太原市 2017 年高三年级模拟考试试题（一）

数学试卷（理工类）

（考试时间：下午 3:00-5:00）

一、选择题：

1.已知集合 $A=\{x\mid y=\lg(x+1)\},B=\{x\mid |x|<2\}$，则$A\cap B=$（　　）

A.(-2，0)　　B.(0，2)　　C.(-1，2)　　D.(-2，-1)

考点：集合的运算

解析：$A:x>-1;B:-2<x<2;A\cap B=(-1,2)$

答案：C

2.已知 $zi=2-i$，则复数 z 在复平面内对应的点的坐标是（　　）

A.(-1，-2)　　B.(-1，2)　　C.(1，-2)　　D.(1,2)

考点：复数的运算

解析：$z=\dfrac{2-i}{i}=\dfrac{(2-i)i}{i^2}=-1-2i$

答案：A

3.已知 S_n 是等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，则 $2(a_1+a_3+a_5)+3(a_8+a_{10})=36$，则 $S_{11}=$

A、66　　B、55

C、44　　D、33

考点：等差数列性质

解析：由 $2(a_1+a_3+a_5)+3(a_8+a_{10})=36$，得 $6a_3+6a_9=36$，所以 $a_6=3$，$S_{11}=11a_6=33$

答案：D

4.已知 $\vec{a}=(1,\cos\alpha),\vec{b}=(\sin\alpha,1)$，且 $0<\alpha<\pi$，若 $\vec{a}\perp\vec{b}$，则 $\alpha=$

A、$\dfrac{2\pi}{3}$　　B、$\dfrac{3\pi}{4}$

C、$\dfrac{\pi}{4}$　　D、$\dfrac{\pi}{6}$

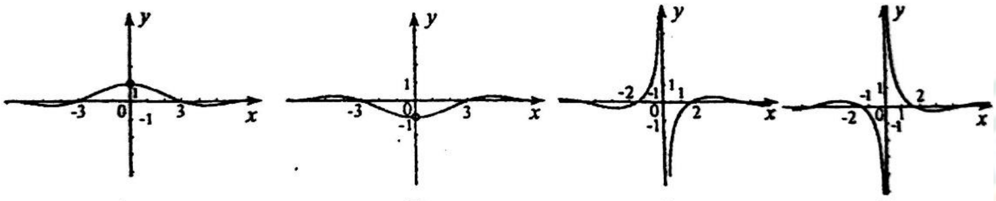
考点：平面向量基本运算

解析：$\vec{a}\cdot\vec{b}=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})$，又 $\vec{a}\perp\vec{b}$，即 $\sqrt{2}\sin(\alpha+\dfrac{\pi}{4})=0$，$\alpha+\dfrac{\pi}{4}=k\pi$,即$\alpha=-\dfrac{\pi}{4}+k\pi$

结合 $0<\alpha<\pi$，所以 $\alpha=\dfrac{3\pi}{4}$

答案：B

5. 函数 $f(x)=\dfrac{\cos x}{x}$ 的图像大致为（　　）



A　　　　B　　　　C　　　　D

考点：函数的图象

解析：首先判断定义域 $[-\infty,0)\cup(0,+\infty]$ ，四个选项都符合；然后判断函数奇偶性，$f(-x)=\dfrac{\cos(-x)}{-x}=-\dfrac{\cos x}{x}=-f(x)$ ，则函数 $f(x)$ 为奇函数，排除 A、B；最后利用特殊点判断，$f(1)=\dfrac{\cos 1}{1}>0$ ，所以 D 选项符合。

答案：D

6. 已知圆 $C:x^2+y^2=1,$ 直线 $l:y=k(x+2)$，在 $[-1,1]$ 上随机选取一个数 k ，则事件“直线 l 与圆 C 相离”发生的概率为（　　）

A. $\dfrac{1}{2}$　　B. $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$　　C. $\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$　　D. $\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}$

