

太原市 2017 年高三年级模拟考试试题（一）

数学试卷（文史类）

（考试时间：下午 3:00-5:00）

一、选择题：

1. 已知集合  $A = \{x | y = \lg(x-1)\}$ ,  $B = \{|x| < 2\}$ , 则  $A \cap B = ( \quad )$

A. (-2, 0)    B. (0, 2)    C. (1, 2)    D. (-2, 2)

考点：集合交集运算与函数定义域综合

解析：  $A = \{x | x > 1\}$ ,  $B = \{x | -2 < x < 2\}$ , 所以  $A \cap B = \{x | 1 < x < 2\}$ , 故选 C

答案：C

2. 复数  $\frac{2-i}{i} = ( \quad )$

A.  $-1-2i$     B.  $-1+2i$     C.  $1-2i$     D.  $1+2i$

考点：复数除法运算

解析：  $\frac{2-i}{i} = \frac{(2-i)i}{i^2} = \frac{2i+1}{-1} = -2i-1$

答案：A

3. 在等差数列  $\{a_n\}$  中,  $2(a_1 + a_3 + a_5) + 3(a_8 + a_{10}) = 36$ , 则  $a_6 = ( \quad )$

A. 8    B. 6    C. 4    D. 3

考点：等差数列的等差中项的性质

解析：  $2(a_1 + a_3 + a_5) + 3(a_8 + a_{10}) = 2 \cdot 3a_3 + 3 \cdot 2a_9 = 6(a_3 + a_9) = 12a_6 = 36, \therefore a_6 = 3$

答案：D

4. 已知  $\vec{a} = (1, \cos \alpha)$ ,  $\vec{b} = (\sin \alpha, 1)$ , 若  $\vec{a} \perp \vec{b}$ , 则  $\sin 2\alpha = ( \quad )$

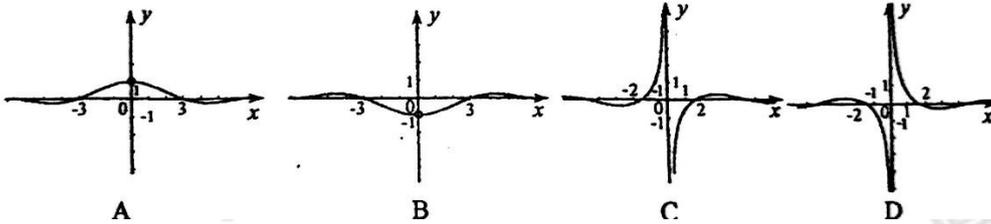
A.  $-\frac{1}{2}$     B. -1    C.  $\frac{\sqrt{3}}{2}$     D. 1

考点：向量的垂直以及向量的数量积，三角函数的基本关系式

解析：  $\vec{a} \perp \vec{b}, \therefore \vec{a} \cdot \vec{b} = \cos \alpha + \sin \alpha = 0, \therefore (\cos \alpha + \sin \alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha = 0, \sin 2\alpha = -1$

答案: B

5. 函数  $f(x) = \frac{\cos x}{x}$  的图像大致为 ( )



考点: 函数的图象

解析: 首先判断定义域  $[-\infty, 0) \cup (0, +\infty]$ , 四个选项都符合; 然后判断函数奇偶性,  $f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x} = -\frac{\cos x}{x} = -f(x)$ , 则函数  $f(x)$  为

奇函数, 排除 A、B; 最后利用特殊点判断,  $f(1) = \frac{\cos 1}{1} > 0$ , 所以 D 选项符合。

答案: D

6. 已知圆  $C: (x-2)^2 + y^2 = 1$ , 直线  $l: y = kx$ , 在  $[-1, 1]$  上随机选取一个数  $k$ , 则事件“直线  $l$  与圆  $C$  相离”发生的概率为 ( )

- A.  $\frac{1}{2}$       B.  $\frac{2-\sqrt{2}}{2}$       C.  $\frac{3-\sqrt{3}}{3}$       D.  $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$

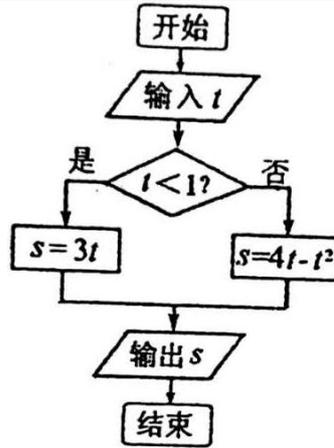
考点: 几何概型

解析: 由直线与圆相离可得:  $\frac{|2k|}{\sqrt{k^2+1}} > 1 \Rightarrow 3k^2 > 1 \Rightarrow k > \frac{\sqrt{3}}{3}$  或  $k < -\frac{\sqrt{3}}{3}$ , 满足  $[-1, 1]$  的区间长度为  $2(1 - \frac{\sqrt{3}}{3})$ , 则概率为

$$P = \frac{2(1 - \frac{\sqrt{3}}{3})}{2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}$$

