2017 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（二）试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, x>0\\ b, x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则

(A) $ab=\frac{1}{2}$． (B) $ab=-\frac{1}{2}$． (C) $ab=0$． (D) $ab=2$．

【答案】A

【详解】由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\dfrac{1}{2a}=b$，得 $ab=\dfrac{1}{2}$．

（2）设二阶可导函数 $f(x)$ 满足 $f(1)=f(-1)=1, f(0)=-1$ 且 $f''(x)>0$，则

(A) $\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x>0$． (B) $\int_{-1}^{1}f(x)dx<0$．

(C) $\int_{-1}^{0}f(x)dx>\int_{0}^{1}f(x)dx$． (D) $\int_{-1}^{0}f(x)dx<\int_{0}^{1}f(x)dx$．

【答案】B

【详解】在 $(0,1)$ 内，记 $G(x)=\dfrac{f(x)-f(0)}{x}, G'(x)=\dfrac{xf'(x)-[f(x)-f(0)]}{x^2}$，而 $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(\xi),\xi\in(0,1)$，所以 $G(x)$ 在 $(0,1)$ 内递增，$G(x)<G(1)$，即

$$f(x)<2x-1, x\in(0,1), \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x<\int_0^1(2x-1)\mathrm{d}x=0;\text{同理可得}\int_{-1}^{0}f(x)\mathrm{d}x<0.$$

（3）设数列 $\{x_n\}$ 收敛，则

(A)当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$． (B) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n(x_n+\sqrt{x_n})=0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$． (C) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+x_n^2)=0$ 时，

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. (D) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + \sin x_n) = 0$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

【答案】D

【详解】对于 A,B,C 可举反例: $x_n = \pi, x_n = -1, x_n = -1$,所以选 D.

（4）微分方程 $y'' - 4y' + 8y = e^{2x}(1+\cos 2x)$ 的特解可设为 $y^k =$

(A) $Ae^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$. (B) $Axe^{2x} + e^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$.

(C) $Ae^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$. (D) $Axe^{2x} + xe^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$.

【答案】C

【详解】齐次方程的特征根为 $r = 2 \pm 2i$ ，原方程可分解为两个非齐次方程：$y'' - 4y' + 8y = \mathrm{e}^{2x}$ 和 $y'' - 4y' + 8y = \mathrm{e}^{2x}\cos 2x$ ，可知第一个方程的特解为 $A\mathrm{e}^{2x}$ ，第二个方程的特解为 $x\mathrm{e}^{2x}(B\cos 2x + C\sin 2x)$ ，选 C.

（5）设 $f(x)$ 具有一阶偏导数，且在任意的 (x,y) ，都有 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} > 0, \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} < 0$ 则

(A) $f(0,0) > f(1,1)$. (B) $f(0,0) < f(1,1)$.

(C) $f(0,1) > f(1,0)$. (D) $f(0,1) < f(1,0)$.

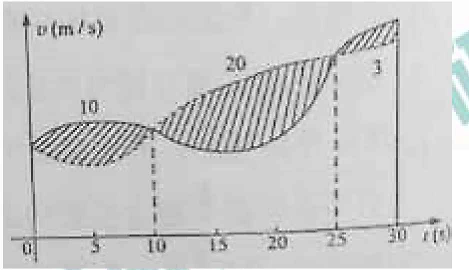
【答案】D

【详解】易知 $f(x,y)$ 分别关于 x,y 单调递增和单调递减，所以选 D.

（6）甲乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10(单位：m)处.图中，实线表示甲的速度曲线 $v = v_1(t)$ (单位：m/s)，虚线表示乙的速度曲线 $v = v_2(t)$ (单位：m/s)，三块阴影部分面积的数值一次为 10，20，3，

计时开始后乙追上甲的时刻记为(单位：s)，则

(A) $t_0=10$． (B) $15<t_0<20$． (C) $t_0=25$． (D) $t_0>25$．



【答案】C

【详解】在$t_0=25$时,乙比甲多跑10 m,而最开始的时候甲在乙前方10 m处.

(7)设A为3阶矩阵，$P=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$为可逆矩阵，且$P^{-1}AP=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，

则$A(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)=$

(A) $\alpha_1+\alpha_2$ (B) $\alpha_2+2\alpha_3$

(C) $\alpha_2+\alpha_3$ (D) $\alpha_1+2\alpha_3$

【答案】B

【详解】由相似矩阵及特征值与特征向量的定义,可知$A\alpha_1=0,A\alpha_2=\alpha_2,A\alpha_3=2\alpha_3$.

(8)设有矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$

(A) A与C相似，B与C相似． (B) A与C相似，B与C不相似．

(C) A与C不相似，B与C相似． (D) A与C不相似，

B与C不相似．

【答案】B

【详解】 A,B的特征值为$2,2,1$,但A有三个线性无关的特征向量,而B只有两个,所以A可对角化, B则不行.