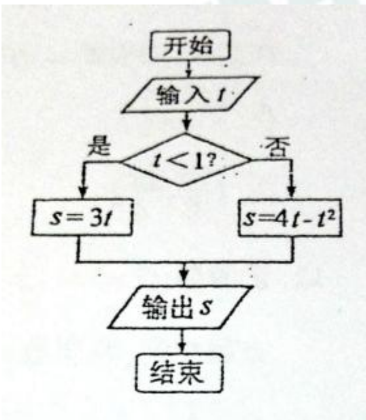
考点：几何概型

解析：由直线与圆相离可得：$\dfrac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}}>1\Rightarrow 3k^2>1\Rightarrow k>\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $k<-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ，满足 $[-1,1]$ 的区间长度为 $2\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ ，则概率为 $P=\dfrac{2(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3})}{2}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{3}$.

答案：C

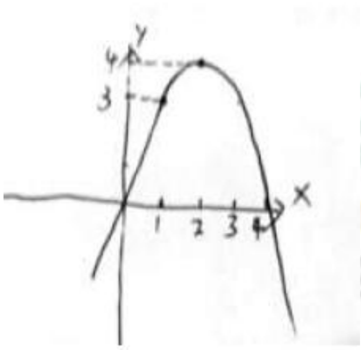
7. 执行右面的程序框图，已知输出的 $s\in[0,4]$。若输入的 $t\in[m,n]$，则实数 $n-m$ 的最大值为　（　　）

A.1　　B.2　　C.3　　D.4



考点：框图与分段函数值域

解析：

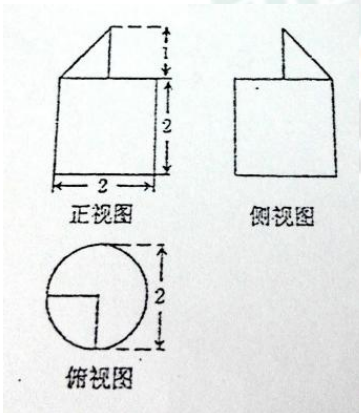


答案： D

8. 某几何体的三视图如右图所示，则该几何体的表面积为 （ ）

$A.6\pi+1$ $B.\dfrac{(24+\sqrt{2})\pi}{4}+1$

$C.\dfrac{(23+\sqrt{2})\pi}{4}+\dfrac{1}{2}$ D. $\dfrac{(23+\sqrt{2})\pi}{4}+1$



考点：三视图及几何体的表面积

解析: $S=\pi+4\pi+\dfrac{3}{4}\pi+2\times\dfrac{1}{2}\times1\times1+\dfrac{1}{4}\sqrt{2}\pi=\dfrac{(23+\sqrt{2})\pi}{4}+1$

答案： D

9.已知 $D=\left\{(x,y)\middle|\begin{cases}x+y-2\le 0,\\ x-y+2\le 0,\\ 3x-y+6\ge 0\end{cases}\right\}$，给出下列四个命题:

P_1: $\forall(x,y)\in D, x+y+1\ge 0$

P_2: $\forall(x,y)\in D, 2x-y+2\le 0$

P_3: $\exists(x,y)\in D, \dfrac{y+1}{x-1}\le -4$

P_3: $\exists(x,y)\in D, x^2+y^2\le 2$

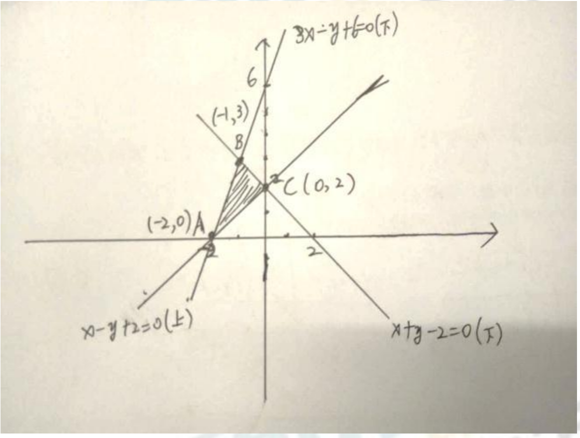
其中真命题的是

A. P_1,P_2 B. P_2,P_3 C. P_2,P_4 D. P_3,P_4

考点：线性规划和简易逻辑中的特称、全称命题。

解析：首先根据目标函数画出可行域如图所示。P_1: 令 $z=x+y+1$, 从图中可以看出 z 在 A 点取得最小值，为−1，所以 P_1 不正确；P_2: 令 $z=2x-y+2$, 从图中可以看出 z 在 C 点取得最大值，为 0，所以 P_2 正确；P_3: $\frac{y+1}{x-1}$ 表示可行域中的点与点 $(1,-1)$ 连线所在直线斜率，从图中可以看出在点 A 取得最大值，为 $-\frac{1}{3}$，在点 B 取得最小值，为 -3，所以 P_3 不正确。

答案：C



10.已知抛物线 $y^2=4x$ 的焦点为 F ,过焦点 F 的直线交抛物线于 A 、 B 两点， O 为坐标原点，若 ΔAOB 的面积为 $2\sqrt{6}$ ，则 $|AB|=(\quad)$

$A.6$ $B.8$ $C.12$ $D.16$

考点：抛物线的公式

解析：抛物线的结合图形的计算问题

$$S=\frac{1}{2}|y_A-y_B|\bullet|OF|=\sqrt{6}\Rightarrow|y_A-y_B|=2\sqrt{6},$$

$$y=k(x-1),$$

$$\begin{cases}y=k(x-1),\\ y^2=4x,\end{cases}\Rightarrow ky^2-4y-4k=0,\Rightarrow k^2=2,$$

$$|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\cdot|y_A-y_B|=6.$$

答案：A

11.已知函数 $f(x)=\sin wx-\sqrt{3}\cos wx(w>0)$，若方程 $f(x)=-1$ 在 $(0,\pi)$ 上有且只有四个实数根，则实数 w 的取值范围为（　　）

A. $(\frac{13}{6},\frac{7}{2}]$　　B. $(\frac{7}{2},\frac{25}{6}]$　　C. $(\frac{25}{6},\frac{11}{2}]$　　D. $(\frac{11}{2},\frac{37}{6}]$

考点：考查三角函数根的分布问题，找临界值

解析：由题意知 $f(x)=2\sin(wx-\frac{\pi}{3})=-1$，即 $\sin(wx-\frac{\pi}{3})=-\frac{1}{2}$ 在 $(0,\pi)$ 上有四个实数根，令 $t=wx-\frac{\pi}{3}$，

则 $\sin t=-\frac{1}{2}$ 在 $(-\frac{\pi}{3},wx-\frac{\pi}{3})$ 上有四个根，由图象可知 $\begin{cases}\frac{19\pi}{6}<wx-\frac{\pi}{3}\\ \frac{23\pi}{6}\geq wx-\frac{\pi}{3}\end{cases}$ 可得 $\frac{7}{2}<w\leq\frac{25}{6}$

答案：B

12.设函数 $f(x)=\frac{3}{2}x^2-2ax(a>0)$ 与 $g(x)=a^2\ln x+b$ 有公共点，且在公共点处的切线方程相同，则实数 b 的最大值为（　　）

A. $\frac{1}{2e^2}$　　B. $\frac{1}{2}e^2$　　C. $\frac{1}{e}$　　D. $-\frac{3}{2e^2}$

考点：导数切线问题

解析：设切点为 (x_0,y_0)，求导可得 $f'(x)=3x-2a$，$g'(x)=\frac{a^2}{x}$

又有公共切点处的切线相同可得，斜率相同，即：$3x_0-2a=\frac{a^2}{x_0}$，解得 $x_0=a$，

带入 $f(x)$ 中得 $y_0=\frac{3}{2}a^2-2a\times a=-\frac{1}{2}a^2$，将点 (x_0,y_0)，带入 $g(x)$ 中得 $b=-\frac{1}{2}a^2-a^2\ln a$

令 $h(a)=-\frac{1}{2}a^2-a^2\ln a$，求导可得 $h'(a)=-a-a-2a\cdot\ln a=-2a(1+\ln a)$ 即 $(0,\frac{1}{e})\uparrow$ $(\frac{1}{e},+\infty)\downarrow$，可得当取 $\frac{1}{e}$ 时取最大值得 $\frac{1}{2e^2}$