答案: C

7. 执行右面的程序框图, 已知输出的  $s \in [0, 4]$ 。若输入的  $t \in [0, m]$ , 则实数  $m$  的最大值为 ( )



A.1      B.2      C.3      D.4

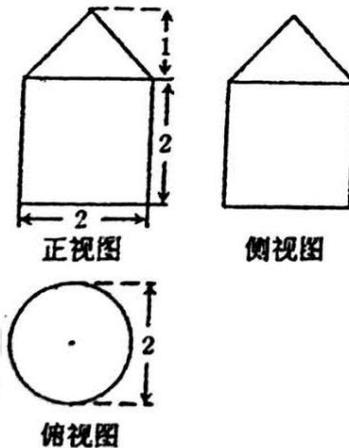
考点: 框图与分段函数值域

解析: 由  $s \in [0, 4]$ , 当  $t < 1$ , 解得; 当  $t \geq 1$ , 解得  $t \in [1, 4]$ , 故  $m$  的最大值为 4

答案: D

8. 某几何体的三视图如右图所示, 则该几何体的表面积为 ( )

A.  $\frac{7\pi}{3}$       B.  $8 + \frac{\pi}{3}$       C.  $(4 + \sqrt{2})\pi$       D.  $(5 + \sqrt{2})\pi$



考点: 三视图及几何体的表面积

解析: 该几何体由一个圆柱与圆锥组合而成  $S = \pi \times 2 \times 2\pi + \frac{1}{2} \times \sqrt{2}\pi \times 2\pi = (5 + \sqrt{2})\pi$

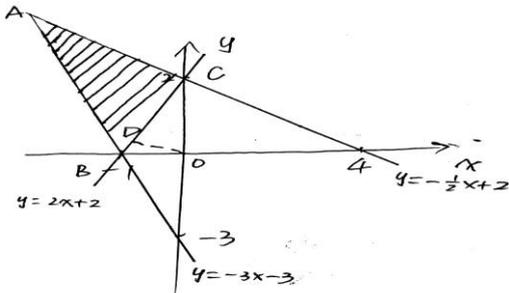
答案: D

9. 已知实数  $x, y$  满足条件  $\begin{cases} 3x + y + 3 \geq 0 \\ 2x - y + 2 \leq 0 \\ x + 2y - 4 \leq 0 \end{cases}$ , 则  $z = x^2 + y^2$  的取值范围为 ( )

- A.  $[1,13]$       B.  $[1,4]$       C.  $\left[\frac{4}{5},13\right]$       D.  $\left[\frac{4}{5},4\right]$

**考点:** 简单的线性规划问题 (非线性规划问题)

**解析:** 作出不等式组对应的平面区域, 利用目标函数的几何意义, 结合两点间的距离公式及点到直线的距离公式进行求解即可。



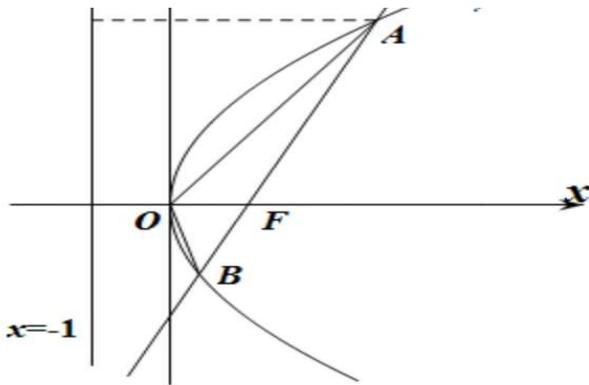
画出如图所示的可行域, 目标函数  $z$  可看成可行域任一点到原点距离的平方, 由图可知, 可行域内  $D$  点距离原点最近,  $A$  点距离原点

最远, 又  $A(-2,3)$ ,  $OD^2 = \left(\frac{|2|}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{4}{5}$ , 则  $z \in \left[\frac{4}{5},13\right]$ , 故选 C。

**答案:** C

10. 已知抛物线  $y^2 = 4x$  的焦点为  $F$ , 过焦点  $F$  的直线交抛物线于  $A, B$  两点,  $O$  为坐标原点, 若  $|AB| = 6$ , 则三角形  $AOB$  的面积为 ( )

