2017 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（一）试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则

(A) $ab=\frac{1}{2}$．　(B) $ab=-\frac{1}{2}$．　(C) $ab=0$．　(D) $ab=2$．

【答案】A

【详解】由 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\dfrac{1}{2a}=b$，得 $ab=\dfrac{1}{2}$．

（2）设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$ 则

(A) $f(1)>f(-1)$．　(B) $f(1)<f(-1)$．

(C) $|f(1)|>|f(-1)|$．　(D) $|f(1)|<|f(-1)|$．

【答案】C

【详解】 $f(x)f'(x)=[\dfrac{f^2(x)}{2}]'>0$，从而 $f^2(x)$ 单调递增，$f^2(1)>f^2(-1)$．

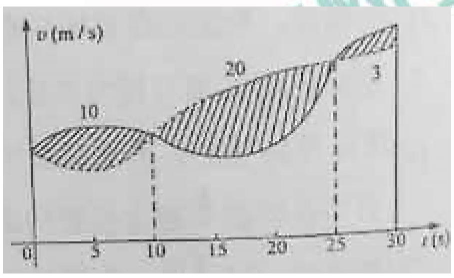
（3）函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿着向量 $n=(1,2,2)$ 的方向导数为

(A) 12．　(B) 6．　(C) 4．　(D) 2．

【答案】D

【详解】方向余弦 $\cos\alpha=\dfrac{1}{3},\cos\beta=\cos\gamma=\dfrac{2}{3}$，偏导数 $f_x'=2xy,\ f_y'=x^2,\ f_z'=2z$，代入 $\cos\alpha f_x'+\cos\beta f_y'+\cos\gamma f_z'$ 即可．

（4）甲乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10(单位：m)处.图中，实线表示甲的速度曲线$v=v_1(t)$(单位：m/s)，虚线表示乙的速度曲线$v=v_2(t)$(单位：m/s)，三块阴影部分面积的数值一次为 10，20，3，计时开始后乙追上甲的时刻记为(单位：s)，则



(A) $t_0=10$． (B) $15<t_0<20$． (C) $t_0=25$． (D) $t_0>25$．

【答案】C

【详解】在$t_0=25$时,乙比甲多跑10 m,而最开始的时候甲在乙前方10 m处.

（5）设α为n维单位列向量，E为n阶单位矩阵，则

(A) $E-\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$不可逆． (B) $E+\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$不可逆．

(C) $E+2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$不可逆． (D) $E-2\alpha\alpha^{\mathrm{T}}$不可逆．

【答案】A

【详解】可设$\boldsymbol{\alpha}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,则$\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$的特征值为$1,0,\cdots,0$,从而$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$的特征值为$0,1,\cdots,1$,因此$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$不可逆.

（6）设有矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$

(A) A与C相似，B与C相似． (B) A与C相似，B与C不相似．

(C) A与C不相似，B与C相似．　　(D) A与C不相似，B与C不相似．

【答案】B

【详解】$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$的特征值为$2,2,1$,但$\boldsymbol{A}$有三个线性无关的特征向量,而$\boldsymbol{B}$只有两个,所以$\boldsymbol{A}$可对角化，$\boldsymbol{B}$则不行.

（7）设A,B为随机事件，若$0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，则$P(A|B)>P(B|\bar{A})$的充分必要条件

(A) $P(B|A)>P(B|\bar{A})$．　(B) $P(B|A)<P(B|\bar{A})$．

(C) $P(\bar{B}|A)>P(B|\bar{A})$．　(D) $P(\bar{B}|A)<P(B|\bar{A})$．

【答案】A

【详解】由$P(A|B)>P(A|\bar{B})$得$\dfrac{P(AB)}{P(B)}>\dfrac{P(A\bar{B})}{P(\bar{B})}=\dfrac{P(A)-P(AB)}{1-P(B)}$，即

$P(AB)>P(A)P(B)$；

由$P(B|A)>P(\bar{B}|A)$也可得$P(AB)>P(A)P(B)$.

