太原市 2016-2017 学年第一学期高三年级期末考试

数学试卷（理科）

（考试时间：上午 7:30-9:30）

一、选择题（本大题共 12 小题，每小题 5 分，共 60 分）

1.已知 $A=\{x\in N|x\le 1\}$，$B=\{x\in R|-1\le x\le 2\}$，则 $A\cap B=$（　）

A. $\{0,1\}$　　B. $\{-1,0,1\}$　　C. $[-1,1]$　　D. $\{1\}$

答案：A
考点：集合的运算
解析：$A\cap B=\{x\in N|-1\le x\le 1\}=\{0,1\}$，故 A 正确.

2.设复数 $z=1+2i$，则 $\dfrac{z^2}{|z^2|}=$

A. $\dfrac{3}{5}-\dfrac{4}{5}i$　　B. $-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$　　C. $1+\dfrac{4}{5}i$　　D. 1

答案：B
考点：复数的乘法运算，复数的模
解析：$z^2=(1+2i)^2=-3+4i$，$|z^2|=\sqrt{(-3)^2+(4)^2}=5$，$\dfrac{z^2}{|z^2|}=-\dfrac{3}{5}+\dfrac{4}{5}i$，B 正确.

3.给出下列命题：

①若数列 $\{a_n\}$ 是等差数列，S_n 为其前 n 项和，则 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ 是等差数列；

②若数列 $\{a_n\}$ 是等比数列，S_n 为其前 n 项和，则 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ 是等比数列；

③若数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均为等差数列，则数列 $\{a_n+b_n\}$ 为等差数列；

④若数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 均为等比数列，则数列 $\{a_nb_n\}$ 为等比数列.

其中真命题的个数为

A.1　　B. 2　　C.3　　D. 4

答案：C
考点：等差、等比数列
解析：①由 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，得： $S_{2n}-S_n=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}$，$S_{3n}-S_{2n}=a_{2n+1}+a_{2n+2}+\cdots+a_{3n}$， 则 S_n，$S_{2n}-S_n$，$S_{3n}-S_{2n}$ 是首项为 S_n，公差为 n^2d 的等差数列；②若数列为摆动数列 $\{-1,1,-1,1\cdots\}$ 时，S_n 可能为 0，不构成等比数列；③设 $a_n=a_1+(n-1)d_1$，$b_n=b_1+(n-1)d_2$，则 $a_n+b_n=(a_1+b_1)+(n-1)(d_1+d_2)$，故数列 $\{a_n+b_n\}$ 是首项为 a_1+b_1，公差为 d_1+d_2 的等差数列；④设 $a_n=a_1\cdot q_1^{\,n-1}$，$b_n=b_1\cdot q_2^{\,n-1}$，则 $a_nb_n=(a_1b_1)(q_1q_2)^{n-1}$，故数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 是首项为 a_1b_1，公比为 q_1q_2 的等比数列.故①③④正确，答案为 C.

4.设 α,β 为两个不同的平面，l 为直线，则下列结论正确的是（　　）

A.$l//\alpha,\alpha\perp\beta\Rightarrow l\perp\alpha$　　B.$l\perp\alpha,\alpha\perp\beta\Rightarrow l//\alpha$

C.$l//\alpha,\alpha//\beta\Rightarrow l//\beta$　　D.$l\perp\alpha,\alpha//\beta\Rightarrow l\perp\beta$

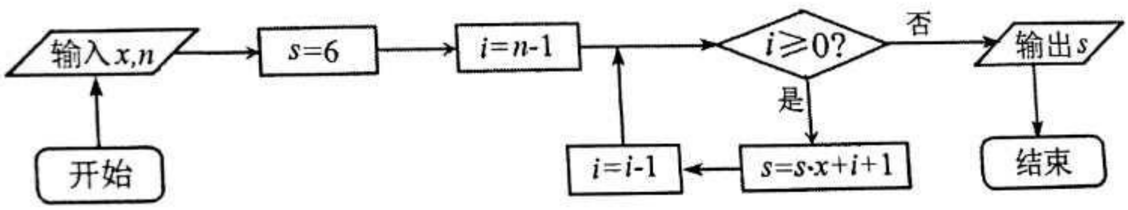
答案：D
考点：线面、面面垂直与平行
解析：A 选项中如果 l 刚好平行于 $\alpha\perp\beta$ 的交线时，此时有 $l//\alpha$，B、C 选项中直线都有可能落在 α 或 β 面上，所以排除，故选 D.

