 塔尖 P, Q 之间的距离最短.



解: 如图, 过点 P 作底面 OAC 的垂线交底面 OAC 于点 O_1 ,

过点 Q 作底面 OBD 的垂线交底面 OBD 于点 O_2 ,

连接 $O_1 O_2$, 则 O_1, O_2, O 三点共线, 且 $PO_1 \perp QO_2$,

则四边形 $PO_1 O_2 Q$ 是直角梯形……2 分

法 1: 在 $\text{Rt}\triangle PO_1 O$ 中, $OP = a$, $OO_1 = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a$, 则 $PO_1 = \frac{\sqrt{6}}{3} a$

同理得: $OO_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{m}{a}$, $QO_2 = \frac{\sqrt{6}}{3} \frac{m}{a}$ ……5 分

$$\begin{aligned} \text{则 } PQ &= \sqrt{O_1 O_2^2 + (QO_2 - PO_1)^2} = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} a + \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{3} \frac{m}{a} - \frac{\sqrt{6}}{3} a\right)^2} \\ &= \sqrt{a^2 + \frac{m^2}{a^2} - \frac{2}{3} m} \dots\dots 8 \text{ 分} \end{aligned}$$

$$PQ = \sqrt{a^2 + \frac{m^2}{a^2} - \frac{2}{3} m} \geq \sqrt{2 \sqrt{a^2 \times \frac{m^2}{a^2}} - \frac{2}{3} m} = \frac{2}{3} \sqrt{3m} \left(a^2 = \frac{m^2}{a^2}, \text{当 } a = \sqrt{m} \text{ 时等号成立}\right)$$

则当 $a = \sqrt{m}$ 时, 塔尖 P, Q 之间的距离最短. ……12 分

法 2: 在 $\text{Rt}\triangle PO_1 O$ 中, $OP = a$, $OO_1 = \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} a = \frac{\sqrt{3}}{3} a$, 则 $PO_1 = \frac{\sqrt{6}}{3} a$

同理得: $OO_2 = \frac{\sqrt{3}}{3} \frac{m}{a}$, $QO_2 = \frac{\sqrt{6}}{3} \frac{m}{a}$ ……5 分

记 $\angle POQ_1 = \angle QOQ_2 = \theta$, 则 $\cos \theta = \frac{OQ_1}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\angle POQ = \pi - 2\theta$.

$$\text{则 } \cos(\pi - 2\theta) = -\cos 2\theta = 1 - 2\cos^2 \theta = \frac{1}{3}$$

在 $\triangle POQ$ 中, $PO = a$, $QO = \frac{m}{a}$.

由余弦定理得: $PQ^2 = PO^2 + QO^2 - 2PO \cdot QO \cdot \cos \angle POQ$

$$= a^2 + \left(\frac{m}{a}\right)^2 - 2a \cdot \frac{m}{a} \cdot \cos(\pi - 2\theta) = a^2 + \frac{m^2}{a^2} - \frac{2}{3}m$$

$$\text{则 } PQ = \sqrt{a^2 + \frac{m^2}{a^2} - \frac{2}{3}m} \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$PQ = \sqrt{a^2 + \frac{m^2}{a^2} - \frac{2}{3}m} \geq \sqrt{2\sqrt{a^2 \times \frac{m^2}{a^2}} - \frac{2}{3}m} = \frac{2}{3}\sqrt{3m}(a^3 = \frac{m^2}{a^2}, \text{ 当 } a = \sqrt{m} \text{ 时等号成立})$$

则当 $a = \sqrt{m}$ 时, 塔尖 P, Q 之间的距离最短. $\dots\dots 12 \text{ 分}$

20. (14 分) 在 $\triangle ABC$ 中, 角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若

$$\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{2\cos B} = \frac{c}{3\cos C}, \text{ 求}$$

(1) $\tan A : \tan B : \tan C$ 的值;

(2) 求角 A 的值.