（8）设$X_1,X_2,\cdots,X_n(n..2)$为来自总体$N(\mu,1)$的简单随机样本，记$\bar{X}=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论不正确的是

(A) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$服从$\chi^2$分布　．(B) $2(X_n-X_1)^2$服从χ^2分布．

(C) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2$服从$\chi^2$分布．(D) $n(\bar{X}-\mu)^2$服从χ^2分布．

【答案】B

【详解】$\frac{X_i-\mu}{1}\sim N(0,1)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n),\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2\sim\chi^2(n-1)$；

$\bar{X}\sim N(\mu,\frac{1}{n}),n(\bar{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1);\ X_n-X_1\sim N(0,2),\frac{(X_n-X_1)^2}{2}\sim\chi^2(1)$.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）已知函数 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$，$f^{(3)}(0)=$______．

【答案】0

【详解】 $f(x)=\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4+\cdots(-1<x<1)$,没有三次项.

（10）微分方程 $y''+2y'+3y=0$ 的通解为______．

【答案】 $y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$

【详解】特征方程 $r^2+2r+3=0$ 得 $r=-1+\sqrt{2}i$，因此 $y=e^{-x}(C_1\cos\sqrt{2}x+C_2\sin\sqrt{2}x)$.

（11）若曲线积分 $\int_L\frac{xdx-aydy}{x^2+y^2-1}$ 在区域 $D=\{(x,y)|x^2+y^2<1\}$ 内与路径无关，则 $a=$

______．

【答案】 -1

【详解】有题意可得 $\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial x}$,解得 $a=-1$.

（12）幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}$ 在(-1,1)内的和函数 $S(x)=$______．

【答案】 $\frac{1}{(x+1)^2}$

【详解】 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}nx^{n-1}=-\sum_{n=1}^{\infty}[(-x)^n]'=\frac{1}{(x+1)^2}$.

(13) $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$，$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\alpha_3$是 3 维线性无关的列向量，则 $(A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3)$的秩为____________.

【答案】2

【详解】 $r(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=r(\boldsymbol{A})=2$

(14)设随即变量 X 的分布函数 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi(\frac{x-4}{2})$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $EX=$____________.

【答案】2

【详解】 $EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)\mathrm{d}x=\int_{0}^{+\infty}x[0,5\varphi(x)+\frac{0.5}{2}\varphi(\frac{x-4}{2})]\mathrm{d}x=2$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．请将答案写在答题纸指定位置上．

(15)(本题满分 10 分).

设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$，求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$，$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

【答案】$\because y=f(\mathrm{e}^x,\cos x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=f_1'e^x-f_2'\sin x,$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}|x=0=f_1'(1,1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(f_{11}''e^x-f_{12}''\sin x\right)e^x+f_1'e^x-(f_{21}''e^x-f_{22}''\sin x)\sin x-f_2'\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}|x=0=f_{11}''(1,1)+f_1'(1,1)-f_2'(1,1)$$

(16)(本题满分 10 分).

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})$.

【答案】

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\ln(1+\frac{1}{n})+\frac{2}{n^2}\ln(1+\frac{2}{n})+\dots+\frac{n}{n^2}\ln(1+\frac{n}{n})\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})+\frac{2}{n}\ln(1+\frac{2}{n})+\dots+\frac{n}{n}\ln(1+\frac{n}{n})\right)$$

$$=\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\int_0^1\ln(1+x)d\frac{1}{2}x^2$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2-1+1}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}[\int_0^1(x-1)dx+\int_0^1\frac{1}{1+x}dx]$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}[(\frac{1}{2}x^2-x)\Big|_0^1+\ln(1+x)\Big|_0^1]$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1+\ln 2)=\frac{1}{4}$$

(17)(本题满分 10 分).

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值.

【答案】$x^3+y^3-3x+3y-2=0$ ①，

方程①两边对 x 求导得：$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$ ②，

令 $y'=0$，得 $3x^2=3, x=\pm1$.