5.已知 $\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha=0$，则 $\tan 2\alpha=$（　　）

A.$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　B.$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　C.$\sqrt{3}$　　D$-\sqrt{3}$

答案：C
考点：同角三角关系及正切倍角公式的应用
解析：由已知得 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\sqrt{3}$，且 $\tan 2\alpha=\dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\sqrt{3}$，故选 C

6.执行如图所示的程序框图，输入 $x=-1, n=5$，则输出 $s=$（　　）



A. -2　　B. -3　　C. 4　　D. 3

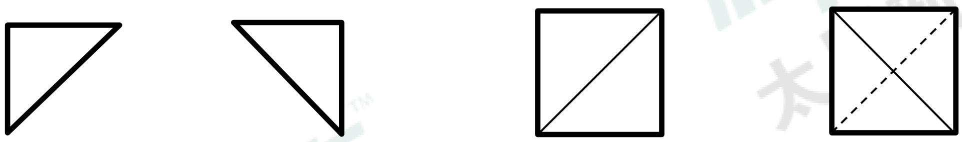
答案：B

考点：程序框图

解析：i=4 时，s=−1；i=3 时，s=5；i=2 时，s=−2；i=1 时，s=4；i=0 时，s=−3；退出循环，故答案选 B.

7.如图是一个棱锥的正视图和侧视图，则该棱锥的俯视图不可能是

正视图　　侧视图



A　　B　　C　　D

答案：C

考点：空间几何体三视图

解析：若为三棱锥，由其正视图和俯视图可知，其底面在下方为直角三角形，易知 A，B，

D 是可能的。若为四棱锥，其底面在下方且为正方形，C 对角线的位置错误，选 C.

8.将函数 $f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x$ 图像上点的纵坐标不变，横坐标变为原来的 2 倍，再沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，得到函数 $y=g(x)$ 的图像，则 $y=g(x)$ 的一个单调递增区间是

A．$[-\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}]$　　B. $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$　　C. $[-\frac{\pi}{12},\frac{4\pi}{3}]$　　D. $[-\frac{\pi}{4},0]$

答案：A
考点：三角恒等变换以及三角函数的图象与性质
解析：$f(x)=\sqrt{3}\sin x\cos x+\sin^2 x=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2x-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{2}=\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$ 纵坐标不变，横坐标变为原来的 2 倍，$\sin(2x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$ 变为 $\sin(x-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}$，沿 x 轴向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，变为 $\sin(x-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6})+\frac{1}{2}=\sin(x-\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}$.所以 $y=g(x)=\sin(x-\frac{\pi}{3})+\frac{1}{2}$. 令 $x-\frac{\pi}{3}\in[-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi]$，解得 $x\in[-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\frac{5\pi}{6}+2k\pi]$，取 $k=0$ 得答案 A.

9.在平行四边形 $ABCD$ 中，AC 与 BD 交于点 O，E 是线段 OD 的中点，AE 的延长线与 CD 相交于点 F，则 $\overrightarrow{AF}=$

A. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$　　B. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{4}\overrightarrow{BD}$　C. $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$　　D. $\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

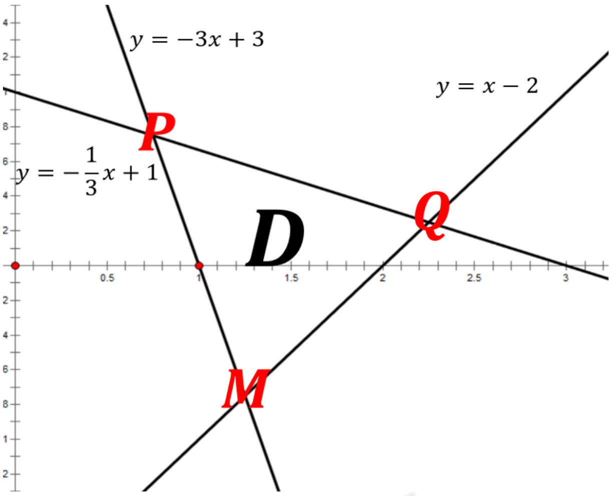
答案：D
考点：平面向量
解析：在平行四边形 $ABCD$ 中，所以 $\frac{DE}{EB}=\frac{DF}{AB}=\frac{1}{3}$，又因为 AB=CD 可得 $\frac{DF}{DC}=\frac{1}{3}$，所以 $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{DC}$；$\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$，所以 $\overrightarrow{DF}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}$； 又 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}-\frac{1}{2}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$； 所以 $\overrightarrow{AF}=AD+DF=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{6}\overrightarrow{BD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$.选 D.

