零点

题型：函数零点的判定（零点存在性定理）

例 1 已知函数 $f(x)=\ln x-\left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$ 的零点为 x_0，则 x_0 所在的区间是(　　)

A．(0,1)　　B．(1,2)　　C．(2,3)　　D．(3,4)

答案　C

变式 1 已知函数 $f(x)=\frac{6}{x}-\log_2 x$，在下列区间中，包含 $f(x)$ 零点的区间是(　　)

A．(0,1)　　B．(1,2)　　C．(2,4)　　D．(4，+∞)

答案：C.

变式 2 根据表格中的数据，可以判定方程 $e^x-x-2=0$ 的一个根所在的区间为（　　）

x	−1	0	1	2	3
e^x	0.37	1	2.72	7.39	20.09
$x+2$	1	2	3	4	5

A.（-1,0）　　B.（0,1）　　C.（1,2）　　D.（2,3）

答案：C.

题型：　函数零点个数的判定

方法：单调性，函数零点的定义，数形结合

例 3 函数 $f(x)=x\ln(x-2)$ 的零点个数是_____.

答案：1.

变式 1 函数 $f(x)=\begin{cases}x^2-2, x\le 0\\ 2x-6+\ln x, x>0\end{cases}$ 的零点个数是_____.

答案：2.

变式 2 函数 $f(x)=x^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$ 的零点个数为(　　)

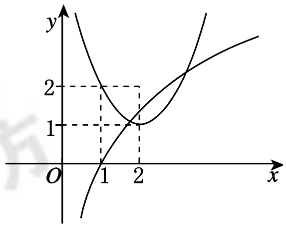
A．0　　B．1　　C．2　　D．3

答案：B.

变式 3 函数 $f(x)=2\ln x$ 的图像与函数 $g(x)=x^2-4x+5$ 的图像的交点个数为(　　)

A．3　　B．2　　C．1　　D．0

解析: 作出函数 $f(x)=2\ln x$ 与 $g(x)=x^2-4x+5$ 的图像如图：可知，其交点个数为 2，选 B.



题型　用二分法求函数零点的近似值

用二分法求函数 $f(x)$ 零点近似值的步骤

第一步，确定区间，验证 $f(a)f(b)<0$；

第二步，求区间 (a,b) 的中点 c_1；

第三步，计算 $f(c_1)$：

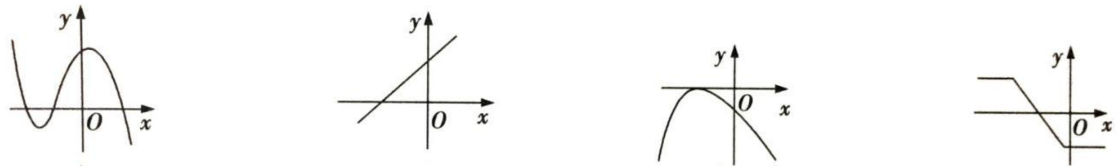
(1)若 $f(c_1)=0$，则 c_1 就是函数的零点；

(2)若 $f(a)f(c_1)<0$，则令 $b=c_1$ (此时零点 $x_0\in(a,c_1)$)；

(3)若 $f(b)f(c_1)<0$，则令 $a=c_1$ (此时零点 $x_0\in(c_1,b)$)；

第四步，判断 x_0 是否满足给定的精确度；否则重复第二、三、四步．

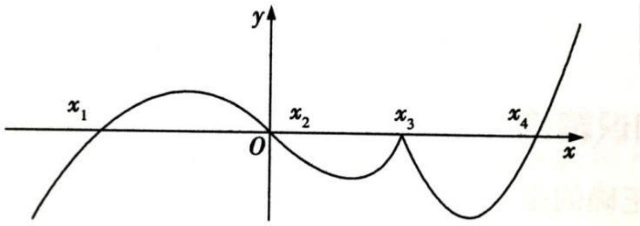
例 下列图像中，不能用二分法求函数零点的是（　　）.



A B C D

答案：C.

变式 1 用二分法求如图所示的函数零点时，不可能求出的零点是_______.



变式 2 用二分法求方程 $\ln(2x+6)+2=3^x$ 的根的近似值时，令 $f(x)=\ln(2x+6)+2-3^x$，并用计算器计算得到下表：

x	1.00	1.25	1.375	1.50
$f(x)$	1.079 4	0.191 8	−0.360 4	−0.998 9

则由表中的数据，可得到方程的一个近似解（精确度为 0.1）为（　　）.

A.1.125　　B.1.3125　　C.1.4375　　D.1.46875

答案：B.

题型　函数零点的应用 （一元二次方程区间根问题）

例 4 若函数 $f(x)=(m-2)x^2+mx+(2m+1)$ 的两个零点分别在区间(-1,0)和区间(1,2)内，则 m 的取值范围是(　　)

A. $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$　　B. $\left(-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$　　C. $\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$　　D. $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right]$

答案：由题意知 $\begin{cases} m \neq 2 \\ f(-1)f(0)<0 \\ f(1)f(2)<0 \end{cases}$，解得答案 C.

变式 1 已知关于 x 的方程 $x^2-(2m-8)x+m^2-16=0$ 的两个实根为 x_1,x_2，且满足 $x_2<\frac{3}{2}<x_1$，则实数 m 的取值范围是.

答案：$\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{2}\right)$.

变式 2 已知 $f(x)=2(m+1)x^2+4mx+2m-1$.

（1）当 m 满足什么条件时，函数 $f(x)$ 有两个零点？

（2）若函数 $f(x)$ 有两个零点 x_1,x_2，且 $x_1<0<x_2$，求实数 m 的取值范围.

答案：$m<1$，且 $m\neq-1$.

变式 3 已知关于 x 的二次方程 $x^2+2mx+2m+1=0$.

（1）若方程有两根，其中一根在区间 $(-1,0)$ 上，另一个根在 $(1,2)$ 内，求实数 m 的取值范围.

（2）若方程两根均在区间 $(0,1)$ 内，求实数 m 的取值范围.

答案：（1）$\left(-\frac{5}{6},-\frac{1}{2}\right)$；（2）$\left(-\frac{1}{2},1-\sqrt{2}\right]$.

第一章　算法

程序框图

例　写出求 $2+4+6+\cdots+100$ 的值的一个算法，并画出程序框图

解析▶方法一　含直到型循环的算法：

第一步，$S=0$.

第二步，$i=2$.

第三步，$S=S+i$.

第四步，$i=i+2$.

第五步，如果 $i>100$ 成立，则输出 S；否则，返回第三步.

相应的程序框图如图 1.1.2－18 所示.

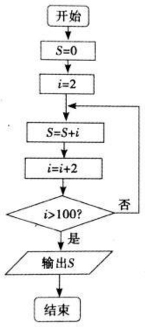


图 1.1.2－18

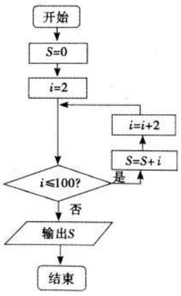


图 1.1.2－19

方法二　含当型循环的算法：

第一步，$S=0$.

第二步，$i=2$.

第三步，当 $i\leqslant 100$ 时，$S=S+i$，$i=i+2$，重复执行第三步；否则，执行第四步.

第四步，输出 S.

相应的程序框图如图 1.1.2－19 所示.

变式 1 已知函数 $y=\begin{cases}2x-1, & x<0\\ x^2+1, & 0\le x<1\\ x^3+2x, & x\ge 1\end{cases}$，写出求该函数的函数值的算法及程序框图.

