太原市 2016-2017 学年第一学期高二年级期末考试

数学试卷（文科）

（考试时间：上午 8:00-9:30）

一　填空题（本大题共 12 小题，每小题 3 分，共 36 分）

1. 命题“若 $x>2$，则 $x>1$”的否命题为(　　)

A 若 $x<2$，则 $x<1$

B 若 $x\le 2$，则 $x\le 1$

C 若 $x\le 1$，则 $x\le 2$

D 若 $x<1$，则 $x<2$

答案：B
考点：命题的四种形式
解析：否命题要求命题的条件和结论都要否定，故选 B

2. 抛物线 $y^2=4x$ 的准线方程为（　　）

A $x=1$　　B $x=-1$　　C $y=-1$　　D $y=1$

答案：　B
考点：抛物线的准线
解析：由抛物线方程可知焦点在 x 轴正半轴，根据抛物线的准线求法可得准线方程为 $x=-1$

3. “$a>b$”是“$a^2>b^2$”的（　　）

A 充分不必要条件

B 必要不充分条件

C 充要条件条件

D 既不充分也不必要条件

答案：D
考点：充分必要条件
解析：当 $a>b$ 时，$a^2>b^2$ 不一定成立；反之，当 $a^2>b^2$ 时，$a>b$ 也不一定成立，故为既不充分也不必要条件

4. 已知椭圆 C 经过点 $(1,0),(0,2)$，则椭圆 C 的标准方程为（　　）

A $x^2+\frac{y^2}{2}=1$　　B $\frac{x^2}{2}+y^2=1$　　C $x^2+\frac{y^2}{4}=1$　　D $\frac{x^2}{4}+y^2=1$

答案：C
考点：椭圆的标准方程
解析：由题意可知椭圆方程中的 $a=1$，$b=2$，故椭圆方程为 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$

5. 已知函数 $f(x)=x\cdot\cos x$，则 $f'(\frac{\pi}{2})$ 的值为（　　）

A $-\frac{\pi}{2}$　　B $\frac{\pi}{2}$　　C 1　　D -1

答案：A
考点：求导运算
解析：由已知得 $f'(x)=\cos x+x\cdot(-\sin x)=\cos x-x\cdot\sin x$， 故 $f'(\frac{\pi}{2})=\cos\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{2}$

6. 焦点在 x 轴上，且渐近线方程为 $y=\pm 2x$ 的双曲线方程为（　　）

A $x^2-\frac{y^2}{4}=1$　　B $\frac{x^2}{4}-y^2=1$　　C $\frac{y^2}{4}-x^2=1$　　D $y^2-\frac{x^2}{4}=1$

答案：A
考点：双曲线的标准方程
解析：已知焦点在 x 轴上时，可以排除 C、D 选项 又渐近线方程为 $y=\pm\frac{b}{a}x$，即 $\frac{b}{a}=2$ 故双曲线方程为 $x^2-\frac{y^2}{4}=1$，选 A

7. 已知函数 $y=f(x)$ 的图象与直线 $y=-x+8$ 相切于点 $(5,f(5))$，则 $f(5)+f'(5)$ 等于

A 1　　B 2　　C 0　　D $\frac{1}{2}$

答案：B
考点：导数的几何意义
解析：由已知得　$f(5)=-5+8=3$，　$f'(5)=-1$， 故　$f(5)+f'(5)=2$，选 B

8. 已知椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{b^2}=1(0<b<2)$ 的左右焦点分别为 F_1,F_2，直线 l 过 F_2 且与椭圆相交于不同的两点 A,B，则 ΔABF_1 的周长

A 是定值 4
B 是定值 8
C 不是定值，与直线 l 的倾斜角大小有关
D 不是定值，与 b 的取值大小有关

答案：B

考点：椭圆的焦点三角形；椭圆的第一定义
解析：由椭圆方程可知：$a=2$，故根据椭圆第一定义可得 ΔABF_1 的周长为 $4a=8$

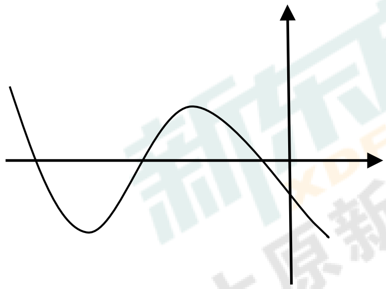
9. 已知函数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的图像如图所示，则下列结论成立的是（　）

A　$a>0,c<0,d>0$

B　$a>0,c>0,d<0$

C　$a<0,c<0,d<0$

D　$a<0,c>0,d<0$



答案：C
考点：函数的图像
解析：函数图像与 y 轴交点在负半轴，所以 $d<0$ 函数图像为先减再增再减，其导函数应为开口朝下的二次函数，所以 $a<0$ 且在与 y 轴交点处的斜率小于 0，对应的导函数的 $c<0$

