2017 年全国硕士研究生入学统一考试

数学（三）试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分．下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的．请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上．

（1）若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, x>0\\ b, x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则

(A) $ab=\frac{1}{2}$． (B) $ab=-\frac{1}{2}$． (C) $ab=0$． (D) $ab=2$．

【答案】A

【详解】由 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}=\dfrac{1}{2a}=b$,得 $ab=\dfrac{1}{2}$.

（2）二元函数 $z=xy(3-x-y)$ 的极值点

(A) $(0,0)$． (B) $(0,3)$． (C) $(3,0)$． (D) $(1,1)$．

【答案】D

【详解】由 $\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=y(3-2x-y)=0,\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=x(3-x-2y)=0\end{cases}$ 得驻点 $(0,0),(0,3),(3,0),(1,1)$；

又 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=-2y,\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-2x,\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=3-2x-2y$；$(x,y)=(1,1)$ 时, $AC-B^2>0$.

（3）设函数 $f(x)$ 可导，且 $f(x)f'(x)>0$ 则

(A) $f(1)>f(-1)$． (B) $f(1)<f(-1)$．

(C) $|f(1)|>|f(-1)|$． (D) $|f(1)|<|f(-1)|$．

【答案】C

【详解】 $f(x)f'(x)=[\dfrac{f^2(x)}{2}]'>0$,从而 $f^2(x)$ 单调递增, $f^2(1)>f^2(-1)$.

（4）若级数$\sum_{n=2}^{\infty}[\sin\frac{1}{n}-k\ln(1-\frac{1}{n})]$收敛，则$k=$

(A) 1 ． (B) 2 ． (C) -1 ． (D) -2 ．

【答案】C

【详解】$\sin\frac{1}{n}-k\ln(1-\frac{1}{n})=\frac{1}{n}-\frac{1}{6n^3}-k(-\frac{1}{n}+\frac{1}{2n^2})+o(\frac{1}{n^2})=(1+k)\frac{1}{n}-\frac{k}{2n^2}+o(\frac{1}{n^2})$，

所以$k+1=0$.

（5）设$\boldsymbol{\alpha}$为n维单位列向量，E为n阶单位矩阵，则

(A) $E-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$不可逆． (B) $E+\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$不可逆．

(C) $E+2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$不可逆． (D) $E-2\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$不可逆．

【答案】A

【详解】可设$\boldsymbol{\alpha}=(1,0,\cdots,0)^{\mathrm{T}}$,则$\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$的特征值为$1,0,\cdots,0$,从而$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$的特征值为$0,1,\cdots,1$,因此$\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}$不可逆.

（6）设有矩阵$A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&&\\&2&\\&&2\end{pmatrix}$

(A) A与C相似，B与C相似． (B) A与C相似，B与C不相似．

(C) A与C不相似，B与C相似． (D) A与C不相似，B与C不相似．

【答案】B

【详解】$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$的特征值为$2,2,1$,但$\boldsymbol{A}$有三个线性无关的特征向量,而$\boldsymbol{B}$只有两个,所以$\boldsymbol{A}$可对角化，$\boldsymbol{B}$则不行.

（7）设A,B,C为三随机事件，且A与C相互独立，B与C相互独立，则$A\cup B$与C相互独立的充分必要条件是

(A) A与B相互独立． (B) A与B互不相容．

(C) AB与C相互独立． (D) AB与C互不相容．

【答案】C

【详解】由$P[(A\cup B)C]=P(A\cup B)P(C)$得$P(ABC)=P(AB)P(C)$.

(8)设$X_1,X_2,\cdots,X_n(n\geq 2)$为来自总体$N(\mu,1)$的简单随机样本，记$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$，则下列结论不正确的是

(A) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$服从$\chi^2$分布． (B) $2(X_n-X_1)^2$服从χ^2分布．

(C) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$服从$\chi^2$分布． (D) $n(\overline{X}-\mu)^2$服从χ^2分布．

【答案】B

【详解】$\frac{X_i-\mu}{1}\sim N(0,1)\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\sim\chi^2(n),\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\sim\chi^2(n-1)$；

$\overline{X}\sim N(\mu,\frac{1}{n}),n(\overline{X}-\mu)^2\sim\chi^2(1);\ X_n-X_1\sim N(0,2),\frac{(X_n-X_1)^2}{2}\sim\chi^2(1)$.

二、填空题：9～14小题，每小题4分，共24分．请将答案写在答题纸指定位置上．

(9) $\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sin x+\sqrt{\pi^2-x^2}\right)\mathrm{d}x=$____________．

【答案】$\frac{\pi^3}{2}$

【详解】原式$=\int_{-\pi}^{\pi}\sqrt{\pi^2-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^3}{2}$.