答案：A

二、填空题：

13.已知 $\vec{a}=(1,-1),\ \vec{b}=(t,1)$，若 $(\vec{a}+\vec{b})//(\vec{a}-\vec{b})$，则实数 $t=$_____

考点：平面向量的坐标运算

解析：由 $(\vec{a}+\vec{b})//(\vec{a}-\vec{b})$ 可得 $-1\times t=1\times1$ 故 $t=-1$

答案：-1

14,已知双曲线经过点 $(1,2\sqrt{2})$，其一条渐近线方程为 $y=2x$，则该双曲线的标准方程为_________

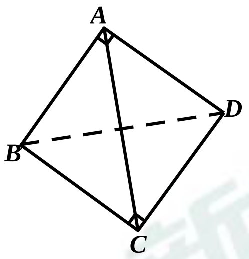
考点：双曲线定义，几何性质

解析：由一条渐近线方程为 $y=2x$ 可知 $b=2a$，又点 $(1,2\sqrt{2})$ 在渐近线上方，所以焦点在 y 轴上，故双曲线方程为 $\frac{y^2}{4}-x^2=1$ 答案：$\frac{y^2}{4}-x^2=1$

15. 已知三棱锥 A-BCD 中，BC⊥CD，AB=AD= $\sqrt{2}$，BC=1，CD= $\sqrt{3}$，则该三棱锥外接球的体积为_________.

考点：外接球体积

解析：如图所示，三棱锥 A-BCD 外接球的球心在 CD 的中点，故该外接球的半径为 1，故 $V=\frac{4}{3}\pi r^3=\frac{4\pi}{3}$.



答案：$\frac{4\pi}{3}$

16.已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=-1, a_{n+1}=2a_n+3n-1(n\in N^*)$,则其前 n 项和$S_n=$ ______.

考点：数列通项与前 n 项和

解析：

$a_{n+1}+p(n+1)+q=2(a_n+pn+q)$

$a_{n+1}+pn+p+q=2a_n+2pn+2q$

$a_{n+1}=2a_n+pn+q-p$

$\begin{cases}p=3\\q-p=-1\end{cases}$ 得 $\begin{cases}p=3\\q=2\end{cases}$

$a_{n+1}+3(n+1)+2=2(a_n+3n+2)$

$\{a_n+3n+2\}$是以首项为4，公比为2的等比数列

$a_n+3n+2=2^{n+1}$,所以$a_n=2^{n+1}-(3n+2)$

$a_n=2^{n+1}-3n-2$,故所求数列可以看做等比数列 $b_n=2^{n+1}$ 与等差数列 $c_n=3n+2$ 前 n 项和的差

故 $S_n=2^{n+2}-4-\frac{3n^2+7n}{2}$

答案：$S_n=2^{n+1}-4-\frac{3n^2+7n}{2}$

三、解答题：

17.

已知 a,b,c 分别是 ΔABC 的内角 A,B,C 所对的边, $a=2b\cos B$, $b\neq c$.

（1）证明：$A=2B$;

（2）若 $a^2+c^2=b^2+2ac\sin C$,求 A .

考点：解三角形中正余弦定理的应用;诱导公式.

解析：

（1）$\because a=2b\cos B$,

$\therefore$ 由正弦定理得 $\sin A=2\sin B\cos B=\sin 2B$.

$\therefore A=2B$ 或 $A+2B=\pi$

当 $A+2B=\pi$ 时, $B=C$,即 $b=c$ 与 $b\neq c$ 矛盾,舍去.

$\therefore A=2B$

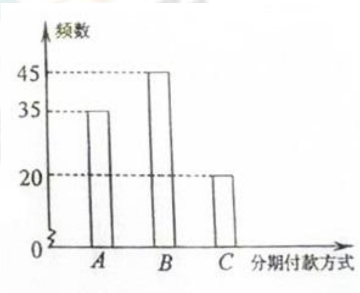
（2）由 $a^2+c^2=b^2+2ac\sin C$ 及余弦定理及诱导公式得 $\sin C=\cos B=\sin\left(\frac{\pi}{2}-B\right)$,即 $B+C=\frac{\pi}{2}$, $\therefore A=\frac{\pi}{2}$

18.