二、填空题：9～14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）曲线$y=x(1+\arcsin\frac{2}{x})$的斜渐近线方程为_____________．

【答案】 $y=x+2$

【详解】 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x(1+\arcsin\frac{2}{x})}{x}=1, b=\lim\limits_{x\to\infty}x(1+\arcsin\frac{2}{x})-x=2$．

（10）设函数$y=y(x)$由参数方程$\begin{cases}x=t+e^t\\y=\sin t\end{cases}$确定，则$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$_____________．

【答案】 $-\dfrac{1}{8}$

【详解】 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left.\dfrac{y''(t)x'(t)-y'(t)x''(t)}{x'^3(t)}\right|_{t=0}=-\dfrac{1}{8}$.

（11）$\int_0^{+\infty}\dfrac{\ln(1+x)}{(1+x)^2}\mathrm{d}x=$_____________．

【答案】1

【详解】 $=-\int_0^{+\infty}\ln(1+x)\mathrm{d}(x+1)^{-1}=-[\left.\dfrac{\ln(1+x)}{1+x}\right|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{(1+x)^2}\mathrm{d}x]=-\left.\dfrac{1}{1+x}\right|_0^{+\infty}=1$.

（12）设函数$f(x,y)$具有一阶连续偏导数，且

$df(x,y)=ye^ydx+x(1+y)e^ydy, f(0,0)=0$，则$f(x,y)=$_____________．

【答案】xye^y

【详解】由 $df(x,y)=ye^y dx+x(1+y)e^y dy$,得 $f(x,y)=xye^y+C$,再由 $f(0,0)=0$ 解出常数.

(13) $\int_0^1 dy\int_y^1 \frac{\tan x}{x}dx=$____________ .

【答案】$-\ln\cos 1$

【详解】原式$=\int_0^1 \frac{\tan x}{x}dx\int_0^x dy=\int_0^1 \tan x dx=-\ln|\cos x|\big|_0^1=-\ln\cos 1$.

(14) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}$ 的一个特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$,则 $a=$____________ .

【答案】-1

【详解】$\begin{pmatrix}4&1&-2\\1&2&a\\3&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\3+2a\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$,故 $a=-1$.

三、解答题:15~23 小题,共 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.请将答案写在答题纸指定位置上.

(15)(本题满分 10 分).

求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{x-t}e^t dt}{\sqrt{x^3}}$

【答案】令 $x-t=u$,则 $t=x-u, dt=-du$,

原式= $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_x^0 \sqrt{u}e^{x-u}(-du)}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{u}e^{x-u}du}{x^{\frac{3}{2}}}$

$=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x\int_0^x \sqrt{u}e^{-u}du}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}e^x\Box\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\int_0^x \sqrt{u}e^{-u}du}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x}e^{-x}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}$

（16）（本题满分 10 分）.

设函数 $f(u,v)$ 具有 2 阶连续偏导数，$y=f(e^x,\cos x)$, 求 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}$, $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$

【答案】$\because y=f(e^x,\cos x)$

$$\therefore \frac{dy}{dx}=f_1^{'}e^x-f_2^{'}\sin x,$$

$$\therefore \frac{dy}{dx}|x=0=f_1^{'}(1,1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\left(f_{11}^{''}e^x-f_{12}^{''}\sin x\right)e^x+f_1^{'}e^x-(f_{21}^{''}e^x-f_{22}^{''}\sin x)\sin x-f_2^{'}\cos x$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}|x=0=f_{11}^{''}(1,1)+f_1^{'}(1,1)-f_2^{'}(1,1)$$

（17）（本题满分 10 分）.

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

【答案】

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\ln(1+\frac{1}{n})+\frac{2}{n^2}\ln(1+\frac{2}{n})+\ldots+\frac{n}{n^2}\ln(1+\frac{n}{n})\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})+\frac{2}{n}\ln(1+\frac{2}{n})+\ldots+\frac{n}{n}\ln(1+\frac{n}{n})\right)$$

$$=\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\int_0^1\ln(1+x)d\frac{1}{2}x^2$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2-1+1}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}[\int_0^1(x-1)dx+\int_0^1\frac{1}{1+x}dx]$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}[(\frac{1}{2}x^2-x)\Big|_0^1+\ln(1+x)\Big|_0^1]$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1+\ln 2)=\frac{1}{4}$$

（18）（本题满分 10 分）.

已知函数 $y(x)$ 由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ 确定，求 $y(x)$ 的极值.

【答案】 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$ ①，

方程①两边对 x 求导得：$3x^2+3y^2y'-3+3y'=0$ ②，

令 $y'=0$，得 $3x^2=3, x=\pm1$.

当 $x=1$ 时 $y=1$，当 $x=-1$ 时 $y=0$.

方程②两边再对 x 求导：$6x+6y(y')^2+3y^2y''+3y''=0$，

令 $y'=0$，$6x+(3y^2+1)y''=0$，

当 $x=1$，$y=1$ 时 $y''=-\frac{3}{2}$，当 $x=-1$，$y=0$ 时 $y''=6$.

所以当 $x=1$ 时函数有极大值，极大值为 1，当 $x=-1$ 时函数有极小值，极小值为 0.