10. 已知平面区域 $D=\left\{(x,y)\left|\begin{cases}3x+y\geq 3\\ x-y\leq 2\\ x+3y\leq 3\end{cases}\right.\right\}$, $z=3x-2y$, 若命题“$\exists(x_0,y_0)\in D,z>m$”为假命题, 则实数 m 的最小值（）.

A. $\frac{3}{4}$　　B. $\frac{7}{4}$　　C. $\frac{21}{4}$　　D. $\frac{25}{4}$

答案：D
考点：线性规划与命题综合

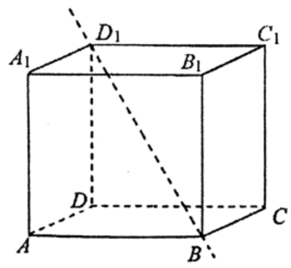
解析：



由题意可得，命题“$\forall(x_0,y_0)\in D,z\le m$”为真命题. 如图所示，作出平面区域 D，

由 $z=3x-2y$ 可得，当直线 $y=\frac{3}{2}x-\frac{z}{2}$ 过点 $Q\left(\frac{9}{4},\frac{1}{4}\right)$ 时，z 有最大值，则 m 的最小值为 $\frac{25}{4}$

11. 如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$绕其体对角线BD_1旋转θ之后与其自身重合，则θ的值可以是



A $\frac{5\pi}{6}$　　B $\frac{3\pi}{4}$　　C $\frac{2\pi}{3}$　　D $\frac{3\pi}{5}$

答案：C

考点：空间旋转体

解析：如图，正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，对角线BD_1垂直于平面AB_1C，且AB_1C为等边三角形，由此可知：正方体绕对角线至少 120°才能与原正方体重合.

12.已知 $f(x)=\begin{cases} e^x+ax^2,x>0 \\ \frac{1}{e^x}+ax^2,x<0 \end{cases}$，若函数 $f(x)$ 有四个零点，则实数 a 的取值范围为（）

A. $(-\infty,-e)$ B. $\left(-\infty,-\dfrac{e^2}{4}\right)$ C. $\left(-\infty,-\dfrac{e^3}{9}\right)$ D. $\left(-\infty,-\dfrac{e^4}{16}\right)$

答案：B
考点：分段函数；函数零点
解析：由于函数 $f(x)$ 是偶函数，可知要使 $f(x)$ 有四个零点，只需要 $e^x+ax^2=0$ 有两个正根，而 $e^x+ax^2=0$ 有两个正根等价于 $-\dfrac{e^x}{x^2}=a$ 有两个正根，可设 $g(x)=-\dfrac{e^x}{x^2}$ $g'(x)=-\dfrac{e^xx^2-2xe^x}{x^4}=-\dfrac{e^x\left(x^2-2x\right)}{x^4}$ 令 $g'(x)>0$，得 $x\in(2,+\infty)$，可知 $g(x)$ 在 $(2,+\infty)$ 上单调递减. 令 $g'(x)<0$，得 $x\in(0,2)$，可知 $g(x)$ 在 $(0,2)$ 上单调递增. 可知 $g(x)$ 在 $x=2$ 时取到最小值 $g(2)=-\dfrac{e^2}{4}$. 所以要使 $-\dfrac{e^x}{x^2}=a$ 有两个正根，也就是要 $y=-\dfrac{e^x}{x^2}$ 和 $y=a$ 有两个交点. 故 $x\in\left(-\infty,-\dfrac{e^2}{4}\right)$

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分）

13. 数据 0.7，1，0.8，0.9，1.1 的方差是________.