某知名品牌汽车深受消费者喜爱，但价格昂贵。某汽车经销商退出 A,B,C 三种分期付款方式销售该品牌汽车，并对近期 100 位采用上述分期付款的客户进行统计分析，得到如下的柱状图。已知从 A,B,C 三种分期付款销售中，该经销商每销售此品牌汽车 1 辆所获得的利润分别是 1 万元，2 万元，3 万元。现甲乙两人从该汽车经销商处，采用上述分期付款方式各购买此品牌汽车一辆。以这 100 位客户所采用的分期付款方式的频率代替 1 位客户采用相应分期付款方式的概率。

（Ⅰ）求甲乙两人采用不同分期付款方式的概率;

（Ⅱ）记 X（单位：万元）为该汽车经销商从甲乙两人购车中所获得的利润，求 X 的分布列和期望。



考点：概率，分布列、期望

解析：

（Ⅰ） $P(A)=\frac{35}{100}=0.35$ ， $P(B)=\frac{45}{100}=0.45$ ， $P(C)=\frac{20}{100}=0.2$

甲乙两人采用不同分期付款方式的概率为： $1-[P(A)\cdot P(A)+P(B)\cdot P(B)+P(C)\cdot P(C)]=0.635$

（Ⅱ）

X	2	3	4	5	6
P	0.1225	0.315	0.3425	0.18	0.04

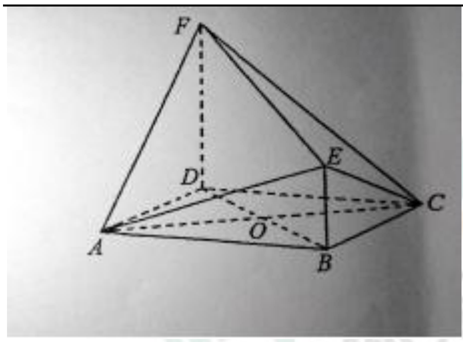
$E(x)=0.1225\times2+0.315\times3+0.3425\times4+0.18\times5+0.04\times6=3.7$

19.

如图，在几何体 $ABCDEF$ 中，四边形 $ABCD$ 是菱形， $BE\perp$ 平面 $ABCD$ ，$DF\parallel BE$ ，
$DF=2BE=2, EF=3.$

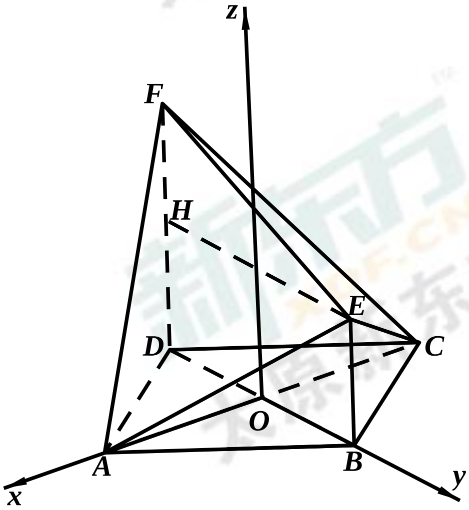
(1)证明：平面 $ACF\perp$ 平面 $BEFD$.

(2)若二面角 $A-EF-C$ 是直二面角，求 AE 与平面 $ABCD$ 所成角的正切值。



考点：线面垂直，二面角。

解析：



(1)证明：$\because$ 四边形$ABCD$是菱形$\therefore AC\perp BD$

$\because BE\perp$平面$ABCD$ $\therefore BE\perp AC$

$\therefore AC\perp$平面$BEFD$

$\because AC\subset$平面ACF $\therefore$平面$ACF\perp$平面$BEFD$

(2)（向量）解：以点 O 为原点，OA 方向为 x 轴，OB 方向为 y 轴，BE 方向为 z 轴建立空间直角坐标系，如图。

做 DF 的中点 H，连接 EH,因为 BE 平行且等于 DH,DH=1.