(10)差分方程$y_{t+1}-2y_t=2^t$的通解____________．

【答案】$C2^t+t\cdot 2^{t-1}$

【详解】令特解$y_t^*=At\cdot 2^t$,代入原方程得$A=\frac{1}{2}$.

（11）设生产某产品的平均成本 $\overline{C}(Q)=1+e^{-Q}$ ，其中 Q 为产量，则边际成本为__________ .

【答案】$1+(1-Q)e^{-Q}$

【详解】$C(Q)=Q(1+\mathrm{e}^{-Q})$,对 $C(Q)$ 求导即可.

（12）设函数 $f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数，且

$df(x,y)=ye^{y}dx+x(1+y)e^{y}dy,\ f(0,0)=0$ ，则 $f(x,y)=$__________ .

【答案】xye^{y}

【详解】由 $df(x,y)=ye^{y}dx+x(1+y)e^{y}dy$,得 $f(x,y)=xye^{y}+C$,再由 $f(0,0)=0$ 解出常数.

（13）矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&2\\0&1&1\end{pmatrix}$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,$ 为线性无关的三维列向量组，则向量组

$A\alpha_1,A\alpha_2,A\alpha_3,$ 的秩为__________ .

【答案】2

【详解】$r(\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\boldsymbol{A\alpha}_3)=r(\boldsymbol{A})=2$.

（14）设随机变量 X 的概率分布为 $p\{x=-2\}=\frac{1}{2}p$ ， $p\{x=1\}=a, p\{x=3\}=b$ ，若 $EX=0$ 则 $DX=$__________ .

【答案】4.5

【详解】由 $\begin{cases}a+b=0.5,\\-1+a+3b=0\end{cases}$ 得 $a=b=0.25$,所以 $EX^2=4.5, DX=4.5$.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤．请将答案写在答题纸指定位置上．

（15）（本题满分 10 分）.

求 $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{x-t}e^t dt}{\sqrt{x^3}}$

【答案】令 $x-t=u$ ，则 $t=x-u,dt=-du$ ，

原式= $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_x^0\sqrt{u}e^{x-u}(-du)}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\int_0^x\sqrt{u}e^{x-u}du}{x^{\frac{3}{2}}}$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x\int_0^x\sqrt{u}e^{-u}du}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to0^+}e^x\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\int_0^x\sqrt{u}e^{-u}du}{x^{\frac{3}{2}}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sqrt{x}e^{-x}}{\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}}=\frac{2}{3}$$

（16）（本题满分 10 分）.

计算积分 $\iint\limits_D\dfrac{z^3}{\left(1+x^2+y^4\right)^2}dxdy$ ，其中 D 是第一象限中曲线 $y=\sqrt{x}$ 与 x 轴边界的无界区域

【答案】

$$\iint\frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}dxdy=\int_0^{+\infty}dx\int_0^{\sqrt{x}}\frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}dy=\int_0^{+\infty}\frac{1}{4}\left(\int_0^{\sqrt{x}}\frac{y^3}{(1+x^2+y^4)^2}dy^4\right)dx$$

$$=-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2+y^4}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{x}}dx=-\frac{1}{4}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+2x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\sqrt{2}x\Big|_0^{+\infty}-\arctan x\Big|_0^{+\infty}\right)=-\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{8}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

（17）（本题满分 10 分）.

求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k}{n^2}\ln\left(1+\dfrac{k}{n}\right)$

【答案】

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{n^2}\ln(1+\frac{k}{n})$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}\ln(1+\frac{1}{n})+\frac{2}{n^2}\ln(1+\frac{2}{n})+\ldots+\frac{n}{n^2}\ln(1+\frac{n}{n})\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\ln(1+\frac{1}{n})+\frac{2}{n}\ln(1+\frac{2}{n})+\ldots+\frac{n}{n}\ln(1+\frac{n}{n})\right)$$

$$=\int_0^1 x\ln(1+x)dx=\int_0^1\ln(1+x)d\frac{1}{2}x^2$$

$$=\frac{1}{2}x^2\ln(1+x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{1}{2}x^2\cdot\frac{1}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2-1+1}{1+x}dx$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}[\int_0^1(x-1)dx+\int_0^1\frac{1}{1+x}dx]$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}[(\frac{1}{2}x^2-x)\Big|_0^1+\ln(1+x)\Big|_0^1]$$

$$=\frac{1}{2}\ln 2-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1+\ln 2)=\frac{1}{4}$$

（18）（本题满分 10 分）.