- A.  $\sqrt{6}$       B.  $2\sqrt{2}$       C.  $2\sqrt{3}$       D. 4



**考点:** 抛物线的简单几何性质

**解析:** 设直线  $AB$  的倾斜角为  $\alpha$ , 则  $AB = \frac{2p}{\sin^2 \alpha} = \frac{4}{\sin^2 \alpha} = 6$ ,

$$\alpha \in (0, \pi), \text{ 则 } \sin \alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}, S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2}|OF||y_A - y_B| = \frac{1}{2}|OF||AB| \sin \alpha = \frac{1}{2} \times 1 \times 6 \times \frac{\sqrt{6}}{3} = \sqrt{6}, \text{ 故选 A.}$$

**答案:** A

11. 已知函数  $f(x) = \sin wx - \sqrt{3} \cos wx, (w > 0)$  在  $(0, \rho)$  上有且仅有两个零点, 则实数  $w$  的取值范围为 ( )

- A.  $(0, \frac{4}{3}]$       B.  $(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}]$       C.  $(\frac{7}{3}, \frac{10}{3}]$       D.  $(\frac{10}{3}, \frac{13}{3}]$

考点: 三角函数的性质, 对称中心的个数

解析:  $f(x) = \sin wx - \sqrt{3} \cos wx = 2 \sin(wx - \frac{\rho}{3})$

$$\because 0 < x < \pi, \quad \therefore -\frac{\rho}{3} < wx - \frac{\rho}{3} < w\rho - \frac{\rho}{3}$$

$$\because f(x) \text{ 在 } (0, \rho) \text{ 上有且仅有两个零点} \quad \therefore \rho < w\rho - \frac{\rho}{3} < 2\rho, \quad \therefore \frac{4}{3} < w \leq \frac{7}{3}$$

答案: B.

12. 已知函数  $f(x) = \frac{f'(1)}{e} e^x + \frac{f(0)}{2} x^2 - x$ , 若存在实数  $m$  使得不等式  $f(m) \in 2n^2 - n$  成立, 则实数  $n$  的取值范围为

- A.  $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$       B.  $(-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$       C.  $(-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, +\infty)$       D.  $(-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [0, +\infty)$

考点: 导数运算, 导数与不等式存在问题

解析:  $f(0) = \frac{f'(1)}{e} e^0, \quad \therefore f'(1) = ef(0)$

$$f'(x) = \frac{f'(1)}{e} e^x + f(0)x - 1, \quad \therefore f'(1) = f'(1) + f(0) - 1$$

$$\therefore f(0) = 1, f'(1) = e$$

$$\therefore f(x) = e^x + \frac{1}{2}x^2 - x, \quad \therefore f'(x) = e^x + x - 1$$

$\because f'(0) = 0, \quad \therefore f'(x)$  在  $R$  上单调递增,

$\therefore f(x)$  在  $(-\infty, 0)$  上单调递减,  $(0, +\infty)$  上单调递增,

$$\therefore f(x)_{\min} = f(0) = 1$$

若存在  $m$  使得不等式  $f(m) \in 2n^2 - n$  成立,

$$\therefore f(1) \in 2n^2 - n$$

$$\therefore n \in (-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty)$$

答案: A

二、填空题:

13. 已知  $\vec{a} = (1, -1), \vec{b} = (t, 1)$ , 若  $(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} - \vec{b})$  则实数  $t =$  \_\_\_\_\_

**考点:**向量的坐标运算,向量共线的条件

**解析:**由  $\vec{a} = (1, -1), \vec{b} = (t, 1)$  知  $\vec{a} + \vec{b} = (1+t, 0), \vec{a} - \vec{b} = (1-t, -2)$

又  $(\vec{a} + \vec{b}) // (\vec{a} - \vec{b})$  得  $-2(1+t) = 0$  即  $t = -1$

**答案:** -1

14. 已知双曲线经过点  $(2\sqrt{2}, 1)$ , 其一条渐近线方程为  $y = \frac{1}{2}x$ , 则该双曲线的标准方程为\_\_\_\_\_

**考点:**双曲线标准方程的求法

**解析:** 设双曲线的标准方程为  $\frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n} = 1 (mn > 0)$ , 则渐近线为  $y = \pm \sqrt{\frac{n}{m}}x$

由题可得  $\begin{cases} \frac{8}{m} - \frac{1}{n} = 1 \\ \sqrt{\frac{n}{m}} = \frac{1}{2} \end{cases}$  解得  $\begin{cases} m = 4 \\ n = 1 \end{cases}$  即双曲线标准方程为  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