思路点拨▶

画程序框图时，必须采用条件结构

函数解析式分了三段

→ 需要两个判断框，即进行两次判断

解析▶ 算法如下：

第一步，输入 x.

第二步，如果 $x<0$，那么 $y=2x-1$，然后执行第四步；否则，执行第三步.

第三步，如果 $x<1$，那么 $y=x^2+1$；否则，$y=x^3+2x$.

第四步，输出 y.

程序框图如图 1.1.2－16 所示.

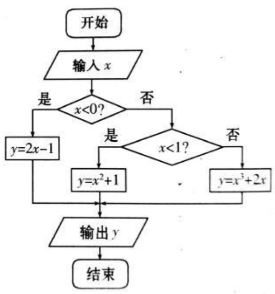


图 1.1.2－16.

名师点评▶ 本题是一个条件结构的嵌套，$y=x^2+1$ 是满足条件 $0\leqslant x<1$ 时的关系式；$y=x^3+2x$ 是满足条件 $x\geqslant 1$ 时的关系式.

变式 2 如图是算法的程序框图，若此程序运行的结果为 $S=720$，则判断框内可填入的条件是

A　$k\ge 6$　　　B　$k\ge 7$　　　C　$k\ge 8$　　　D　$k\ge 9$

答案：C

算法语句

例 阅读下列程序，分别输入 0,1,4,8,9,10，则输出的结果是

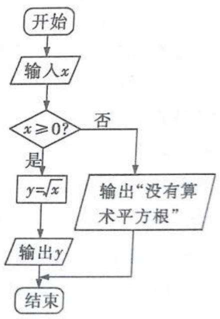
A 0，8　　B 4，8　　C 0，4，8　　D 0，1，4，8，9，10

```
INPUT "x=";x
IF x MOD 4=0 THEN
  PRINT x
END IF
END
```

例 任给一个实数，编写程序求它的算数平方根，并画出程序框图.

解析▶程序如下：

```
INPUT "请输入任意一个实数";x
IF x>=0 THEN
  y=SQR(x)
  PRINT "算术平方根为";y
ELSE
  PRINT "没有算术平方根"
END IF
END
```



变式 1 设计一个程序，输入学生的成绩 S，根据成绩的不同值进行以下输出，若 $S<60$，则输出"不及格"；若 $60\le S\le 90$，则输出"及格"；若 $S>90$，则输出"优秀".

解析▶程序如下：

```
INPUT "S=";S
IF S<60 THEN
  PRINT "不及格"
END IF
IF S>=60 AND S<=90 THEN
  PRINT "及格"
END IF
IF S>90 THEN
  PRINT "优秀"
END IF
END
```

变式 2 编写程序，任意输入三个正实数，判断它们能否构成三角形，若能，判断它们能否作为直角三角形的边长.

```
INPUT "请输入三个正数 a,b,c:";a,b,c
IF  a+b<=c  OR  b+c<=a  OR  c+a<=b  THEN
  PRINT "不能构成三角形"
ELSE
  IF  a*a=b*b+c*c  OR  b*b=a*a+c*c  OR
  c*c=a*a+b*b  THEN
     PRINT "能构成三角形且能作为直角三角形的三边长"
  ELSE
    PRINT "能构成三角形但不能作为直角三角形的三边长"
  END IF
END IF
END
```

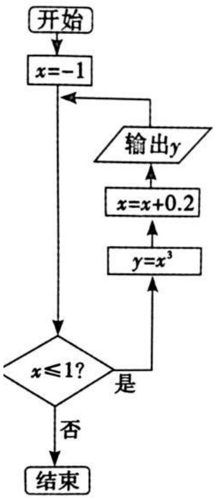
例 下列程序的结果是________

```
i=12
s=1
DO
     s=s*i
     i=i-1
LOOP UNTIL  i<11
PRINT  s
END
```

答案：132

例 根据下面的程序画出相应的程序框图

```
x= -1
WHILE  x<=1
   y=x*x*x
   x=x+0.2
   PRINT  y
WEND
END
```



算法案例

类型一　辗转相除法

给定两个正整数，用较大的数除以较小的数，若余数不为 0，则将余数和较小的数构成新的一对数，继续上面的除法，直到大数被小数除尽为止，这时的较小的数即为原来两个数的最大公约数.

例 求 319 与 261 的最大公约数.

答案：29

变式 利用辗转相除法求最大公约数，下列说法不正确的是（　　　　　　　　　　）

A.228 和 1995 的最大公约数是 57　　　　B.204 和 85 的最大公约数是 17

C. 85 和 357 的最大公约数是 34　　　　D.153 和 119 的最大公约数是 17

类型二　更相减损术

给定两个正整数，用较大的数减去较小的数，然后将差和较小的数构成新的一对数，继续上面的减法，直到差和较小的数相等，此时相等的两数即为原来两个数的最大公约数.

注 利用更相减损术求两个正整数的最大公约数时，需要先判断这两个数是否都是偶数，如果是偶数，

用 2 约分化简直到两个数不都是偶数为止，然后按照更相减损术的定义进行计算，注意求最大公约数时一定不要忘记乘前面步骤中被约掉的数.

例 用更相减损术求 612 和 468 的最大公约数.

答案：9

类型三 秦九韶算法

秦九韶算法是我国南宋数学家秦九韶在他的代表作《数书九章》中提出的一种用于计算一元 n 次多项式的值的算法.用秦九韶算法求 n 次多项式:

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ 在 $x=x_0$ 时的值，其基本原理是：

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=(a_nx^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1)x+a_0$$

$$=((a_nx^{n-2}+a_{n-1}x^{n-3}+\cdots+a_2)x+a_1)x+a$$

$$=\cdots$$

$$=(\cdots((a_nx+a_{n-1})x+a_{n-2})x+\cdots+a_1)x+a_0$$

递推公式为 $\begin{cases} v_0=a_n \\ v_k=v_{k-1}x+a_{n-k}\,(k=1,2,3,\ldots n) \end{cases}$

例 用秦九韶算法求 $f(x)=x^5-5x^4+x^3-1$ 当 $x=2$ 时的值.

答案： -14

变式 用秦九韶算法，求当学 x=4 时，多项式 $f(x)=7x^6+6x^5+3x^2+2$ 的值，先算的是（　　）

A.4×4=16　　B. 7×4=28　　C. 4×4×4=64　　D. 7×4+6=34

答案：D

变式 用秦九韶算法计算多项式$f(x)=3x^6+4x^5+5x^4+6x^3+7x^2+8x+1$当$x=0.4$时的值时，需要做的乘法运算和加法运算的次数是（　　）

A 6，6　　B 5，6　　C 5，5　　D 6，5

答案：A

类型四　进位制

（1）k进制数：满k进 1 的数

（2）进制间的转化

①k进制转换为十进制；

一个k进制的正整数可以表示成不同位上的数字与基数的幂的乘积之和的形式，再按照十进制数的运算规则计算出结果.

②十进制转换为k进制（除k取余）.

第一步：将给定的十进制整数除以基数k,余数便是等值的k进制数的最低位

第二步：将上一步的商再除以基数k,余数便是等值的k进制数的次低位

第三步：重复第二步，直到最后的商等于 0 为止.各次所得余数就是k进制各位的数，最后一次的余数是最高位.

例（1）将 79 转化为二进制数为_____________.

（2）将八进制数$127_{(8)}$化为二进制数为_____________.