当 $x=1$ 时 $y=1$，当 $x=-1$ 时 $y=0$.

方程②两边再对 x 求导：$6x+6y(y')^2+3y^2y''+3y''=0$，

令 $y'=0$，$6x+(3y^2+1)y''=0$，

当 $x=1$，$y=1$ 时 $y''=-\frac{3}{2}$，当 $x=-1$，$y=0$ 时 $y''=6$.

所以当$x=1$时函数有极大值，极大值为 1，当$x=-1$时函数有极小值，极小值为 0.

（18）（本题满分 10 分）.

设函数$f(x)$在区间$[0,1]$上具有 2 阶导数，且$f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}<0$.

证明：

（Ⅰ）方程$f(x)=0$在区间$(0,1)$内至少存在一个实根;

（Ⅱ）方程$f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$在区间$(0,1)$内至少存在两个不同实根.

【答案】

(1)$\because \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}<0$，由极限的局部保号性，$\exists c\in(0,\delta)$, 使得$f(c)<0$，又$\because f(1)>0$, 由零点存在定理知，$\exists \xi\in(c,1)$，使得，$f(\xi)=0$.

(2) 构造$F(x)=f(x)f'(x)$，$F(0)=f(0)f'(0)=0$，$F(\xi)=f(\xi)f'(\xi)=0$，$\because \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)}{x}<0, \therefore f'(0)<0,$ 由拉格朗日中值定理知$\exists \eta\in(0,1), \frac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(\eta)>0$，$\because f'(0)f'(\eta)<0,$ 所以由零点定理知$\exists \xi_1\in(0,\eta)\subset(0,1)$，使得$f'(\xi_1)=0$，$\therefore F(\xi_1)=f(\xi_1)f'(\xi_1)=0,$ 所以原方程至少有两个不同实根。

（19）（本题满分 10 分）.

设薄片型物体S是圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被$z^2=2x$割下的有限部分，其上任意一点处的密度为$\mu(x,y,z)=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，记圆锥面与柱面的交线为 C；

（Ⅰ）求 C 在 xOy 平面上的投影曲线的方程；

（Ⅱ）求 S 的质量 M。

【答案】(1) C 的方程为 $\begin{cases} z=\sqrt{x^2+y^2} \\ z^2=2x \end{cases}$ ，投影到 xoy 平面的方程为：

$$\begin{cases} (x-1)^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$$

$$(2)M=\iint_{\Sigma} u(x,y,z)dS=\iint_{\Sigma} 9\sqrt{x^2+y^2+z^2}dS=9\sqrt{2}\iint_{\Sigma}\sqrt{x^2+y^2+x^2+y^2}dS$$

$$=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{2\cos\theta}\sqrt{x^2+y^2}dxdy=18\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos^3\theta d\theta$$

$$=96\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\theta d\theta==96(\frac{2}{3}\times 1)=64$$

（20）(本题满分 11 分)．

设3矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值，$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$

（Ⅰ）证明：$r(A)=2$；

（Ⅱ）若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ ，求方程组 $Ax=\beta$ 的解.

【答案】

$$\because \alpha_3=\alpha_1+\alpha_2,$$
$$\therefore \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0,$$
$$\therefore (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=0,\ \text{故}\lambda_1=0\text{是}A\text{的特征值.}$$

又 A 有三个不同的特征值，故 $\lambda_1=0$ 为单根，且 A 一定能相似对角化.

$$\therefore A\sim\Lambda,$$
$$\therefore r(A)=r(\Lambda)=2.$$

（2）由（1），$Ax=0$ 的通解为 $k(1,2,-1)^T$ ，

$\because \beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$ ，故有$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta$，即$A(1,1,1)^T=\beta$.

$\therefore Ax=\beta$的通解为$k(1,2,-1)^T+(1,1,1)^T$ (k为任意常数).

（21）（本题满分 11 分）.