解: (1) 因 $\frac{a}{\cos A} = \frac{b}{2\cos B} = \frac{c}{3\cos C}$, 由正弦定理得:

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B}{2\cos B} = \frac{\sin C}{3\cos C}, \dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\text{即 } \tan A = \frac{1}{2} \tan B = \frac{1}{3} \tan C$$

则 $\tan A : \tan B : \tan C = 1:2:3 \dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 由 (1) 得 $\tan B = 2 \tan A, \tan C = 3 \tan A$

在 $\triangle ABC$ 中, $A + B + C = \pi$,

$$\text{则 } \tan A = \tan(\pi - B - C) = -\tan(B + C) = -\frac{\tan B + \tan C}{1 - \tan B \cdot \tan C} = \frac{5 \tan A}{6 \tan^2 A - 1} \dots\dots 8 \text{ 分}$$

或解得: $\tan A = \pm 1$ 或 $\tan A = 0$, $\dots\dots 12 \text{ 分}$

当 $\tan A = 0$, 舍去

$$\text{当 } \tan A = 1, A = \frac{\pi}{4}$$

当 $\tan A = -1$, 则 $\tan B = -2$, 则 $A > \frac{\pi}{2}$, $B > \frac{\pi}{2}$, 矛盾.

综上, $A = \frac{\pi}{4}$, 14 分

21. (14 分) 某中学为丰富教职工生活, 在元旦期间举办趣味投篮比赛. 设置 A, B 两个投篮位置. 在 A 点投中一球得 1 分, 在 B 点投中一球得 2 分. 规则是: 每人按先 A 后 B 的顺序各投篮一次 (计为投篮两次). 教师甲在 A 点和 B 点投中的概率分别为 $\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{3}$, 且在 A, B 两点投中与否相互独立.

(1) 若教师甲投篮两次, 求教师甲投篮得分为 0 分的概率.

(2) 若教师乙与教师甲在 A, B 投中的概率相同, 两人按规则各投篮两次, 求甲得分比乙高的概率.

解: (1) 设教师甲投篮得分为 0 分的概率为 P_1 .

$$\text{则 } P_1 = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 设甲胜乙的概率为 P_2 , 记事件“教师两次投篮得分总数”为 X .

则 X 的可能取值为 0, 1, 2, 3:

$$P(X=0) = P_1 = \frac{1}{3},$$

$$P(X=1) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}, \dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$P(X=2) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$P(X=3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{则 } P_2 = \frac{1}{3} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6}\right) + \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{13}{36}, \dots\dots 14 \text{ 分}$$

22. (16 分) 设 $f(x) = a^{x-1}$, $g(x) = b^{x-1}$ ($a, b > 0$). 记 $h(x) = f(x) - g(x)$

(1) 若 $h(2) = 2, h(3) = 12$, 当 $x \in [1, 3]$ 时, 求 $h(x)$ 的最大值.

(2) 若 $a = 2, b = 1$, 且方程 $|h(x)| = t$ ($0 < t < \frac{1}{2}$) 有两个不相等的实根 m, n , 求 mn 的范围:

(3) 若 $a = 2, h(x) = c^{x-1}$ ($x > 1, c > 0$), 且 a, b, c 是三角形的三边长, 求出 x 的范围.

解: (1) 由已知可得: $\begin{cases} a-b=2 \\ a^2-b^2=12 \end{cases}$, 解得: $a=4, b=2$; 2 分

$$h(x) = f(x) - g(x) = 4^{x+1} - 2^{x-1} = (2^{x+1} - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \leq (2^2 - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} = 12.$$

$h(x)$ 的最大值为 12.4 分

$$(2) \text{ 由 } |h(x)| = t, \quad |2^{x+1} - 1| = t$$

求得: $m = \log_2(2-2t), n = \log_2(2+2t), mn = \log_2(2-2t) \cdot \log_2(2+2t)$ 6 分.

$$\text{当 } 0 < t < \frac{1}{2} \text{ 时, } mn \leq \frac{(m+n)^2}{4} = \frac{[\log_2(4-4t^2)]^2}{4} < \frac{(\log_2 4)^2}{4} = 1 \therefore 0 < mn < 1$$

综上所述, mn 的范围为 $(0,1)$ 10 分

(3) 存在 x 使得: $b^{x-1} + c^{x-1} = 2^{x-1}$ 成立, 等价于存在 x 使得 $(\frac{b}{2})^{x-1} + (\frac{c}{2})^{x-1} = 1$ 成立. 令

$$f(x) = (\frac{b}{2})^{x-1} + (\frac{c}{2})^{x-1}. \text{12 分}$$

因为 $b < 2, c < 2$, 则 $0 < \frac{b}{2} < 1, 0 < \frac{c}{2} < 1$, 则 $f(x)$ 是单调减函数:14 分

当 $x > 2, f(x) \in (0, \frac{b+c}{2})$, 因为 $\frac{c+b}{2} > 1$, 所以必存在 $x_0 > 2$ 使得 $f(x_0) = 1$.

$$\text{即 } (\frac{b}{2})^{x_0-1} + (\frac{c}{2})^{x_0-1} = 1, \text{ 即 } b^{x_0-1} + c^{x_0-1} = 2^{x_0-1}$$

综上所述: $x > 2$ 16 分.