答案：（1）　　；（2）$1010111_{(2)}$

例　若$10y1_{(2)}=x02_{(3)}$，求数字 x，y 的值及与$10y1_{(2)}$，$x02_{(3)}$等值的十进制数.

变式　下列五个数中，可能是四进制数的个数是（　　）

1230,2410,2421,1203,2313

A.1　　B.2　　C.3　　D.4

变式　与二进制数$1011_{(2)}+10_{(2)}$的值相等的是（　　）

A. $1011_{(2)}$　　B. $1100_{(2)}$　　C. $1101_{(2)}$　　D. $1000_{(2)}$

变式　把五进制数$1234_{(5)}$转化为十进制数，再把它转化为八进制数.

第二章统计

三种抽样方法的特点与区别：

例题　某学校为了了解某年高考数学的考试成绩，在高考后对该校 1 200 名考生进行抽样调查，其中有 400 名文科考生，600 名理科考生，200 名艺术和体育类考生，从中抽取 120 名考生作为样本，记这项调查为①；从 10 名家长中随机抽取 3 名参加座谈会，记这项调查为②，则完成①，②这两项调查宜采用的抽样方法依次是(　　)

A．分层抽样法，系统抽样法　　B．分层抽样法，简单随机抽样法

C．系统抽样法，分层抽样法　　D．简单随机抽样法，分层抽样法

解析：选 B　在①中，文科考生、理科考生、艺术和体育类考生会存在差异，采用分层抽样法较好；在②中，抽取的样本个数较少，宜采用简单随机抽样法．

例题　总体由编号为 01，02，…，19,20 的 20 个个体组成．利用下面的随机数表选取 5 个个体，选取方法是从随机数表第 1 行的第 5 列和第 6 列数字开始由左到右依次选取两个数字，则选出来的第 5 个个体的编号为(　　)

7816	6572	0802	6314	0702	4369	9728	0198
3204	9234	4935	8200	3623	4869	6938	7481

A.08　　B．07　　C．02　　D．01

答案：D

例题、(1)为了解 1 000 名学生的学习情况，采用系统抽样的方法，从中抽取容量为 40 的样本，则分段的间隔为(　　)

A．50　　B．40　　C．25　　D．20

(2)某单位有 840 名职工，现采用系统抽样方法抽取 42 人做问卷调查，将 840 人按 1，2，…，840 随机编号，则抽取的 42 人中，编号落入区间[481,720]的人数为(　　)

A．11　　B．12　　C．13　　D．14

解析： (1)由$\frac{1\ 000}{40}=25$，可得分段间隔为 25.

(2)由系统抽样定义可知，所分组距为$\frac{840}{42}=20$，每组抽取一个，因为包含整数个组，所以抽取个体在区间[481,720]的数目为$(720-480)\div20=12$.

答案：(1)C　(2)B

变式、采用系统抽样方法从 960 人中抽取 32 人做问卷调查，为此将他们随机编号为 1,2，…，960，分组后在第一组采用简单随机抽样的方法抽到的号码为 9，抽到的 32 人中，编号落入区间[1,450]的人做问卷 A，编号落入区间[451,750]的人做问卷 B，其余的人做问卷 C，则抽到的人中，做问卷 B 的人数为(　　)

A．7　B．9　C．10　D．15

解析：选 C　由题意知应将 960 人分成 32 组，每组 30 人．设每组选出的人的号码为 $30k+9$($k=0,1$，…，31)．由 $451\le 30k+9\le 750$，解得$\frac{442}{30}\le k\le\frac{741}{30}$，又 $k\in\mathbf{N}$，故 $k=15,16$，…，24，共 10 人．

角度一：计算某一层应抽取的样本数

例题、(2015·北京高考)某校老年、中年和青年教师的人数见下表，采用分层抽样的方法调查教师的身体状况，在抽取的样本中，青年教师有 320 人，则该样本中的老年教师人数为(　　)

类别	人数
老年教师	900
中年教师	1800
青年教师	1600
合计	4300

A．90　B．100　C．180　D．300

变式、某校高中生有 900 名，其中高一有 400 名，高二有 300 名，高三有 200 名，打算抽取容量为 45 的一个样本，则高三学生应抽取________人．

答案：10

角度二：求样本容量

例题　(2016·东北三校联考)某工厂生产甲、乙、丙三种型号的产品，产品数量之比为 3∶5∶7，

现用分层抽样的方法抽出容量为 n 的样本，其中甲种产品有 18 件，则样本容量 $n=$(　　)

A．54　B．90　C．45　D．126

变式 1、甲、乙两套设备生产的同类型产品共 4 800 件，采用分层抽样的方法从中抽取一个容量为 80 的样本进行质量检测．若样本中有 50 件产品由甲设备生产，则乙设备生产的产品总数为________件．

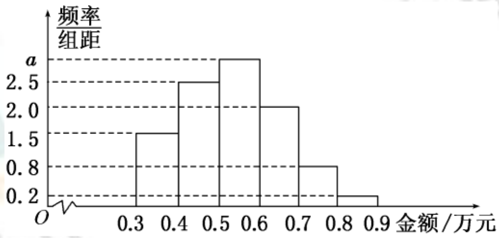
变式 2、某市有 A、B、C 三所学校，共有高三文科学生 1 500 人，且 A、B、C 三所学校的高三文科学生人数成等差数列，在三月进行全市联考后，准备用分层抽样的方法从所有高三文科学生中抽取容量为 120 的样本，进行成绩分析，则应从 B 校学生中抽取________人．

用样本的频率分布估计总体分布：

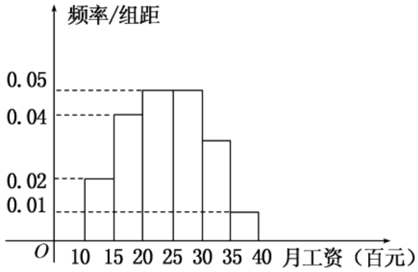
例题　(2015·湖北高考)某电子商务公司对 10 000 名网络购物者 2014 年度的消费情况进行统计，发现消费金额(单位：万元)都在区间[0.3,0.9]内，其频率分布直方图如图所示．

①直方图中的 $a=$________；

②在这些购物者中，消费金额在区间[0.5,0.9]内的购物者的人数为________．



变式 1、某地政府调查了工薪阶层 1 000 人的月工资收入，并根据调查结果画出如图所示的频率分布直方图，为了了解工薪阶层对月工资收入的满意程度，要用分层抽样的方法从调查的 1 000 人中抽出 100 人做电话询访，则(30,35](百元)月工资收入段应抽出________人．



方法·规律

1．绘制频率分布直方图时需注意：

(1)制作好频率分布表后，可以利用各组的频率之和是否为 1 来检验该表是否正确；

(2)频率分布直方图的纵坐标是$\frac{频率}{组距}$，而不是频率．

2．由频率分布直方图进行相关计算时，需掌握下列关系式：

(1)$\frac{频率}{组距}\times$组距＝频率；

(2)$\frac{频数}{样本容量}$＝频率，此关系式的变形为$\frac{频数}{频率}$＝样本容量，样本容量×频率＝频数．

例题 某市为了考核甲、乙两部门的工作情况，随机访问了 50 位市民．根据这 50 位市民对这两部门的评分(评分越高表明市民的评价越高)，绘制茎叶图如下：

甲部门		乙部门
	3	5 9
4	4	0 4 4 8
9 7	5	1 2 2 4 5 6 6 7 7 7 8 9
9 7 6 6 5 3 3 2 1 1 0	6	0 1 1 2 3 4 6 8 8
9 8 8 7 7 7 6 6 5 5 5 5 5 4 4 4 3 3 3 2 1 0 0	7	0 0 1 1 3 4 4 9
6 6 5 5 2 0 0	8	1 2 3 3 4 5
6 3 2 2 2 0	9	0 1 1 4 5 6
	10	0 0 0

①分别估计该市的市民对甲、乙两部门评分的中位数；

②分别估计该市的市民对甲、乙两部门的评分高于 90 的概率；

③根据茎叶图分析该市的市民对甲、乙两部门的评价．

解析：①由所给茎叶图知，50 位市民对甲部门的评分由小到大排序，排在第 25,26 位的是 75,75，

故样本中位数为 75，所以该市的市民对甲部门评分的中位数的估计值是 75.