答案：0.02
考点：方差的计算
解析：这组数据的平均数为 0.9， $s^2=\dfrac{1}{5}[(0.7-0.9)^2+(1-0.9)^2+(0.8-0.9)^2+(0.9-0.9)^2+(1.1-0.9)^2]=0.02.$

14.七名同学站成一排照相，其中甲乙两人相邻，且丙丁两人不相邻的不同排法总数为________

答案：960
考点：排列组合

解析：因为甲乙两人相邻，将甲乙两人捆绑，看作一个人，有 A_2^2 种方法，先不考虑丙丁两个人，剩余五个人，甲乙两人看作一个人，只剩四个人，有 A_4^4 种方法，四个人会有五个空，将丙丁两人插入五个空中，有 A_5^2 种方法。因此共有 $A_5^2 \cdot A_2^2 \cdot A_4^4 = 960$ 种方法

15.已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n = 2a_n - 2^n + 1\left(n \in N^*\right)$，则其通项公式 $a_n =$________.

答案：$n \cdot 2^{n-1}$

考点：数列的转化与变形求通项公式

解析：①$n=1$ 时，$a_1 = 2a_1 - 2 + 1$，则 $a_1=1$；

②$n \geq 2$ 时，$S_{n-1} = 2a_{n-1} - 2^{n-1} + 1$，$S_n - S_{n-1} = 2a_n - 2^n + 1 - (2a_{n-1} - 2^{n-1} + 1)$，则可得

$a_n = 2a_{n-1} + 2^{n-1}$，即 $\frac{a_n}{2^n} = \frac{a_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{1}{2}$，$\frac{a_n}{2^n} = 1 + (n-2) \cdot \frac{1}{2}$，所以 $a_n = n \cdot 2^{n-1}$

由①②可得，通项公式 $a_n = n \cdot 2^{n-1}$

16.已知 a,b,c 分别是 $\triangle ABC$ 的内角 A,B,C 的对边，BC 边上的高为 $\frac{a}{2}$，则 $\frac{c}{b}$ 的最大值为_______.

答案：$\sqrt{5}$

考点：解三角形中的最值

解：当 BC 边上的高与 b 重合时取得最大值，此时 $Rt\triangle ABC, c^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$，可得答案.

三、解答题

17.(本小题满分 12 分)已知数列 $\{a_n\}$ 是首项为 1 的单调递增等比数列,且满足 $a_3, \frac{5}{3}a_4, a_5$ 成等差数列.

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n = \log_3\left(a_n a_{n+1}\right)\left(n \in N^*\right)$，求数列 $\{a_n \cdot b_n\}$ 的前 n 项和 S_n.

考点：等比数列与等差数列

解析：

(1) 设$\{a_n\}$的公比为q，由题意可得$\frac{5}{3}q^3=\frac{q^2+q^4}{2}$，解得$q_1=\frac{1}{3},q_2=3$，因为数列$\{a_n\}$是首项为 1 的单调递增等比数列,所以$q=3,a_n=3^{n-1}$

(2)由题意可得,$b_n=\log_3\left(3^{n-1}\cdot 3^n\right)=2n-1$. 则$a_n\cdot b_n=(2n-1)\cdot 3^{n-1}$

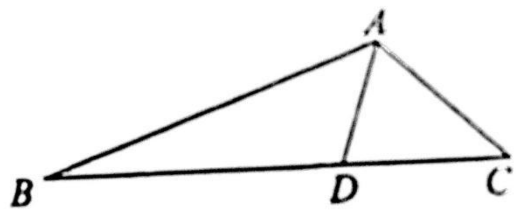
$S_n=1\cdot 3^0+3\cdot 3^1+5\cdot 3^2+\cdots+(2n-3)\cdot 3^{n-2}+(2n-1)\cdot 3^{n-1}$

$3S_n=\quad 1\cdot 3^1+3\cdot 3^2+5\cdot 3^3+\cdots\cdots\cdots\cdots+(2n-3)\cdot 3^{n-1}+(2n-1)\cdot 3^n$

则$-2S_n=1\cdot 3^0+2\cdot 3^1+2\cdot 3^2+\cdots+2\cdot 3^{n-1}-(2n-1)\cdot 3^n$，则$S_n=1+(n-1)\cdot 3^n,n\in N^*$

18. (本小题满分 12 分)如图，已知AD是ΔABC内角$\angle BAC$的角平分线

（1）用正弦定理证明：$\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}$；（2）若$\angle BAC=120^\circ$，$AB=2,AC=1$，求$AD$的长