10. 对于双曲线 $C_1:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 和 $C_2:\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$，给出下列四个结论；（1）离心率相等；（2）渐近线相同；（3）没有公共点；（4）焦距相等.其中正确的结论是（　）

A　(1)(2)(4)　　　B　(1)(3)(4)　　　C　(2)(3)(4)　　　D　(2)(4)

答案：C
考点：圆锥曲线
解析：（1）由离心率公式可得 $e_1=\dfrac{3}{5}$，$e_2=\dfrac{4}{5}$，故（1）错误 （2）$C_1:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{16}=1$ 渐近线方程为 $y=\pm\dfrac{3}{4}x$； $C_2:\dfrac{y^2}{16}-\dfrac{x^2}{9}=1$ 其渐近线方程也为 $y=\pm\dfrac{3}{4}x$ 所以它们的渐近线相同　故（2）正确 （3）它们为共轭双曲线，所以它们没有公共点　故（3）正确 （4）焦点分别为 $(\pm5,0)$、$(0,\pm5)$，所以它们的焦距相同　故（4）正确 综上　结论正确的是（2）（3）（4）选 C

11. 若函数 $y=e^x+ax$ 有大于零的极值点，则实数 a 的取值范围是（　　）

A $a>-1$　　B $a>-\frac{1}{e}$　　C $a<-1$　　D $a<-\frac{1}{e}$

答案：C
考点：导函数的极值点
解析：令 $y'=e^x+a=0$，解得 $x=\ln(-a)$ 因为 $y=e^x+ax$ 有大于零的极值点，所以 $x=\ln(-a)>0$ 则实数 a 的取值范围是 $a<-1$　故选 C

12 已知 p："$\forall x\in[1,2], x^2-a\ge 0$"，$q$："$\exists x\in R$，使得 $x^2+2ax+2-a=0$"，那么命题"$p\wedge q$"为真命题的充要条件为（　　）

A $a\le -2$ 或 $a=1$
B $a\le -2$ 或 $1\le a\le 2$
C $a\ge 1$
D $-2\le a\le 1$

答案：A
考点：复合命题真假判断；恒成立与存在性问题
解析：p：$\forall x\in[1,2]$，$x^2-a\ge 0$ 恒成立， 等价于 $a\le x^2$ 在 $x\in[1,2]$ 恒成立，即 $a\le (x^2)_{\min}=1$ 故 当 p 为真命题，$a\le 1$ $\neg q$："$\forall x\in R$，$x^2+2ax+2-a\ne 0$" 若 $\neg q$ 成立，则 $\Delta=(2a)^2-4(2-a)=4a^2+4a-8<0$ 解得 $-2<a<1$ 故 当 q 为真命题，$a\le -2$ 或 $a\ge 1$ 综上：由 $p\wedge q$"为真命题可得：$a\le -2$ 或 $a=1$，选 A

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 4 分，共 16 分）

13.命题"若 $|x|\ne 3$，则 $x\ne 3$"的真假为______（填"真"或"假"）.

答案：真
考点：命题真假的判断

解析：可由逆否命题的真假得到原命题的真假，该命题的逆否命题为：若 $x=3$，则 $|x|=3$，其逆否命题是真命题，则原命题也是真命题.

14.双曲线 $x^2-y^2=1$ 的离心率为________.

答案：$\sqrt{2}$

考点：双曲线的离心率

解析：该双曲线中，$a=1$，$c=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$，故离心率 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{2}$

15.已知 $f(x)=x\ln x$，若 $f'(x_0)=2$，则 $x_0=$______.

答案：e

考点：导函数的求值问题

解析：导函数 $f'(x)=\ln x+1$，则 $f'(x_0)=\ln x_0+1=2$，　$\therefore x_0=e$

16.椭圆 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{2}=1$ 的焦点为 F_1，F_2，点 P 在椭圆上，若 $|PF_1|=4$，则 $\angle F_1PF_2=$_______.

答案：$\frac{2}{3}\pi$（也可填 120°）

考点：椭圆的焦半径，焦点三角形

解析：可设点 P 的坐标为 (x_0, y_0) 椭圆的焦半径 $|PF_1|=a+ex_0=3+\frac{\sqrt{7}}{3}x_0=4$，　$\therefore x_0=\frac{3}{\sqrt{7}}$

点 P 在椭圆上，则 $|y_0|=\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$，由焦点三角形的面积公式可得：$S=c|y_0|=b^2\tan\frac{\angle F_1PF_2}{2}$，

代入，可得 $\angle F_1PF_2=\frac{2}{3}\pi$.