50 位市民对乙部门的评分由小到大排序，排在第 25,26 位的是 66,68，故样本中位数为$\frac{66+68}{2}=67$，所以该市的市民对乙部门评分的中位数的估计值是 67.

②由所给茎叶图知，50 位市民对甲、乙部门的评分高于 90 的比率分别为$\frac{5}{50}=0.1$，$\frac{8}{50}=0.16$，故该市的市民对甲、乙部门的评分高于 90 的概率的估计值分别为 0.1，0.16.

③由所给茎叶图知，市民对甲部门的评分的中位数高于对乙部门的评分的中位数，而且由茎叶图可以大致看出对甲部门的评分的标准差要小于对乙部门的评分的标准差，说明该市市民对甲部门的评价较高、评价较为一致，对乙部门的评价较低、评价差异较大.

用样本的数字特征估计总体的数字特征：

例题 (2015·安徽高考)若样本数据 x_1，x_2，…，x_{10}的标准差为 8，则数据 $2x_1-1, 2x_2-1$，…，$2x_{10}-1$ 的标准差为(　　)

A．8　　　B．15　　　C．16　　　D．32

解析：选 C　已知样本数据 x_1，x_2，…，x_{10}的标准差为 $s=8$，则 $s^2=64$，数据 $2x_1-1, 2x_2-1$，…，$2x_{10}-1$ 的方差为 $2^2s^2=2^2\times64$，所以其标准差为$\sqrt{2^2\times64}=2\times8=16$，故选 C.

例题 甲、乙、丙、丁四人参加某运动会射击项目选拔赛，四人的平均成绩和方差如下表所示：

	甲	乙	丙	丁
平均环数 $\bar{x}$	8.3	8.8	8.8	8.7
方差 s^2	3	3	2	5

	.5	.6	.2	.4

从这四个人中选择一人参加该运动会射击项目比赛，最佳人选是(　　)

A．甲　B．乙　C．丙　D．丁

答案：C

变式 某工厂 36 名工人的年龄数据如下表.

工人编号	年龄	工人编号	年龄	工人编号	年龄	工人编号	年龄
1	40	10	36	19	27	28	34
2	44	11	31	20	43	29	39
3	40	12	38	21	41	30	43
4	41	13	39	22	37	31	38
5	33	14	43	23	34	32	42
6	40		45	24	42	33	53

		15					
7	45	16	39	25	37	34	37
8	42	17	38	26	44	35	49
9	43	18	36	27	42	36	39

(1)用系统抽样法从 36 名工人中抽取容量为 9 的样本，且在第一分段里用随机抽样法抽到的年龄数据为 44，列出样本的年龄数据；

(2)计算(1)中样本的均值 $\overline{x}$ 和方差 s^2；

(3)36 名工人中年龄在 $\overline{x}-s$ 与 $\overline{x}+s$ 之间有多少人？所占的百分比是多少(精确到 0.01%)?

解：(1)由系统抽样的知识可知，36 人分成 9 组，每组 4 人，其中第一组的工人年龄为 44，所以其编号为 2，故所有样本数据的编号为 $4n-2$，$n=1,2,\ldots,9$.其数据为：44,40,36,43,36,37,44,43,37.

(2) $\overline{x}=\dfrac{44+40+\ldots+37}{9}=40.$

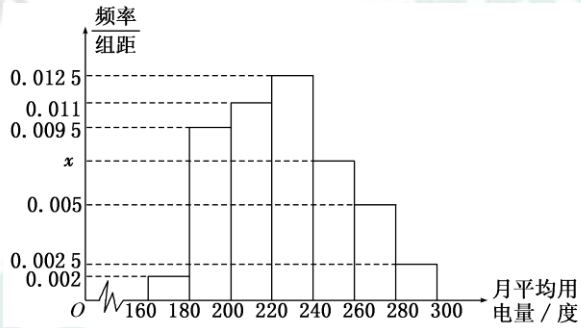
由方差公式知，$s^2=\dfrac{1}{9}[(44-40)^2+(40-40)^2+\ldots+(37-40)^2]=\dfrac{100}{9}.$

(3)因为 $s^2=\dfrac{100}{9}$，所以 $s=\dfrac{10}{3}\in(3,4)$，

所以 36 名工人中年龄在 $\overline{x}-s$ 和 $\overline{x}+s$ 之间的人数等于在区间[37,43]内的人数，即 40,40,41，…，39，共 23 人．

所以 36 名工人中年龄在 $\overline{x}-s$ 和 $\overline{x}+s$ 之间的人数所占的百分比为 $\frac{23}{36}\approx 63.89\%$.

例题 (2015·广东高考)某城市 100 户居民的月平均用电量(单位：度)，以[160,180)，[180,200)，[200,220)，[220,240)，[240,260)，[260,280)，[280,300]分组的频率分布直方图如图．



(1)求直方图中 x 的值；

(2)求月平均用电量的众数和中位数；

(3)在月平均用电量为[220,240)，[240,260)，[260,280)，[280,300]的四组用户中，用分层抽样的方法抽取 11 户居民，则月平均用电量在[220,240)的用户中应抽取多少户？

解析：(1)由 $(0.002+0.009\,5+0.011+0.012\,5+x+0.005+0.002\,5)\times 20=1$ 得 $x=0.007\,5$，

∴直方图中 x 的值为 0.007 5.

(2)月平均用电量的众数是 $\frac{220+240}{2}=230$.

∵$(0.002+0.009\,5+0.011)\times 20=0.45<0.5$，

∴月平均用电量的中位数在[220,240)内，设中位数为 a，则 $(0.002+0.009\,5+0.011)\times 20+0.012\,5\times(a-220)=0.5$，解得 $a=224$，即中位数为 224.