考点：正余弦定理

解析：(1).$\because AD$是$\angle BAC$的角平分线，$\therefore\angle BAD=\angle CAD$

根据正弦定理，在ΔABD中，$\frac{\sin\angle BAD}{BD}=\frac{\sin\angle ADB}{BA}$

在ΔADC中，$\frac{\sin\angle DAC}{DC}=\frac{\sin\angle ADC}{AC}$

$\because\sin\angle ADB=\sin(\pi-\angle ADC)=\sin\angle ADC$

$\therefore\frac{\sin\angle BAD}{\sin\angle ADB}=\frac{DB}{AB},\frac{\sin\angle DAC}{\sin\angle ADC}=\frac{DC}{AC},\therefore\frac{AB}{AC}=\frac{DB}{DC}$

（2）根据余弦定理，$\cos\angle BAC=\frac{BA^2+AC^2-BC^2}{2\cdot AB\cdot AC}$, 即

$\cos 120^o = \dfrac{2^2+1^2-BC^2}{2\times 2\times 1}, BC=\sqrt{7}$

$\because \dfrac{AB}{AC}=\dfrac{DB}{DC}, \therefore \dfrac{DB}{DC}=\dfrac{2}{1}, CD=\dfrac{\sqrt{7}}{3}, BD=\dfrac{2\sqrt{7}}{3}$

设 $AD=x$,则在 ΔABD 与 ΔADC 中，根据余弦定理

$$\cos 60^o = \frac{1+x^2-(\frac{\sqrt{7}}{3})^2}{2\cdot x\cdot 1}, \cos 60^o = \frac{2^2+x^2-(\frac{2\sqrt{7}}{3})^2}{2\cdot x\cdot \frac{2\sqrt{7}}{3}}$$

解得 $x=\dfrac{2}{3}$ ，因此 $AD=\dfrac{2}{3}$

19. 甲乙两人玩一种游戏，游戏规则如下：先将筹码放在如下表的正中间 D 处，投掷一枚质地均匀的硬币，若正面朝上，筹码向右移动一格；若反面朝上，筹码向左移动一格.

A	B	C	D	E	F	G
30	5	10	10	5	20	30

(Ⅰ) 将硬币连续投掷三次，现约定：若筹码停在 A 或 B 或 C 或 D 处，则甲赢；否则，乙赢. 问该约定对乙公平吗？请说明理由.

(Ⅱ) 设甲乙两人各有 100 个积分，筹码停在 D 处，现规定：

①投掷一次硬币，甲付给乙 10 个积分；乙付给甲的积分数是，按照上述游戏规则筹码所在表中字母 A~G 下方所对应的数目；

②每次游戏筹码都连续走三步，之后重新回到起始位置 D 处.

你认为该规定对甲乙两人中哪一个有利？请说明理由.

考点：游戏公平性；列表法或树状图法；分布列

解析：(Ⅰ) 该约定对乙公平.

$D\to C\to B\to A; D\to C\to B\to C; D\to C\to D\to E; D\to C\to D\to C;$
$D\to E\to F\to G; D\to E\to F\to E; D\to E\to D\to E; D\to E\to D\to C.$

将硬币连续投掷三次，共有上述 8 种情况，其中筹码停在 A 或 B 或 C 或 D 处有 4 种情况，即筹码停在 A 或 B 或 C 或 D 处的概率为 $P=\dfrac{1}{2}$. 所以，该约定对乙公平.

(Ⅱ) 该规定对甲有利.

根据(Ⅰ)中所列的 8 中情况可得乙付给甲的积分数可能是：20，25，30，45，55.

设乙付给甲的积分数为 X，可得分布列为：

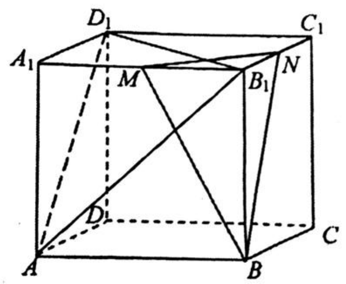
X	20	25	30	45	55
P	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

$E(X)=\frac{1}{8}\times 20+\frac{3}{8}\times 25+\frac{2}{8}\times 30+\frac{1}{8}\times 45+\frac{1}{8}\times 55=\frac{255}{8}>30$. 所以，该规定对甲有利.