23. (18 分) 正数数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{S_n}{a_n} = pn + q$ (p, q 为常数), 其中 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项

和.

(1) 若 $p=1, q=0$, 求证: $\{a_n\}$ 是等差数列;

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 求 p 的值;

(3) 证明: $a_{2016} = 2016a_1$ 的充要条件是 $p = \frac{1}{2}$.

证: (1) $p=1, q=0$, 则 $\frac{S_n}{a_n} = n$ 即 $S_n = na_n$

$$\text{当 } n \geq 2 \text{ 时, } S_{n-1} = (n-1)a_{n-1}$$

$$\text{有 } a_n = S_n - S_{n-1} = na_n - (n-1)a_{n-1}$$

则 $a_n - a_{n-1} = 0 (n \geq 2) \Rightarrow a_n = a_1$, 得证数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.4 分

(2) $\frac{S_n}{a_n} = pn + q$, $a_1 > 0$, 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列.

设 $\{a_n\}$ 的公差为 d .

因为: $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$, $a_n = a_1 + (n-1)d$

$$\text{则 } \frac{S_n}{a_n} = \frac{na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d}{a_1 + (n-1)d} = pn + q$$

$$\text{有: } na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = (pn + q) \cdot [a_1 + (n-1)d] \quad ①$$

对比①式左右等式中 n^2 的系数得: $\frac{d}{2} = pd$,6分

$$\text{当 } d = 0, \frac{S_n}{a_n} = \frac{na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d}{a_1 + (n-1)d} = \frac{na_1}{a_1} = pn + q, \text{ 则 } q = 0, p = 1$$

$$\text{当 } d \neq 0, \text{ 则 } p = \frac{1}{2}$$

当 $p = 1$ 时, 则 $\frac{S_n}{a_n} = n$, 由第(1)问得: 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列8分

当 $p = \frac{1}{2}$ 时, 由①式对比左右常数项可得 $0 = (a_1 - d)q$, 则 $d = a_1, a_n = nd$, 数列 $\{a_n\}$ 为等差数列

综上得, $p = 1$ 或 $p = \frac{1}{2}$ 10分

(3) 由 $\frac{S_1}{a_1} = p + q = 1$, 从而 $q = 1 - p$.

$$\begin{aligned} S_n &= (pn + 1 - p)a_n \\ \text{则 } S_{n-1} &= (pn + 1 - 2p)a_{n-1} \quad (n \geq 2) \end{aligned} \quad , \text{ 两式相减得: } p(n-1)a_n = (pn + 1 - 2p)a_{n-1}$$

$$\text{即 } \frac{a_n}{pn + 1 - 2p} = \frac{a_{n-1}}{p(n-1)}$$

$$\text{必要性: 当 } p = \frac{1}{2} \text{ 时, } \frac{a_n}{n} = \frac{a_{n-1}}{n-1} \quad (n \geq 2)$$

$$\text{所以: } \frac{a_{2016}}{2016} = \frac{a_{2015}}{2015} = \frac{a_{2014}}{2014} = \dots = \frac{a_1}{1} \Rightarrow a_{2016} = 2016a_1; \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$

充分性: (反证法) 当 $p > \frac{1}{2}$ 时,

由 $p(n-1)a_n = (pn+1-2p)a_{n-1} = pna_{n-1} + (1-2p)a_{n-1} (n \geq 2)$, 又数列的各项为正数, 所

以 $p(n-1)a_n < pna_{n-1}$, 即 $\frac{a_n}{n} < \frac{a_{n-1}}{n-1}$,

所以 $\frac{a_{2016}}{2016} < \frac{a_1}{1}$, 不满足 $a_{2016} = 2016a_1$ 16 分

类似地可证明, 当 $p < \frac{1}{2}$ 时, $a_{2016} = 2016a_1$ 也不成立. 18 分