(3)月平均用电量在[220,240)的用户有 $0.012\,5\times 20\times 100=25$(户)，同理可求月平均用电量为[240,260)，[260,280)，[280,300)的用户分别有 15 户、10 户、5 户，故抽取比例为 $\frac{11}{25+15+10+5}$

$=\frac{1}{5}$，

∴从月平均用电量在[220,240)的用户中应抽取 $25\times\frac{1}{5}=5$(户)．

易错·警示

频率分布直方图与众数、中位数、平均数的关系

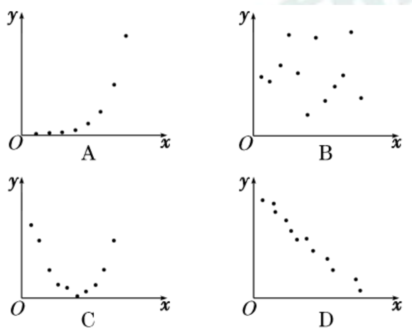
(1)最高的小长方形底边中点的横坐标即是众数；

(2)中位数左边和右边的小长方形的面积和是相等的；

(3)平均数是频率分布直方图的“重心”，等于频率分布直方图中每个小长方形的面积乘以小长方形底边中点的横坐标之和．

变量间的相关关系：

例题、下列四个散点图中，变量 x 与 y 之间具有负的线性相关关系的是(　　)



变式 1、 (2015·湖北高考)已知变量 x 和 y 满足关系 $y=-0.1x+1$，变量 y 与 z 正相关．下列结论中正确的是(　　)

A．x 与 y 正相关，x 与 z 负相关

B．x 与 y 正相关，x 与 z 正相关

C．x 与 y 负相关，x 与 z 负相关

D．x 与 y 负相关，x 与 z 正相关

例题、已知 x，y 的取值如下表，从散点图可以看出 y 与 x 线性相关，且回归方程为 $\hat{y}=0.95x+a$，则 $a=$(　　)

	0	1	3	4
	2 .2	4.3	4 .8	6 .7

A.3.25　　B．2.6　　C．2.2　　D．0

解析：选 B　由已知得 $\overline{x}=2$，$\overline{y}=4.5$，因为回归方程经过点($\overline{x}$，$\overline{y}$)，所以 $a=4.5-0.95\times2=2.6$.

变式 1、(2015·福建高考)为了解某社区居民的家庭年收入与年支出的关系，随机调查了该社区 5 户家庭，得到如下统计数据表：

收入 x(万元)	8 .2	8 .6	1 0.0	1 1.3	1 1.9
支出 y(万元)	6 .2	7 .5	8 .0	8 .5	9 .8

根据上表可得回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中 $\hat{b}=0.76$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.据此估计，该社区一户年收入为 15 万元家庭的年支出为(　　)

A．11.4 万元　B．11.8 万元　C．12.0 万元　D．12.2 万元

解析：选 B　$\because\overline{x}=10.0$，$\overline{y}=8.0$，$\hat{b}=0.76$，$\therefore\hat{a}=8-0.76\times10=0.4$，$\therefore$回归方程为 $\hat{y}=0.76x+0.4$，把 $x=15$ 代入上式得，$\hat{y}=0.76\times15+0.4=11.8$(万元)．

例题、从某居民区随机抽取 10 个家庭，获得第 i 个家庭的月收入 x_i(单位：千元)与月储蓄 y_i(单

位：千元)的数据资料，算得$\sum_{i=1}^{10}x_i=80$，$\sum_{i=1}^{10}y_i=20$，$\sum_{i=1}^{10}x_iy_i=184$，$\sum_{i=1}^{10}x_i^2=720$.

(1)求家庭的月储蓄$\hat{y}$对月收入x的线性回归方程$\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$；

(2)判断变量x与y之间是正相关还是负相关；

(3)若该居民区某家庭月收入为 7 千元，预测该家庭的月储蓄．

解：(1)由题意知$n=10$，

$$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\frac{80}{10}=8,$$

$$\overline{y}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_i=\frac{20}{10}=2,$$

又$\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2=720-10\times8^2=80$，

$$\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\,\overline{y}=184-10\times8\times2=24,$$

由此得$\hat{b}=\frac{24}{80}=0.3$，

$$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}=2-0.3\times8=-0.4,$$

故所求线性回归方程为$\hat{y}=0.3x-0.4$.

(2)由于变量y的值随x值的增加而增加($\hat{b}=0.3>0$)，故x与y之间是正相关．

(3)将 $x=7$ 代入回归方程可以预测该家庭的月储蓄为 $\hat{y}=0.3\times7-0.4=1.7$(千元)．

变式 1、假设关于某设备的使用年限 x(年)和所支出的维修费用 y(万元)，有如下表的统计资料：

使用年限 x(年)	2	3	4	5	6
维修费用 y(万元)	2.2	3.8	5.5	6.5	7.0

若由资料可知 y 对 x 呈线性相关关系，试求：

(1)线性回归直线方程；

(2)根据回归直线方程，估计使用年限为 12 年时，维修费用是多少？

解：(1)列表

i	1	2	3	4	5	总计
x_i	2	3	4	5	6	20
y_i	2.2	3.8	5.5	6.5	7.0	25
x_iy_i	4.4	11.4	22.0	32.5	42.0	112.3
x_i^2	4	9	16	25	36	90

$$\overline{x}=4，\overline{y}=5；$$

$$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=90；\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=112.3$$

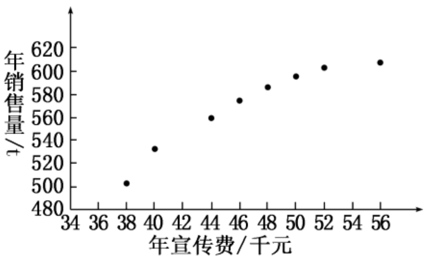
$$\hat{b}=\frac{\sum_{i=1}^{5}x_iy_i-5\overline{x}\,\overline{y}}{\sum_{i=1}^{5}x_i^2-5\overline{x}^2}=\frac{112.3-5\times4\times5}{90-5\times4^2}=1.23，$$

于是$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\,\overline{x}=5-1.23\times4=0.08.$

所以线性回归直线方程为$\hat{y}=1.23x+0.08.$

(2)当 $x=12$ 时，$\hat{y}=1.23\times12+0.08=14.84$(万元)，即估计使用 12 年时，维修费用是 14.84 万元．

变式 2(2015·新课标全国卷Ⅰ)某公司为确定下一年度投入某种产品的宣传费，需了解年宣传费 x(单位：千元)对年销售量 y(单位：t)和年利润 z(单位：千元)的影响．对近 8 年的年宣传费 x_i和年销售量 y_i($i=1,2,\ldots,8$)数据作了初步处理，得到下面的散点图及一些统计量的值．



$\overline{x}$	$\overline{y}$	$\overline{w}$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})^2$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(x_i-\overline{x})(y_i-\overline{y})$	$\sum\limits_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})(y_i-\overline{y})$
46.6	563	6.8	289.8	1.6	1.469	108.8

表中 $w_i=\sqrt{x_i}$，$\overline{w}=\frac{1}{8}\sum\limits_{i=1}^{8}w_i$.

(1)根据散点图判断，$y=a+bx$ 与 $y=c+d\sqrt{x}$ 哪一个适宜作为年销售量 y 关于年宣传费 x 的回归方程类型？(给出判断即可，不必说明理由)

(2)根据(1)的判断结果及表中数据，建立 y 关于 x 的回归方程；

(3)已知这种产品的年利润 z 与 x，y 的关系为 $z=0.2y-x$.根据(2)的结果回答下列问题：

①年宣传费 $x=49$ 时，年销售量及年利润的预报值是多少？

②年宣传费 x 为何值时，年利润的预报值最大？

附：对于一组数据$(u_1，v_1)$，$(u_2，v_2)$，…，$(u_n，v_n)$，其回归直线 $v=\alpha+\beta u$ 的斜率和截距的最小二乘估计分别为

$$\hat{\beta}=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})(v_i-\overline{v})}{\sum\limits_{i=1}^{n}(u_i-\overline{u})^2}，\hat{\alpha}=\overline{v}-\hat{\beta}\overline{u}.$$

解(1)由散点图可以判断，$y=c+d\sqrt{x}$适宜作为年销售量y关于年宣传费x的回归方程类型．

(2)令 $w=\sqrt{x}$，先建立y关于w的线性回归方程．由于

$$\hat{d}=\frac{\sum_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})(y_i-\overline{y})}{\sum_{i=1}^{8}(w_i-\overline{w})^2}=\frac{108.8}{1.6}=68,$$

$$\hat{c}=\overline{y}-\hat{d}\,\overline{w}=563-68\times6.8=100.6,$$

所以y关于w的线性回归方程为$\hat{y}=100.6+68w$，因此y关于x的回归方程为$\hat{y}=100.6+68\sqrt{x}$.