20. 如图，四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$中，M,N分别为棱A_1B_1，B_1C_1的中点，平面$ABCD\perp$平面A_1B_1BA，平面$ABCD\perp$平面B_1BCC_1.

(1) 求证$B_1B\perp$平面$ABCD$

(2) 若四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长均为$\sqrt{5}$，$cos\angle BAD=\frac{3}{5}$，设平面$BMN$与平面$AB_1D_1$相交所成的二面角大小为θ，求$cos\theta$.



考点：立体几何垂直证明；空间二面角

解析：

（1）证明：过点D作$DP\perp AB$，过点D作$DQ\perp BC$

由平面$ABCD\perp$平面A_1B_1BA，$BB_1\subseteq$平面A_1B_1BA得$DP\perp BB_1$

由平面$ABCD\perp$平面B_1BCC_1，$BB_1\subseteq$平面B_1BCC_1得$DQ\perp BB_1$

又$DP\cap DQ=D$，故$BB_1\perp$平面$ABCD$

（2）解：由 $AB=AD=\sqrt{5}$，且$cos\angle BAD=\frac{3}{5}$，

在ΔABD中利用余弦定理可得：$BD=2$

设AC与BD的交点O，A_1C_1与B_1D_1的交点为O_1

以O为坐标原点，分别以OA,OB,OO_1所在直线为x,y,z轴建立空间直角坐标系

则$B(0,1,0)$，$M(1,\frac{1}{2},\sqrt{5})$，$N(-1,\frac{1}{2},\sqrt{5})$，$C(-2,0,0)$，$A_1(2,0,\sqrt{5})$，$A(2,0,0)$，$B_1(0,1,\sqrt{5})$，$D_1(0,-1,\sqrt{5})$

设平面BMN的法向量为$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$，$\overrightarrow{BM}=(1,-\frac{1}{2},\sqrt{5})$，$\overrightarrow{MN}=(-2,0,0)$

由$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{BM}=\vec{0}$，$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{MN}=\vec{0}$ 解得$\overrightarrow{n_1}=(0,10,\sqrt{5})$

设平面BMN的法向量为$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$，$\overrightarrow{AB_1}=(-2,1,\sqrt{5})$，$\overrightarrow{B_1D_1}=(0,-2,0)$

由$\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{AB_1}=\vec{0}$，$\overrightarrow{n_2}\cdot\overrightarrow{B_1D_1}=\vec{0}$ 解得$\overrightarrow{n_2}=(5,0,2\sqrt{5})$

故$cos\theta=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{2\sqrt{21}}{63}$

21.已知函数$f(x)=\frac{x}{e^x}+ax\ln x\,(a\in R)$在$x=1$处的切线方程为$y=bx+1+\frac{1}{e}(b\in R)$.

（1）求a,b的值；

（2）证明：$f(x)<\frac{2}{e}$；

（3）若正实数m,n满足$mn=1$，证明：$\frac{1}{e^{m-1}}+\frac{1}{e^{n-1}}<2(m+n)$.

解：（1）$f'(x)=\frac{1-x}{e^x}+a\ln x+a$

$f'(1)=a=$ l，又$f(1)=\frac{1}{e}=b+1+\frac{1}{e}$

$\therefore a=b=-1$

（2）$f(x)=\frac{x}{e^x}-x\ln x<\frac{2}{e}$，即$\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}<x\ln x$

令$g(x)=\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}$，则$g'(x)=\frac{1-x}{e^x}$

因此，$g(x)$在$(0,1)$单调递增；$(1,+\infty)$单调递减

$g(x)$最大值为$g(1)=-\frac{1}{e}$，当且仅当$x=1$时等号成立

又令$h(x)=x\ln x$，则$h'(x)=\ln x+1$

因此，$h(x)$在$\left(0,\frac{1}{e}\right)$单调递减；$\left(\frac{1}{e},+\infty\right)$单调递增.

$h(x)$最小值为$h\left(\frac{1}{e}\right)=-\frac{1}{e}$，当且仅当$x=\frac{1}{e}$时等号成立

因此，$\frac{x}{e^x}-\frac{2}{e}<x\ln x$，即$f(x)<\frac{2}{e}$

（3）由（2）得，$\frac{m}{e^m}-m\ln m<\frac{2}{e}$，即$\frac{1}{e^m}-\ln m<\frac{2}{me}$

两边同乘以e，得：$\frac{1}{e^{m-1}}-e\ln m<\frac{2}{m}$----------①

同理：$\frac{1}{e^{n-1}}-e\ln n<\frac{2}{n}$----------②

①+②，得：$\frac{1}{e^{m-1}}+\frac{1}{e^{n-1}}<e(\ln m+\ln n)+2(\frac{1}{m}+\frac{1}{n})=2\frac{m+n}{mn}=2(m+n)$

原式得证.