三、解答题（本大题共 5 小题，共 48 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤）

17.（本小题满分 8 分）

已知命题：$p:\forall x\in R, |x|+x\ge 0$；$q$：关于 x 的方程 $x^2+mx+1=0$ 有实数根.

(1) 写出命题 p 的否定，并判断命题 p 的否定的真假；

(2) 若命题“$p\wedge q$”为假命题，求实数 m 的取值范围.

考点：命题的否定，命题真假判断以及复合命题真假判断

解析：(1) 命题 p 的否定形式 $\neg p$：$\exists x_0\in R, |x_0|+x_0<0$.

对于命题 p，$\forall x\in R$，恒有 $|x|+x\geq 0$，故 p 为真，则 $\neg p$ 为假.

(2)由于 p 为真，$p\wedge q$ 为假，则 q 为假，即关于 x 的方程 $x^2+mx+1=0$ 没有实数根，

所以 $\Delta=b^2-4ac=m^2-4<0$，解得 $-2<m<2$.

故实数 m 的取值范围为 $-2<m<2$.

18.（本小题满分 10 分）

已知函数 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2+ax$ 在 $x=-1$ 时取极值.

（1）求实数 a 的值;

（2）求函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-2,0)$ 上的最大值和最小值.

考点：导数的单调性与最值

解析：（1）由已知得 $f'(x)=x^2-2x+a$

又函数在 $x=-1$ 处取得极值，故 $f'(-1)=0$

即 $1+2+a=0$，解得 $a=-3$

（2）由（1）可知 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2-3x$

故 $f'(x)=x^2-2x-3$

令 $f'(x)=0$，解得 $x=-1$ 或 $x=3$

当 $x\in[-2,-1]$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增

当 $x\in[-1,0)$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减

又 $f(-2)=-\frac{2}{3}$，$f(-1)=\frac{5}{3}$

故 $f(x)$ 在 $x=-1$ 取得最大值，$f(-1)=\frac{5}{3}$

$f(x)$ 在 $x=-2$ 取得最小值，$f(-2)=-\frac{2}{3}$

19.（本小题满分 10 分）

已知抛物线 $C:y^2=2px(p>0)$ 上一点 $M(1,\ y)$ 到焦点 F 的距离为 $\frac{17}{16}$.

（1）求 p 的值；

（2）若圆 $(x-a)^2+y^2=1$ 与抛物线 C 有公共点，结合图形求实数 a 的取值范围.

考点：抛物线的方程；抛物线与圆的位置关系

解析：（1）由抛物线上一点到焦点的距离与到准线的距离相同可得：

$\frac{17}{16}=1+\frac{p}{2}$，解得 $p=\frac{1}{8}$

（2）由（1）得抛物线方程为 $C:y^2=\frac{x}{4}$，

由圆的方程可知圆心坐标为 $(a,0)$，

由图像易得当圆心在 x 负半轴时，

若圆与抛物线有交点，则 $a\geq -1$；

当圆心在 x 正半轴时，

联立圆与抛物线方程可得：$(x-a)^2+\frac{x}{4}-1=0$ ，

若圆与抛物线有交点，则 $\Delta=(\frac{1-8a}{4})^2-4(a^2-1)=\frac{65}{16}-a\geq 0$ ，

解得 $a\leq\frac{65}{16}$.

综上：实数 a 的取值范围为 $\left[-1,\frac{65}{16}\right]$.

20.（本小题满分 10 分）

（A）已知函数 $f(x)=x\ln x$.

（1）求函数 $y=f(x)$ 的单调区间；

（2）若函数 $g(x)=\ln x-\frac{a}{x}$ 有两个零点，求实数 a 的取值范围.

考点：利用导函数求函数的单调性，函数的零点，利用导函数求极值点

解析：（1）解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$

求导可得 $f'(x)=\ln x+1(x>0)$，

令 $f'(x)<0$，则 $0<x<\frac{1}{e}$；令 $f'(x)>0$，则 $x>\frac{1}{e}$

则函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(\frac{1}{e},+\infty)$，单调减区间为 $(0,\frac{1}{e})$.

（2）解：求导可得 $g'(x)=\frac{1}{x}+\frac{a}{x^2}=\frac{x+a}{x^2}$，$x>0$，

当 $a\geq 0$ 时，$g'(x)>0$ 恒成立，函数 $g(x)$ 为单调增函数，

不可能有两个零点，舍去；

当 $a<0$ 时，令 $g'(x)<0$，则 $0<x<-a$；令 $f'(x)>0$，则 $x>-a$

则函数 $g(x)$ 的单调减区间为 $(0,\ -a)$，单调增区间为 $(-a,+\infty)$.

则函数 $g(x)$ 有两个零点等价于在 $(0,+\infty)$ 上的最小值为 $g(-a)<0$，

解得：$-\frac{1}{e}<a<0$

（B）已知函数 $f(x)=x\ln x$.