已知方程 $\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}=k$ 在区间 $(0,1)$ 内有实根，求 k 的范围

【答案】构造 $F(x)=\dfrac{1}{\ln(1+x)}-\dfrac{1}{x}-k$，

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)=\lim_{x\to 0^+}(\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}-k)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}-k$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-(x-\frac{1}{2}x^2)}{x^2}-k=\frac{1}{2}-k$$，

$$F(1)=\frac{1}{\ln(1+1)}-\frac{1}{1}-k=\frac{1}{\ln 2}-1-k$$

由零点定理知：$\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)\cdot F(1)<0$，即 $(\dfrac{1}{2}-k)\cdot(\dfrac{1}{\ln 2}-1-k)<0$

则 $\frac{1}{\ln 2}-1<k<\frac{1}{2}$.

（19）（本题满分 10 分）.

若 $a_0=1$，$a_1=0$，$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}(na_n+a_{n-1})(n=1,2,3\ldots)$，$S(x)$ 为幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数.

(1)证明 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1；

(2)证明 $(1-x)S'(x)-xS(x)=0$，$x\in(-1,1)$，并求 $S(x)$.

【答案】（1）由 $(n+1)a_{n+1}=na_n+a_{n-1}$ 得 $(n+1)(a_{n+1}-a_n)=-(a_n-a_{n-1})$，

$\therefore \frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}=-\frac{1}{n+1}$.

因此，$\frac{a_{n+1}-a_n}{a_n-a_{n-1}}\cdot\frac{a_n-a_{n-1}}{a_{n-1}-a_{n-2}}\cdots\cdot\frac{a_2-a_1}{a_1-a_0}=(-1)^n\frac{1}{(n+1)!}$，

故 $a_{n+1}-a_n=(-1)^n\frac{1}{(n+1)!}(a_1-a_0)=(-1)^n\frac{1}{(n+1)!}$，

$\therefore \lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(a_{k+1}-a_k)+a_0=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(k+1)!}+1=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}+1=e^{-1}$，

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=1$，故幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径不小于 1;

（2）$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$，故 $S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$，

$\therefore (1-x)S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1}$.

由于 $(n+1)a_{n+1}=na_n+a_{n-1}$，因此，

$$(1-x)S'(x)=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=xS(x)$$

$(1-x)S'(x)-xS(x)=0, x\in(-1,1)$.解此微分方程,

$$\frac{S'(x)}{S(x)}=\frac{x}{1-x}=-1+\frac{1}{1-x}$$

$$\ln S(x)=-x-\ln(1-x)+C_0$$

$$S(x)=\frac{C_1e^{-x}}{1-x},\because S(0)=1,\therefore C_1=1,\therefore S(x)=\frac{e^{-x}}{1-x}$$

（20）(本题满分 11 分).

已知矩阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 有 3 个不同的特征值，$\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$

（1）证明：$r(A)=2$

（2）$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$，求 $Ax=\beta$ 的解.

【答案】

$\because \alpha_3=\alpha_1+\alpha_2,$

$\therefore \alpha_1+2\alpha_2-\alpha_3=0,$

$$\therefore(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}=0,\text{故}\lambda_1=0\text{是}A\text{的特征值.}$$

又 A 有三个不同的特征值，故 $\lambda_1=0$ 为单根，且 A 一定能相似对角化.

$\therefore A\sim\Lambda,$

$\therefore r(A)=r(\Lambda)=2.$

（2）由（1），$Ax=0$ 的通解为 $k(1,2,-1)^T$，

$$\because \beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\text{，故有}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\beta,\ \text{即}A(1,1,1)^T=\beta.$$

$\therefore Ax=\beta$ 的通解为 $k(1,2,-1)^T+(1,1,1)^T$ (k 为任意常数).

(21)(本题满分 11 分).

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$,

(1)求参数 a;

(2)求把二次型化成标准型的正交矩阵 Q.

【答案】

(21)二次型的矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&1&-4\\1&-1&1\\-4&1&a\end{pmatrix}$,

因为二次型在正交变换下的标准形为 $\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2$,故 A 有特征值 0 ,

$\therefore |A|=0$,故 $a=2$.

由 $|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&4\\-1&\lambda+1&-1\\4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\lambda(\lambda+3)(\lambda-6)=0$ 得特征值为

$\lambda_1=-3,\lambda_2=6,\lambda_3=0$.

解齐次线性方程组 $(\lambda_iE-A)x=0$,求特征向量.