所以四边形 BEHD 为平行四边形

因为在 RTΔEHF 中，FH=1，EF=3，所以 EH=$2\sqrt{2}$ ，所以 BD=$2\sqrt{2}$

设 AB 长为 a，则各点坐标为

A($\sqrt{a^2-2}$，0，0)；E(0,$\sqrt{2}$,1);F(0,$-\sqrt{2}$,2);C($-\sqrt{a^2-2}$,0,0)

所以$\overrightarrow{AE}=(-\sqrt{a^2-2},\sqrt{2},)$; $\overrightarrow{EF}$=(0,$-2\sqrt{2}$,1); $\overrightarrow{CE}$=($\sqrt{a^2-2}$,$\sqrt{2}$,1)

设$\overrightarrow{n_1}=(x_1,y_1,z_1)$为面 AEF 的法向量；$\overrightarrow{n_2}=(x_2,y_2,z_2)$为面 CEF 的法向量。

所以$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{AE}=0$；$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{EF}=0$

得 $z_1=2\sqrt{2}y_1$ ， $x_1=\dfrac{3\sqrt{2}}{\sqrt{a^2-2}}y_1$

令 $y_1=\sqrt{a^2-2}$ 得 $\overrightarrow{n_1}=(3\sqrt{2},\sqrt{a^2-2},2\sqrt{2a^2-4})$

同理得 $\overrightarrow{n_2}=(-3\sqrt{2},\sqrt{a^2-2},2\sqrt{2a^2-4})$

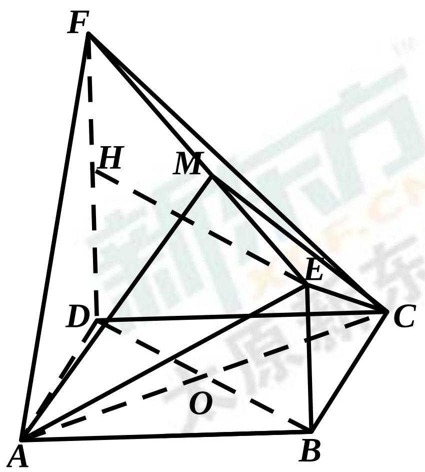
因为二面角 A-EF-C 是直二面角，所以 $\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$

得 $a=2$

由题可得： $\angle EAB$ 为 AE 与平面 ABCD 所夹角

因为 AB=2,BE=1

所以 $\tan\angle EAB=\dfrac{BE}{AB}=\dfrac{1}{2}$



（几何）

$\because$ 四边形ABCD为菱形, $\therefore$ $\Delta ADF\cong\Delta CDF$，$\Delta ABE\cong\Delta CBE$

$\therefore$ AF=CF，AE=CE, $\therefore$ $\Delta AEF\cong\Delta CEF$

过 A 作 AM$\perp$EF，连接 CM ，则 $\angle$AMC为A-EF-C 二面角的平面角

设菱形的边长为 a

$\because$ $BE=1$, DF=2, EF=3, DF$\perp$BD, $\therefore$ BD=$2\sqrt{2}$

在□AOB 中， AO=$\sqrt{a^2\text{-}2}$ ， $\therefore$ AC=$2\sqrt{a^2\text{-}2}$

$\because$ A-EF-C 二面角为直角， $\therefore$ $\angle$AMC 为直角

$\therefore$ AM=$\sqrt{2a^2\text{-}4}$

在□AEF 中， AM$\perp$EF，设 $ME=x$ ，则 $MF=3-x$

$AF=\sqrt{a^2+4},\mathrm{AE}=\sqrt{a^2+1}$

$\left(\sqrt{a^2+4}\right)^2-(3-x)^2=\left(\sqrt{a^2+1}\right)^2-x^2 \quad \therefore a=2$

AE 与平面 ABCD 所成角为 $\angle$EAB

$\therefore \tan\angle EAB=\dfrac{1}{2}$

20.已知椭圆 C：$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$的左右焦点与其短轴得一个端点是正三角形的三个顶点，点 D（1，$\frac{3}{2}$）在椭圆 C 上，直线l: $y=kx+m$与椭圆交于 A，P 两点，与 x 轴，y 轴分别相交于点 N 合点 M，且 PM=MN，点 Q 时点 P 关于 x 轴的对称点，QM 的延长线交椭圆于点 B，过点 A，B 分别做 x 轴的垂线，垂足分别为 A_1,B_1 .