(3)①由(2)知，当$x=49$时，年销售量y的预报值

$$\hat{y}=100.6+68\sqrt{49}=576.6,$$

年利润z的预报值

$$\hat{z}=576.6\times0.2-49=66.32.$$

②根据(2)的结果知，年利润z的预报值

$$\hat{z}=0.2(100.6+68\sqrt{x})-x=-x+13.6\sqrt{x}+20.12.$$

所以当$\sqrt{x}=\frac{13.6}{2}=6.8$，即$x=46.24$时，$\hat{z}$取得最大值．

故年宣传费为46.24千元时，年利润的预报值最大．

第三章概率

古典概型的概率计算

例题　(2015·山东高考)某中学调查了某班全部45名同学参加书法社团和演讲社团的情况，数据

如下表：(单位：人)

	参加书法社团	未参加书法社团
参加演讲社团	8	5
未参加演讲社团	2	30

(1)从该班随机选 1 名同学，求该同学至少参加上述一个社团的概率；

(2)在既参加书法社团又参加演讲社团的 8 名同学中，有 5 名男同学 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5,3 名女同学 B_1，B_2，B_3.现从这 5 名男同学和 3 名女同学中各随机选 1 人，求 A_1 被选中且 B_1 未被选中的概率．

解析：(1)由调查数据可知，既未参加书法社团又未参加演讲社团的有 30 人，

故至少参加上述一个社团的共有 45－30＝15(人)，

所以从该班随机选 1 名同学，该同学至少参加上述一个社团的概率为 $P=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}$.

(2)从这 5 名男同学和 3 名女同学中各随机选 1 人，其一切可能的结果组成的基本事件有：

$\{A_1，B_1\}$，$\{A_1，B_2\}$，$\{A_1，B_3\}$，$\{A_2，B_1\}$，$\{A_2，B_2\}$，$\{A_2，B_3\}$，$\{A_3，B_1\}$，$\{A_3，B_2\}$，$\{A_3，B_3\}$，$\{A_4，B_1\}$，$\{A_4，B_2\}$，$\{A_4，B_3\}$，$\{A_5，B_1\}$，$\{A_5，B_2\}$，$\{A_5，B_3\}$，共 15 个．

根据题意，这些基本事件的出现是等可能的．

事件“A_1 被选中且 B_1 未被选中”所包含的基本事件有：$\{A_1，B_2\}$，$\{A_1，B_3\}$，共 2 个．

因此 A_1 被选中且 B_1 未被选中的概率为 $P=\frac{2}{15}$.

变式 1 一个袋中装有 5 个形状大小完全相同的球，其中有 2 个红球，3 个白球．

(1)从袋中随机取两个球，求取出的两个球颜色不同的概率；

(2)从袋中随机取一个球，将球放回袋中，然后再从袋中随机取一个球，求两次取出的球中至少有一个红球的概率．

解析：(1)2 个红球记为 a_1，a_2,3 个白球记为 b_1，b_2，b_3，从袋中随机取两个球，其一切可能的结果组成的基本事件有：

$(a_1，a_2)$，$(a_1，b_1)$，$(a_1，b_2)$，$(a_1，b_3)$，$(a_2，b_1)$，$(a_2，b_2)$，$(a_2，b_3)$，$(b_1，b_2)$，$(b_1，b_3)$，$(b_2，b_3)$，共 10 个．

记事件 A＝“取出的两个球颜色不同”，A 中的基本事件有：$(a_1，b_1)$，$(a_1，b_2)$，$(a_1，b_3)$，$(a_2，b_1)$，$(a_2，b_2)$，$(a_2，b_3)$，共 6 个．

所以 $P(A)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$，即取出的两个球颜色不同的概率为$\frac{3}{5}$.

(2)从袋中随机取一个球，将球放回袋中，然后再从袋中随机取一个球，其一切可能的结果组成的基本事件有：

$(a_1，a_1)$，$(a_1，a_2)$，$(a_1，b_1)$，$(a_1，b_2)$，$(a_1，b_3)$，$(a_2，a_1)$，$(a_2，a_2)$，$(a_2，b_1)$，$(a_2，b_2)$，$(a_2，b_3)$，$(b_1，a_1)$，$(b_1，a_2)$，$(b_1，b_1)$，$(b_1，b_2)$，$(b_1，b_3)$，$(b_2，a_1)$，$(b_2，a_2)$，$(b_2，b_1)$，$(b_2，b_2)$，$(b_2，b_3)$，$(b_3，a_1)$，$(b_3，a_2)$，$(b_3，b_1)$，$(b_3，b_2)$，$(b_3，b_3)$，共 25 个．

设事件 B＝“两次取出的球中至少有一个红球”，B 中的基本事件有：$(a_1，a_1)$，$(a_1，a_2)$，$(a_1，b_1)$，$(a_1，b_2)$，$(a_1，b_3)$，$(a_2，a_1)$，$(a_2，a_2)$，$(a_2，b_1)$，$(a_2，b_2)$，$(a_2，b_3)$，$(b_1，a_1)$，$(b_1，a_2)$，$(b_2，a_1)$，$(b_2，a_2)$，$(b_3，a_1)$，$(b_3，a_2)$，共 16 个．

所以 $P(B)=\frac{16}{25}$，即两次取出的球中至少有一个红球的概率为$\frac{16}{25}$.

变式 2 一块各面均涂有油漆的正方体被锯成 1 000 个大小相同的小正方体，若将这些小正方体均匀地搅混在一起，则任意取出一个正方体其三面涂有油漆的概率是(　　)

A.$\frac{1}{12}$　　B.$\frac{1}{10}$　　C.$\frac{3}{25}$　　D.$\frac{1}{125}$

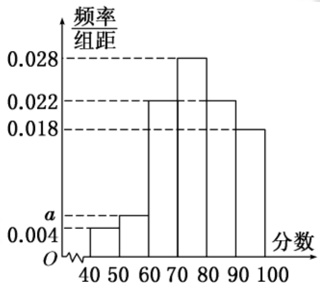
解析：选 D　小正方体三面涂有油漆的有 8 种情况，故所求概率为$\frac{8}{1\ 000}=\frac{1}{125}$.

变式 3 从 1,2,3,4 这四个数字中依次取(不放回)两个数 a，b，使得 $a^2\geq 4b$ 的概率是________．

解析：基本事件为(1,2)，(1,3)，(1,4)，(2,1)，(2,3)，(2,4)，…，(4,3)，共 12 个，符合条件的有(2,1)，(3,1)，(3,2)，(4,1)，(4,2)，(4,3)，共 6 个，因此使得 $a^2\geq 4b$ 的概率是$\frac{1}{2}$.

古典概型与统计知识综合应用

例题 (2015·安徽高考)某企业为了解下属某部门对本企业职工的服务情况，随机访问 50 名职工．根据这 50 名职工对该部门的评分，绘制频率分布直方图(如图所示)，其中样本数据分组区间为：[40,50)，[50,60)，…，[80,90)，[90,100]．



(1)求频率分布直方图中 a 的值；

(2)估计该企业的职工对该部门评分不低于 80 的概率；

(3)从评分在[40,60)的受访职工中，随机抽取 2 人，求此 2 人的评分都在[40,50)的概率．

解析：(1)因为$(0.004+a+0.018+0.022\times 2+0.028)\times 10=1$，所以 $a=0.006$.