对 $\lambda_1=-3$, $-3E-A=\begin{pmatrix}-5&-1&4\\-1&-2&-1\\4&-1&-5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$;

对 $\lambda_2=6$, $6E-A=\begin{pmatrix}4&-1&4\\-1&7&-1\\4&-1&4\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$;

对 $\lambda_3=0$, $0E-A=\begin{pmatrix}-2&-1&4\\-1&1&-1\\4&-1&-2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$,得 $\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$;

因为 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 属于不同特征值,已经正交,只需规范化:

令 $\beta_1=\frac{\alpha_1}{\|\alpha_1\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)^T,\beta_2=\frac{\alpha_2}{\|\alpha_2\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)^T,\beta_3=\frac{1}{\sqrt{6}}(1,2,1)^T$ ，

所求正交矩阵为 $Q=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}}\end{pmatrix}$,对应标准形为 $f=-3y_1^2+6y_2^2$.

（22）（本题满分 11 分）.

设随机变量 X 的分布律为 $P\{X=0\}=P\{X=2\}=\frac{1}{2}$ ，X 与 Y 相互独立，且 Y 的概率密度函数为 $f(y)=\begin{cases}2y,0<y<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$

（1）求 $P\{Y\leq EY\}$

（2）求 $Z=X+Y$ 的概率密度函数。

【答案】

（1）$EY=\int_{-\infty}^{+\infty}yf_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1 y\cdot 2y\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$ ，

$\therefore P\{Y\leq EY\}=\int_{-\infty}^{\frac{2}{3}}f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{2}{3}}2y\mathrm{d}y=\frac{4}{9}$.

（2）Z 的分布函数为

$$F_Z(z)=P\{Z\leq z\}=P\{X+Y\leq z,X=0\}+P\{X+Y\leq z,X=2\}$$

$$=P\{X=0,\ Y\leq z\}+P\{X=2,\ Y+2\leq z\}=\frac{1}{2}[P\{Y\leq z\}+P\{Y\leq z-2\}]$$

$$=\frac{1}{2}[F_Y(z)+F_Y(z-2)]$$

故 Z 的概率密度函数为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\frac{1}{2}[f(z)+f(z-2)]=\begin{cases}0, & z<0\\ z, & 0\le z<1\\ 0, & 1\le z<2\\ z-2, & 2\le z<3\\ 0, & z\ge 3\end{cases}=\begin{cases}z, & 0\le z<1\\ z-2, & 2\le z<3\\ 0, & \text{其它}\end{cases}.$$

（23）（本题满分 11 分）.

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的.设 n 次测量结果 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$.该工程师记录的 n 次测量的绝对误差 $Z_i=|X_i-\mu|(i=1,2,\cdots,n)$，利用 $Z_1,Z_2,\cdots Z_n$ 估计 σ.

（1）求 Z_i 的概率密度；

（2）利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

（3）求 σ 的最大似然估计量.

【答案】Z_1 的分布函数为 $F_{Z_1}(z)=P\{Z_1\le z\}=P\{|X_1-\mu|\le z\}=P\left\{\left|\frac{X_1-\mu}{\sigma}\right|\le\frac{z}{\sigma}\right\}$，

$z\le 0$时$,F_{Z_1}(z)=0;$

$z>0$时$,F_{Z_1}(z)=2\Phi\left(\frac{z}{\sigma}\right)-1.$

所以 Z_i 的概率密度均为 $f_Z(z)=F_Z'(z)=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}, & z>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}.$

（2）$EZ_1=\int_0^{+\infty}z\cdot\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z^2}{2\sigma^2}}dz\overset{令t=z/\sigma}{=}\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}te^{-\frac{t^2}{2}}dt=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left(-e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_0^{+\infty}\right)=\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}$，

令 $EZ_1=\overline{Z}$，即 $\frac{2\sigma}{\sqrt{2\pi}}=\overline{Z}$，得 σ 的矩估计量为：

$\hat{\sigma}=\frac{\sqrt{2\pi}}{2}\overline{Z}$ ，其中$\overline{Z}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i$.

（3）记$Z_1,Z_2,\cdots,Z_n$的观测值为$z_1,z_2,\cdots,z_n$ ，当$z_i>0(i=1,2,\cdots,n)$时，

似然函数为$L(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}f(z_i;\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{z_i^2}{2\sigma^2}}=2^n\cdot(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\cdot\sigma^{-n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$ ，

$\therefore \ln L(\sigma)=n\ln 2-\frac{n}{2}\ln(2\pi)-n\ln\sigma-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}z_i^2$ ，

令$\frac{d\ln L(\sigma)}{d\sigma}=-\frac{n}{\sigma}+\frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}z_i^2=0$，得$\sigma=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}z_i^2}$

$\therefore \sigma$的最大似然估计量为$\hat{\sigma}=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}Z_i^2}$.