（1） 求椭圆 C 的方程；

（2） 是否存在直线 l，使得点 N 平分线段 A_1B_1？若存在，请求出直线 l 的方程；若不存在，请说明理由。

考点：椭圆的方程，椭圆的基础知识，直线与椭圆的位置关系

解析：

(1) 由题意知 $\frac{b}{c}=\sqrt{3}$, 即 $b=\sqrt{3}c, a^2=4c^2, b^2=3c^2$, 即 $\frac{x^2}{4c^2}+\frac{y^2}{3c^2}=1$

$\because(1,\frac{3}{2})$ 在椭圆上，$\therefore\frac{1}{4c^2}+\frac{\frac{9}{4}}{3c^2}=1, c^2=1, a^2=4, b^2=3$

所以椭圆 c 方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$

(2) 存在

设 $M(0,m), N(-\frac{m}{k},0)$, $\because DM=MN$

$\therefore P(\frac{m}{k},2m), Q(\frac{m}{k},-2m), A(x_1,y_1), B(x_2,y_2)$

$\begin{cases} y=kx+m \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ $\therefore(3+4k^2)x^2+8kmx+4m^2-12=0$ ①

$\therefore x_1+\frac{m}{k}=-\frac{8km}{3+4k^2}, x_1\cdot\frac{m}{k}=\frac{4m^2-12}{3+4k^2}$

$k_{QM}=\frac{m-(-2m)}{0-\frac{m}{k}}=-3k$

联立 $\begin{cases} y=-3k+m \\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ $\therefore(3+36k^2)x^2-24kmx+4m^2-12=0$ ②

$\therefore x_2+\frac{m}{k}=\frac{24km}{3+36k^2}=\frac{8km}{1+12k^2}$

$\therefore x_1+x_2+\frac{m}{k}+\frac{m}{k}=\frac{8km}{1+12k^2}-\frac{8km}{3+4k^2}$

$\therefore x_1+x_2=\frac{8km}{1+12k^2}-\frac{8km}{3+4k^2}-\frac{2m}{k}$

若 N 平分线段 A_1B_1，则 $-\frac{2m}{k}=\frac{8km}{1+12k^2}-\frac{8km}{3+4k^2}-\frac{2m}{k}$

即 $\frac{8km}{1+12k^2}=\frac{8km}{3+4k^2}$ $\quad 1+12k^2=3+4k^2 \quad \therefore k=\pm2$

$\because k^2=\frac{1}{4}$ 把代入①，②，得 $m^2=\frac{3}{7}, m=\pm\frac{\sqrt{21}}{7}$

所以直线l的方程为 $y=\frac{1}{2}x\pm\frac{\sqrt{21}}{7}$ 或 $y=-\frac{1}{2}x\pm\frac{\sqrt{21}}{7}$

21. 已知函数 $f(x)=2Inx+ax-\frac{4f'(2)}{x}(a\in R)$ 在 $x=2$ 处的切线经过点 $(-4,In2)$

（1） 讨论函数 $f(x)$ 的单调性

（2） 若不等式 $\frac{2xInx}{1-x^2}>mx-1$ 恒成立，求实数 m 的取值范围

考点：含参函数单调性、恒成立和存在性问题

解析：

（1）$f'(x)=\frac{2}{x}+a+\frac{4f'(2)}{x^2}$

令 $x=2$ $\therefore f'(2)=1+a+f'(2)$

$\therefore a=-1$ 设切点为 $(2,2In2+2a-2f'(2))$

$y-(2In2+2a-2f'(2))=f'(2)(x-2)$ 代入 $(-4,2In2)$

$2In2\_2In2-2a+2f'(2)=-6f'(2)$ $\therefore f'(2)=-\frac{1}{4}$

$\therefore f'(x)=\frac{2}{x}-1-\frac{1}{x^2}=\frac{-(x-1)^2}{x^2}\le 0$

$\therefore f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 单调递减

（2）$\frac{2xInx}{1-x^2}>mx-1$ 恒成立

$\frac{1}{1-x^2}\left(2Inx+\frac{1-x^2}{x}\right)>m$

令 $\varphi(x)=2Inx+\frac{1-x^2}{x}$

$\varphi'(x)=\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}-1=-\left(\frac{1}{x^2}-1\right)^2\le 0$