(2)由所给频率分布直方图知，50 名受访职工评分不低于 80 的频率为$(0.022+0.018)\times 10=0.4$，

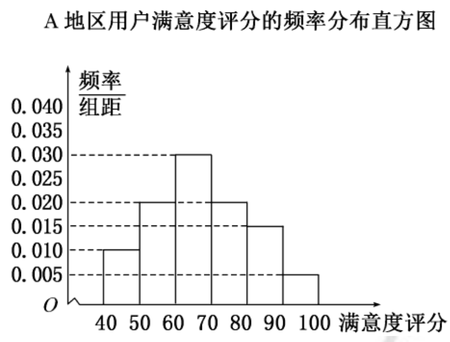
所以该企业职工对该部门评分不低于 80 的概率的估计值为 0.4.

(3)受访职工中评分在[50,60)的有：$50\times0.006\times10=3$(人)，记为 A_1，A_2，A_3；

受访职工中评分在[40,50)的有：$50\times0.004\times10=2$(人)，记为 B_1，B_2.

从这 5 名受访职工中随机抽取 2 人，所有可能的结果共有 10 种，它们是$\{A_1，A_2\}$，$\{A_1，A_3\}$，$\{A_1，B_1\}$，$\{A_1，B_2\}$，$\{A_2，A_3\}$，$\{A_2，B_1\}$，$\{A_2，B_2\}$，$\{A_3，B_1\}$，$\{A_3，B_2\}$，$\{B_1，B_2\}$．又因为所抽取 2 人的评分都在[40,50)的结果有 1 种，即$\{B_1，B_2\}$，故所求的概率为$\frac{1}{10}$.

变式 1　(2015·新课标全国卷Ⅱ)某公司为了解用户对其产品的满意度，从 A，B 两地区分别随机调查了 40 个用户，根据用户对产品的满意度评分，得到 A 地区用户满意度评分的频率分布直方图和 B 地区用户满意度评分的频数分布表．



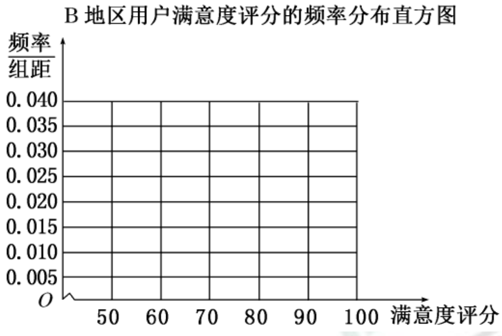
图①

B 地区用户满意度评分的频数分布表

满意度评分分组	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
频数	2	8	14	10	6

(1)在图②中作出 B 地区用户满意度评分的频率分布直方图，并通过直方图比较两地区满意度评

分的平均值及分散程度(不要求计算出具体值，给出结论即可)；



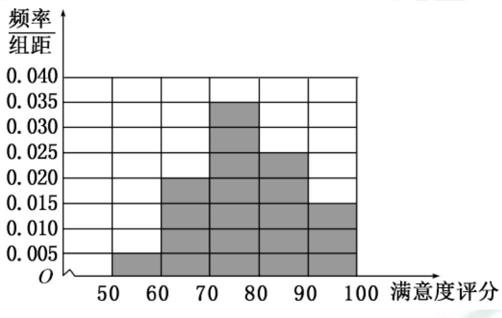
图②

(2)根据用户满意度评分，将用户的满意度分为三个等级：

满意度评分	低于70分	70分到89分	不低于90分
满意度等级	不满意	满意	非常满意

估计哪个地区用户的满意度等级为不满意的概率大？说明理由．

解析：(1)如图所示．



通过两地区用户满意度评分的频率分布直方图可以看出，B 地区用户满意度评分的平均值高于 A 地区用户满意度评分的平均值；B 地区用户满意度评分比较集中，而 A 地区用户满意度评分比较分散．

(2)A 地区用户的满意度等级为不满意的概率大．

记 C_A 表示事件：“A 地区用户的满意度等级为不满意”；C_B 表示事件：“B 地区用户的满意度

等级为不满意”．由直方图得 $P(C_A)$的估计值为$(0.01+0.02+0.03)\times 10=0.6$，$P(C_B)$的估计值为$(0.005+0.02)\times 10=0.25$.

所以 A 地区用户的满意度等级为不满意的概率大．

线型几何概型

例题 在区间$[-3,3]$上随机取一个数x，使得$|x+1|-|x-2|\ge 1$成立的概率为________.

解析：设 $f(x)=\begin{cases}-3,-3\le x<-1\\2x-1,-1\le x\le 2\\3,2<x\le 3\end{cases}$，故 $2x-1\ge 1$ 得 $1\le x\le 2$，所以 $f(x)\ge 1$ 的 x 的取值范围是 $1\le x\le 3$，故 $P=\dfrac{3-1}{3-(-3)}=\dfrac{1}{3}$

变式 1 已知函数 $f(x)=\log_2 x, x\in[\frac{1}{2},2]$ 在区间$[\frac{1}{2},2]$上任取一点x_0，使 $f(x_0)\ge 0$ 的概率为（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{3}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. $\frac{3}{4}$

答案：C

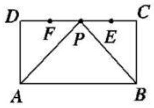
解析：由题知$\log_2 x_0\ge 0$解得$1\le x_0\le 2$，故 $P=\dfrac{2-1}{2-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}$

变式 2 已知事件“在矩形 $ABCD$ 的边 CD 上随机取一点 P ，使 ΔABP 的最大边是 AB”发生的概率是 $\frac{1}{2}$，则 $\dfrac{AD}{AB}=$（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. $\frac{1}{4}$　　C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　D. $\frac{\sqrt{7}}{4}$

答案：D

解析：由题意知 $AB>AD$，画出示意图，可知点 P 在线段 EF 中，其中，$AE=BF=AB$，因为 ΔAPB 中最大变为 AB 的概率为 $\frac{1}{2}$，故有几何概型的定义可知 $P=\dfrac{|EF|}{|AB|}=\dfrac{1}{2}$，令 $AB=a, AD=b$，则$|EF|=2\sqrt{a^2-b^2}-a$，所以 $P=\dfrac{2\sqrt{a^2-b^2}-a}{a}=\dfrac{1}{2}$，所以 $\dfrac{b}{a}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$



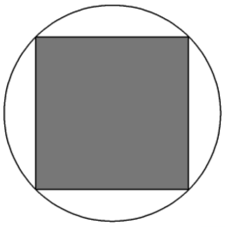
变式 3 公司的班车在 7：00，8：00，8：30 发车，小明在 7：50 到 8：30 之间到达发车站乘坐班车，且到达发车站的时刻是随机的，则他等车时间不超过 10 分钟的概率是__________.

答案：$\frac{1}{2}$

解析：设小明到达时间为 y，当 y 在 7：50 至 8：00，或 8：20 至 8：30 时，小明等车时间不超过 10 分钟，故 $P=\frac{20}{40}=\frac{1}{2}$

面积型几何概型

例题 如图所示，向圆内投镖，如果每次都投入圆内，那么投中正方形区域的概率为________ .

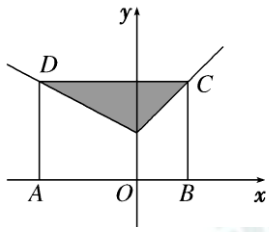


答案：$\frac{2}{\pi}$

解析：此试验属几何概型，设圆的半径为 1，则圆的面积为 π，正方形的面积为 2，所以投中正方形区域的概率为$\frac{2}{\pi}$.