（19）（本题满分 10 分）.

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$.

证明：

（Ⅰ）方程 $f(x)=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在一个实根;

（Ⅱ）方程 $f(x)f''(x)+[f'(x)]^2=0$ 在区间 $(0,1)$ 内至少存在两个不同实根.

【答案】

(1) $\because \lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}<0$，由极限的局部保号性，$\exists c\in(0,\delta)$, 使得 $f(c)<0$，又 $\because f(1)>0$, 由零点存在定理知，$\exists\xi\in(c,1)$，使得，$f(\xi)=0$.

(2) 构造 $F(x)=f(x)f'(x)$，$F(0)=f(0)f'(0)=0$，$F(\xi)=f(\xi)f'(\xi)=0$，

$\because \lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}<0, \therefore f'(0)<0,$ 由拉格朗日中值定理知 $\exists \eta\in(0,1), \dfrac{f(1)-f(0)}{1-0}=f'(\eta)>0$ ，$\because f'(0)f'(\eta)<0,$ 所以由零点定理知 $\exists \xi_1\in(0,\eta)\subset(0,1)$ ，使得 $f'(\xi_1)=0$ ，$\therefore F(\xi_1)=f(\xi_1)f'(\xi_1)=0,$ 所以原方程至少有两个不同实根。

（20）(本题满分 11 分)．

已知平面区域 $D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 2y\}$ ，计算二重积分 $\iint_D (x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$．

【答案】$\iint\limits_D (x+1)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta} r^2\cos^2\theta\mathrm{d}r+\pi$$
$$=\frac{5\pi}{4}.$$

（21）(本题满分 11 分)．

设 $y(x)$ 是区间 $(0,\frac{3}{2})$ 内的可导函数，且 $y(1)=0$ ，点 P 是曲线 $L:y=y(x)$ 上的任意一点，L 在点 P 处的切线与 y 轴相交于点 $(0,Y_P)$ ，法线与 x 轴相交于点 $(X_P,0)$ ，若 $X_p=Y_P$

，求 L 上点的坐标 (x,y) 满足的方程.

【答案】设曲线 L 在 (x,y) 处的切线方程为 $Y-y(x)=y'(x)(X-x)$,所以 $Y_p=y(x)-xy'(x)$；

对应的法线方程为 $Y-y(x)=-\dfrac{1}{y'(x)}(X-x)$,所以 $X_p=x+y(x)y'(x)$；

因此 $y(x)-xy'(x)=x+y(x)y'(x)$,即 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{y-x}{y+x}=\dfrac{\frac{y}{x}-1}{\frac{y}{x}+1}$,

这是一个齐次方程,可令 $u(x)=\dfrac{y}{x}$,最终求得方程的通解为

$\ln(u^2+1)+2\arctan u=-2\ln|x|+C$,

再由 $y(1)=0$ 得 $\ln(x^2+y^2)+2\arctan\frac{y}{x}=0$，$x\in(0,\frac{3}{2})$.

（22）(本题满分 11 分).

设3矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值，$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$

（I）证明：$r(\mathrm{A})=2$；

（II）若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的解.

【答案】

$\because \alpha_3=\alpha_1+\alpha_2,$

$\therefore \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0,$

$\therefore (\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=0$，故 $\lambda_1=0$ 是 A 的特征值.

又 A 有三个不同的特征值，故 $\lambda_1=0$ 为单根，且 A 一定能相似对角化.

$\therefore A\sim\Lambda,$

$\therefore r(A)=r(\Lambda)=2.$

（2）由（1），$Ax=0$ 的通解为 $k(1,2,-1)^T$，

$\because \beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，故有 $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta$，即 $A(1,1,1)^T=\beta$.

$\therefore Ax=\beta$ 的通解为 $k(1,2,-1)^T+(1,1,1)^T$ (k 为任意常数).

（23）（本题满分 11 分）.

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q

【答案】二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$，

因为二次型在正交变换下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2$ ，故 A 有特征值 0，

$\therefore |A|=0$ ，故 $a=2$.

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & -1 & 4\\ -1 & \lambda+1 & -1\\ 4 & -1 & \lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)=0$ 得特征值为

$\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

解齐次线性方程组 $(\lambda_i E-A)x=0$ ，求特征向量.

对 $\lambda_1=-3$ ，$-3E-A=\begin{pmatrix}-5 & -1 & 4\\ -1 & -2 & -1\\ 4 & -1 & -5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,得 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$;

对 $\lambda_2=6$ ，$6E-A=\begin{pmatrix}4 & -1 & 4\\ -1 & 7 & -1\\ 4 & -1 & 4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,得 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$;

对 $\lambda_3=0$ ，$0E-A=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 4\\ -1 & 1 & -1\\ 4 & -1 & -2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$,得 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}$;

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 属于不同特征值，已经正交，只需规范化：

令 $\beta_1=\dfrac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,\beta_2=\dfrac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\beta_3=\dfrac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$ ，

所求正交矩阵为 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$,对应标准形为 $f=-3y_1^2+6y_2^2$.