$\therefore \varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减

$\because \varphi(1)=0$

$\therefore \begin{cases} x\in(0,1),\varphi(x)>0 \\ x\in(1,+\infty),\varphi(x)<0 \end{cases}$

$\therefore \frac{1}{1-x^2}\varphi(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 恒大于 0

$\therefore m\le 0$

22 在直角坐标系 xoy 中，曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = \sqrt{2}\cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases}$，其中 φ 为参数，曲线 C_2：$x^2 + y^2 - 2y = 0$，以原点 O 为极点，x 轴的正半轴为极轴建立极坐标系，射线 l：$\theta = \alpha(\rho \geq 0)$ 与曲线 C_1，C_2 分别交于点 A,B（均异于原点 O）

（1） 求曲线 C_1，C_2 的极坐标方程；

（2） 当 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ 时，求 $|OA|^2 + |OB|^2$ 的取值范围；

考点：极坐标与参数方程转化，取值范围问题；

解析：（1）C_1 的普通方程为 $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$，C_1 的极坐标方程为 $\rho^2 + \rho^2\sin^2\theta - 2 = 0$

C_2 的极坐标方程为 $\rho = 2\sin\theta$

（2）联立 $\theta = \alpha(\rho \geq 0)$ 与 C_1 的极坐标方程得 $|OA|^2 = \frac{2}{1+\sin^2\alpha}$

联立 $\theta = \alpha(\rho \geq 0)$ 与 C_2 的极坐标方程得 $|OB|^2 = 4\sin^2\alpha$

则 $|OA|^2 + |OB|^2 = \frac{2}{1+\sin^2\alpha} + 4\sin^2\alpha = \frac{2}{1+\sin^2\alpha} + 4(1+\sin^2\alpha) - 4$

$t = 1 + \sin^2\alpha$ $t, \in$ $(1,$

则 $|OA|^2 + |OB|^2 = \frac{2}{t} + 4t - 4$，在 $(1, 2)$ 上单调递增，

$\therefore |OA|^2 + |OB|^2 \in (2, 5)$.

23.已知函数 $f(x) = |x-a| + \frac{1}{2a}(a \neq 0)$

（1）若不等式 $f(x) - f(x+m) \leq 1$ 恒成立，求实数 m 的最大值

（2）当 $a < \frac{1}{2}$ 时，函数 $g(x) = f(x) + |2x-1|$ 有零点，求实数 a 的取值范围.

考点：不等式恒成立问题，构造函数

解析：（1）$|x-a| + \frac{1}{2a} - |x-a+m| - \frac{1}{2a} \leq |x-a-x+a-m| = |m|$

$\because$ $f(x) - f(x+m) \leq 1$，$\therefore |m| \leq 1$，m 的最大值为 1

（2）$g(x) = f(x) + |2x-1|$

即 $g(x) = \begin{cases} 3x + \frac{1}{2a} - a - 1, x \geq \frac{1}{2} \\ -x + \frac{1}{2a} - a + 1, a \leq x < \frac{1}{2} \\ -3x + a + \frac{1}{2a} + 1, x < a \end{cases}$

$g(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处取到最小值，即 $3\times\frac{1}{2} + \frac{1}{2a} - a - 1 \leq 0$，$\frac{1}{2} + \frac{1}{2a} - a \leq 0$，通分后的 $\frac{(2a+1)(a-1)}{2a} \geq 0$

解集为 $\{a \mid -\frac{1}{2} \leq a < 0, a \geq 1\}$ 与题干中 $a < \frac{1}{2}$ 取交集得 $\{a \mid -\frac{1}{2} \leq a < 0\}$