变式 1 (2015·福建高考)如图，矩形 $ABCD$ 中，点 A 在 x 轴上，点 B 的坐标为(1,0)，且点 C 与点 D 在函数 $f(x)=\begin{cases} x+1，x\geq 0，\\ -\frac{1}{2}x+1，x<0 \end{cases}$ 的图象上. 若在矩形 $ABCD$ 内随机取一点，则此点取自阴影部

分的概率等于(　　)

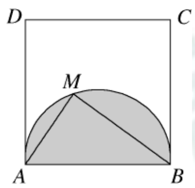


A.$\frac{1}{6}$　　B.$\frac{1}{4}$　　C.$\frac{3}{8}$　　D.$\frac{1}{2}$

答案：B.

变式 2　(2016·广州调研)在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 内部任取一点 M，则满足$\angle AMB>90°$的概率为________．

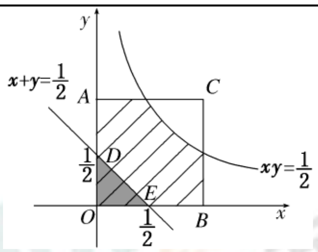
答案：如图，



如果点 M 位于以 AB 为直径的半圆内部，则$\angle AMB>90°$，否则，M 点位于半圆上及空白部分，则$\angle AMB\leq 90°$，所以$\angle AMB>90°$的概率 $P=\dfrac{\frac{1}{2}\times\pi\times 1^2}{2^2}=\dfrac{\pi}{8}$.

变式 3　在区间[0,1]上随机取两个数 x，y，记 p_1 为事件“$x+y\leq\frac{1}{2}$”的概率，p_2 为事件“$xy\leq\frac{1}{2}$”的概率，则(　　)

A．$p_1<p_2<\frac{1}{2}$　　B．$p_2<\frac{1}{2}<p_1$　　C.$\frac{1}{2}<p_2<p_1$　　D．$p_1<\frac{1}{2}<p_2$

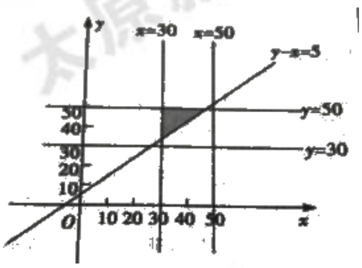


答案：D.

例题 某校早上$8:00$开始上课，假设该学校学生小张与小王在早上$7:30-7:50$之间到校，且每人在该时间段的任何时刻到校都是等可能的，则小张比小王至少早 5 分钟到校的概率为____（用数字作答）.

答案：$\frac{9}{32}$

解析：设小张与小王的到校时间分别为$7:00$以后的第x分钟，第y分钟，根据题意可画出图形，如图所示，则总事件所占的面积为$(50-30)^2=400$，小张比小王至少早 5 分钟到校表示的事件$A=\left\{(x,y)\,|\left\{\begin{matrix}y-x\geq 5\\30\leq x\leq 50\\30\leq y\leq 50\end{matrix}\right.\right\}$如图中阴影部分所示，阴影部分所占的面积为$\frac{1}{2}\times 15\times 15=\frac{225}{2}$，所以小张比小王至少早 5 分钟到校的概率为$P(A)=\frac{\frac{225}{2}}{400}=\frac{9}{32}$

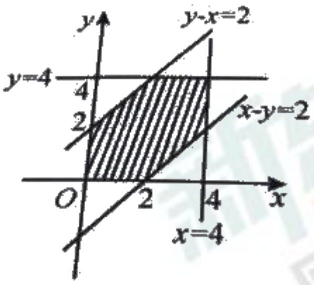


变式 1 节日前夕，小李在家门前的树上挂了两串彩灯，这两串彩灯的第一次闪亮相互独立，切都在通电后的 4 秒内任一时刻等可能发生，然后每串彩灯以 4 秒为间隔闪亮，那么这两串彩灯同时通电后，他们第一次闪亮的时间相差不超过 2 秒的概率是（　　）

A.$\frac{1}{4}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.$\frac{3}{4}$　　D.$\frac{7}{8}$

答案：C

解析：设两串彩灯第一次闪亮的时刻分别为 x,y，则试验的全部结果构成的平面区域为 $\Omega=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 4,0\le y\le 4\}$. 记事件 A 为“他们第一次闪亮的时刻相差不超过 2 秒”，即 $A=\left\{(x,y)\,|\left\{\begin{array}{l}0\le x\le 4\\0\le y\le 4\\|x-y|\le 2\end{array}\right.\right\}$，表示的区域为图中阴影部分，得 $P(A)=\dfrac{4\times 4-2\times(\frac{1}{2}\times 2\times 2)}{4\times 4}=\dfrac{3}{4}$



变式 2 在区间 $(0,1)$ 内随机地取出两个数，则两数之和小于 $\frac{6}{5}$ 的概率是____________.

答案：$\frac{17}{25}$

解析：设随机取出的两个数分别为 x,y，依题意有 $\left\{\begin{array}{l}0<x<1\\0<y<1\\x+y<\frac{6}{5}\end{array}\right.$，由几何概型可知，所求概率为

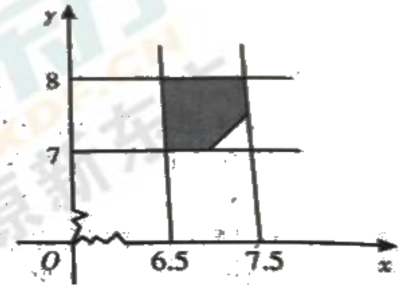
$$P=\frac{1^2-\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{5})\times(1-\frac{1}{5})}{1^2}=\frac{17}{25}$$

变式 3 张先生订了一份《南昌晚报》，送报人在早上 6：30-7：30 之间把报纸送到他家，张先生离开家去上班的时间在早上 7：00-8：00 之间，则张先生在离开家之前能拿到报纸的概率是_____.

答案：$\frac{7}{8}$

解析：建立如图所示的平面直角坐标系，横坐标 x 表示报纸送到的时间，纵坐标 y 表示张先生李家的

时间，因为随机试验落在方形区域内任何一点是等可能的，所以符合几何概型的特性，就表示张先生在离开家之前就能拿到报纸，即所求事件 A 发生，所以 $P(A)=\dfrac{1\times1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{1\times1}=\dfrac{7}{8}$



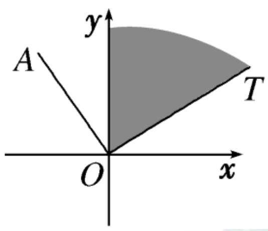
体积型与角度型几何概型

例题 有一杯 1 L 的水，其中含有 1 个细菌，用一个小杯从这杯水中取出 0.1 L，则小杯水中含有这个细菌的概率为________.

答案：0.1

解析：小杯水中含有这个细菌的概率为 $P=\dfrac{0.1}{1}=0.1$.

例题 如图，在直角坐标系内，射线 OT 落在 30°角的终边上，任作一条射线 OA，则射线 OA 落在$\angle yOT$内的概率为________.



答案：$\dfrac{1}{6}$

解析：如图，射线 OA 在坐标系内是等可能分布的，所以 OA 落在$\angle yOT$内的概率为$\dfrac{60^\circ}{360^\circ}=\dfrac{1}{6}$