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求$a$的值及一个正交矩阵$Q$。

【答案】二次型的矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$，

因为二次型在正交变换下的标准形为$\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，故$A$有特征值 0，

$\therefore |A|=0$，故$a=2$.

由$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)=0$得特征值为

$\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

解齐次线性方程组$(\lambda_iE-A)x=0$，求特征向量.

对$\lambda_1=-3$，$-3E-A=\begin{pmatrix}-5&-1&4\\-1&-2&-1\\4&-1&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,得$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$；

对$\lambda_2=6$，$6E-A=\begin{pmatrix}4&-1&4\\-1&7&-1\\4&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,得$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$；

对$\lambda_3=0$，$0E-A=\begin{pmatrix}-2&-1&4\\-1&1&-1\\4&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$,得$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$；

因为$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$属于不同特征值，已经正交，只需规范化：

令$\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,\beta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$，

所求正交矩阵为$Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\\-\frac{1}{\sqrt{3}}&0&\frac{2}{\sqrt{6}}\\\frac{1}{\sqrt{3}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$,对应标准形为$f=-3y_1^2+6y_2^2$.

（22）（本题满分 11 分）.

设随机变量 X 与 Y 相互独立，且 X 的概率分布为

$P\{X=0\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$，Y 的概率密度为$f(y)=\begin{cases}2y,0<y<1\\0,其他.\end{cases}$

（I）求$P\{Y\le EY\}$

（II）求$Z=X+Y$的概率密度。

22、【答案】（1）$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 y\cdot 2y\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$，

$\therefore P\{Y\le EY\}=\int_{-\infty}^{\frac{2}{3}}f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{2}{3}}2y\mathrm{d}y=\frac{4}{9}$.

（2）Z的分布函数为

$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X+Y\le z,X=0\}+P\{X+Y\le z,X=2\}$

$=P\{X=0,\ Y\le z\}+P\{X=2,\ Y+2\le z\}=\frac{1}{2}[P\{Y\le z\}+P\{Y\le z-2\}]$

$=\frac{1}{2}[F_Y(z)+F_Y(z-2)]$

故Z的概率密度函数为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{2}[f(z)+f(z-2)]=\begin{cases}0, & z<0\\ z, & 0\le z<1\\ 0, & 1\le z<2\\ z-2, & 2\le z<3\\ 0, & z\ge 3\end{cases}=\begin{cases}z, & 0\le z<1\\ z-2, & 2\le z<3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$$

（23）（本题满分 11 分）.

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的.设 n 次测量结果 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots,n)$.利用 $Z_1,Z_2,\cdots Z_n$ 估计 σ.

（Ⅰ）求 Z_i 的概率密度；

（Ⅱ）利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

（Ⅲ）求 σ 的最大似然估计量.

【答案】Z_1 的分布函数为 $F_{Z_1}(z)=P\{Z_1\le z\}=P\{|X_1-\mu|\le z\}=P\left\{\left|\frac{X_1-\mu}{\sigma}\right|\le\frac{z}{\sigma}\right\}$，

$z\le 0$时,$F_{Z_1}(z)=0;$

$z>0$时,$F_{Z_1}(z)=2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)-1.$

所以 Z_i 的概率密度均为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$

（2）$EZ_1=\int_0^{+\infty}z\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz\overset{令t=z/\sigma}{=}\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(-e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}\right)=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$，

令 $EZ_1=\overline{Z}$，即 $\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}=\overline{Z}$，得 σ 的矩估计量为：

$\hat{\sigma}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\overline{Z}$ ，其中$\overline{Z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i$.

（3）记$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$的观测值为$z_1,z_2,\cdots,z_n$ ，当$z_i>0(i=1,2,\cdots,n)$时，

似然函数为$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(z_i;\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}}=2^n\cdot(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\cdot\sigma^{-n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$ ，

$\therefore\ln L(\sigma)=n\ln 2-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-n\ln\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$ ，

令$\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=0$，得$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$

$\therefore\sigma$的最大似然估计量为$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}$.