选做题

22.已知平面直角坐标系xOy中，点$P(1,0)$，曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\varphi\\y=\sin\varphi\end{cases}$（$\varphi$为参数）.以原点$O$为极点，$x$轴的正半轴为极轴建立极坐标系，倾斜角为$\alpha$的直线$l$的极坐标方程为$\rho\sin(\alpha-\theta)=\sin\alpha$.

（1）求曲线C的普通方程和直线l的直角坐标方程；

（2）若曲线C与直线l交于M,N两点，且$\left|\frac{1}{|PM|}-\frac{1}{|PN|}\right|=\frac{1}{3}$，求$\alpha$的值.

考点：坐标系与参数方程

解析：

（1）曲线C的参数方程为$\begin{cases}x=2\cos\varphi\\y=\sin\varphi\end{cases}$，由$\cos^2\varphi+\sin^2\varphi=1\Rightarrow\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

l的极坐标方程为$\rho\sin(\alpha-\theta)=\sin\alpha$

$\rho\sin\alpha\cdot\cos\theta-\rho\cos\alpha\cdot\sin\theta=\sin\alpha$

$(x-1)\cdot\sin\alpha=y\cdot\cos\alpha$

$(x-1)\cdot\tan\alpha=y$

$y=x\cdot\tan\alpha-\tan\alpha$

所以直线l的直角坐标方程为$y=x\cdot\tan\alpha-\tan\alpha$.

（2）直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+t\cdot\cos\alpha \\ y=t\cdot\sin\alpha \end{cases}$ 代入 C 可得

$$(3\sin^2\alpha+1)\cdot t^2+2\cos\alpha\cdot t-3=0 \Rightarrow \begin{cases} t_1+t_2=-\dfrac{2\cos\alpha}{3\sin^2\alpha+1} \\ t_1\cdot t_2=-\dfrac{3}{3\sin^2\alpha+1} \end{cases},$$

由 $\left|\dfrac{1}{|PM|}-\dfrac{1}{|PN|}\right|=\dfrac{1}{3}$ 可得 $\left|\dfrac{|PM|-|PN|}{|PM|\cdot|PN|}\right|=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\dfrac{|t_1+t_2|}{|t_1\cdot t_2|}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow 3|t_1+t_2|=|t_1\cdot t_2|$

即 $\left|\dfrac{-6\cos\alpha}{3\sin^2\alpha+1}\right|=\left|\dfrac{-3}{3\sin^2\alpha+1}\right|\Rightarrow|\cos\alpha|=\dfrac{1}{2}$

$\therefore \alpha=60^\circ$ 或 $\alpha=120^\circ$.

23.（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

已知实数 a，b，c 均大于 0.

（1）求证：$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\le a+b+c$；

（2）若 $a+b+c=1$，求证：$\dfrac{2ab}{a+b}+\dfrac{2bc}{b+c}+\dfrac{2ca}{c+a}\le 1$.

考点：基本不等式的应用，简单的推理能力

解析：

（1）$\because$ a，b，$c>0$，由基本不等式，得：$a+b\ge 2\sqrt{ab}$，$b+c\ge 2\sqrt{bc}$，$c+a\ge 2\sqrt{ca}$，

以上三式相加，得：$2(a+b+c)\ge 2(\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca})$

即 $\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}\le a+b+c$，原式得证.

（2）$\because$ $a+b\ge 2\sqrt{ab}$，$b+c\ge 2\sqrt{bc}$，$c+a\ge 2\sqrt{ca}$

$$\therefore \frac{2ab}{a+b}+\frac{2bc}{b+c}+\frac{2ca}{c+a}\le\frac{2ab}{2\sqrt{ab}}+\frac{2bc}{2\sqrt{bc}}+\frac{2ca}{2\sqrt{ca}}$$

$$=\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$$

由（1），得 $\le a+b+c=1$，原式得证.