（1）求函数 $y=f(x)$ 的单调区间；

（2）证明：$x>0$ 时，$x\ln x>\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}$.

考点：利用导函数求函数的单调性，不等式恒成立问题转化为最值问题

解析：（1）解：函数 $f(x)$ 的定义域为 $\{x|x>0\}$

求导可得 $f'(x)=\ln x+1(x>0)$，

令 $f'(x)<0$，则 $0<x<\frac{1}{e}$；令 $f'(x)>0$，则 $x>\frac{1}{e}$

则函数 $f(x)$ 的单调增区间为 $(\frac{1}{e},+\infty)$，单调减区间为 $(0,\ \frac{1}{e})$.

（2）证明：由（1）得：$f(x)=x\ln x$ 的最小值是 $-\frac{1}{e}$，当且仅当 $x=\frac{1}{e}$ 时取得；

令 $g(x)=\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}$，$x>0$，则 $g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$，$x>0$

当 $x>1$ 时，$g'(x)<0$；当 $0<x<1$ 时，$g'(x)>0$

故 $g(x)=\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}$ 的最大值是 $g(1)=-\frac{1}{e}$，当且仅当 $x=1$ 时取得

因此，原不等式得证.

21.（本小题满分 10 分）

(A). 已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$ 的离心率 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，右焦点为 F，椭圆与 y 轴的正半轴交于点 B，且 $|BF|=\sqrt{2}$.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）若斜率为 1 的直线经过点 $(1,0)$，与椭圆 E 相交于两个不同两点 M,N. 在椭圆 E 上是

否存在点 P，使得 ΔPMN 的面积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$，请说明理由.

考点：求椭圆方程；椭圆中的存在性问题

解析：

（1）$|BF|=a=\sqrt{2}$，$e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\therefore c=1$

$\therefore b^2=a^2-c^2=1$

E 的方程为 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$

（2）设直线 MN 方程为 $y=x-1$

与椭圆方程联立得 $M(0,-1), N(\frac{4}{3},\frac{1}{3})$，$|MN|=\frac{4\sqrt{2}}{3}$

又 $S=\frac{1}{2}h|MN|=\frac{2\sqrt{2}}{3}, \therefore h=1$

设直线 $y=x+m$ 与直线 MN 距离为 1

$\therefore \frac{|m+1|}{\sqrt{2}}=1, m=1\pm\sqrt{2}$

又直线 $y=x+n$ 与椭圆有交点，则代入椭圆方程，消元

$\frac{3}{2}x^2+2nx+c^2-1=0$，$\Delta=4n^2-6\left(n^2-1\right)\geq 0, \therefore -\sqrt{3}\leq n\leq\sqrt{3}$

m 在这个范围内，因此存在这样的点 P.

(B)已知椭圆 $E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的离心率为 $e=\frac{\sqrt{2}}{2}$，过焦点且垂直于 x 轴的直线被椭圆 E 截得的线段长为 $\sqrt{2}$.

（1）求椭圆 E 的方程；

（2）斜率为 k 的直线 l 经过原点 O，与椭圆 E 相交于不同两点 M,N，判断并说明在椭圆 E 上是否存在点 P，使得 ΔPMN 的面积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

考点：求椭圆方程；椭圆中的存在性问题

解析：

（1）根据题意可知：离心率为 $\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，通径为 $2\cdot\frac{b^2}{a}=\sqrt{2}$，可解得 $a=\sqrt{2},b=1,c=1$

故所求椭圆方程为：$\frac{x^2}{2}+y^2=1$

（2）存在点 P，使得□PMN 的面积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

联立 $\begin{cases} y=kx \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2-2=0$，可求出 $|MN|=2\sqrt{\frac{2(1+k^2)}{1+2k^2}}$

接下来我们计算椭圆上一点到直线 l 的距离的最大值，也就是 ΔPMN 中以 MN 为底时高的最大值

设直线 $y=kx+t$，当此直线与椭圆相切时，切点到直线 l 的距离最大

联立 $\begin{cases} y=kx+t \\ \frac{x^2}{2}+y^2=1 \end{cases}$，得 $(1+2k^2)x^2+4ktx+2t^2-2=0$

根据 $\Delta=16k^2t^2-4(2t^2-2)(1+2k^2)=0$ 解得 $t^2=1+2k^2$

此时切点到直线 l 的距离为 $\sqrt{\frac{1+2k^2}{1+k^2}}$

那么 ΔPMN 面积的最大值就是 $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1+2k^2}{1+k^2}}\cdot 2\sqrt{\frac{2(1+k^2)}{1+2k^2}}=\sqrt{2}$

由于 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 小于最大面积 $\sqrt{2}$，所以必然存在点 P，使得 ΔPMN 的面积为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.