**答案:**  $\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$

15. 已知三棱锥  $A-BCD$  中,  $AB \perp$  面  $BCD, BC \perp CD, BC = CD = 1, AB = \sqrt{2}$ , 则该三棱锥外接球的体积为\_\_\_\_\_

**考点:** 外接球的体积计算

**解析:** 根据已知条件  $\triangle BCD$  为等腰直角三角形,  $BC = CD = 1$ , 则底面外接圆圆心为  $CD$  中点, 则球心在平面  $BCD$  的投影为  $CD$  中点, 再找空间内到  $A, B$  距离相等的点, 应该在直线  $AB$  的中垂面上, 根据平面几何关系可得远的外接圆半径长度为 1,  $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi$ 。

**答案:**  $\frac{4}{3}\pi$

16. 已知数列  $\{a_n\}$  中,  $a_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n + n - 1 (n \in N^+)$ , 其前  $n$  项和  $S_n =$  \_\_\_\_\_

**考点:** 数列求通项及数列求和

**解析:**  $a_{n+1} = 2a_n + n - 1$ , 设  $g(n) = kn + b$ , 则  $a_{n+1} + g(n+1) = 2(a_n + g(n))$ , 展开  $a_{n+1} + k(n+1) + b = 2(a_n + kn + b)$ ,

整理得  $a_{n+1} = 2a_n + kn + b - k$ , 待定系数  $k = 1, b = 0$ , 所以  $g(n) = n, a_{n+1} + n + 1 = 2(a_n + n)$ , 得  $\{a_n + n\}$  为公比  $q = 2$ , 首项  $a_1 + 1 = 2$  的等比数列,

所以  $a_n + n = 2^n$ , 可得  $a_n = 2^n - n$

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

$$S_n = 2^1 - 1 + 2^2 - 2 + 2^3 - 3 + \cdots + 2^n - n$$

$$S_n = (2^1 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - (1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

$$S_n = 2^{n+1} - \frac{n(n+1)}{2} - 2$$

答案： $2^{n+1} - \frac{n(n+1)}{2} - 2$

三、解答题：

17. 已知  $a, b, c$  分别是  $\triangle ABC$  的内角  $A, B, C$  所对的边,  $a = 2b \cos B$ ,  $b \neq c$ .

(1) 证明:  $A = 2B$ ;

(2) 若  $a^2 + c^2 = b^2 + 2ac \sin C$ , 求  $A$ .

考点: 解三角形正余弦定理的应用

解析: (1) 证明:  $\sin A = 2 \sin B \cos B = \sin 2B$

$$A = 2B \text{ 或 } A + 2B = \pi$$

$$A + 2B = \pi = A + B + C \quad \therefore B = C$$

又  $b \neq c$ , 则  $B \neq C$ , 所以  $A = 2B$

$$(2) \cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{2ac \sin C}{2ac} = \sin C = \cos\left(\frac{\pi}{2} - C\right)$$

$$\text{则 } B + C = \frac{\pi}{2}, \text{ 即 } A = \frac{\pi}{2}$$

18. 某知名品牌汽车深受消费者喜爱, 但价格昂贵。某汽车经销商推出 A, B, C 三种分期付款销售该品牌汽车, 并对近期 100 位采用上述分期付款的客户进行统计分析, 得到如下的柱状图。已知从 A, B, C 三种分期付款销售中, 该经销商每销售此品牌汽车 1 辆所获得的利润分别是 1 万元, 2 万元, 3 万元, 以这 100 位客户所采用的分期付款方式的频率代替 1 位客户采用相应分期付款方式的概率。

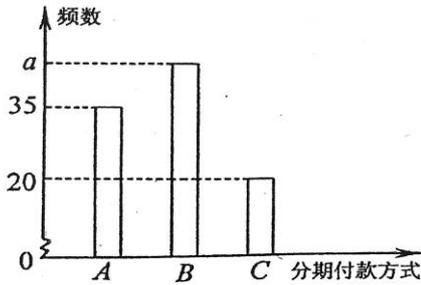
(I) 求采用上述分期付款销售此品牌汽车 1 辆, 该汽车经销商从中所获得的利润不大于 2 万元的概率;

(II) 求采用上述分期付款销售此品牌汽车 1 辆, 该汽车经销商从中所获得的利润的平均值;

(III) 根据某税收规定, 该汽车经销商每月 (按 30 天计) 上交税款的标准如下表:

月利润 (单位: 万元)	在 (0,100] 内的部分	超过 100 且不超过 150 的部分	超过 150 的部分
税率	1%	2%	4%

若该经销商按上述分期付款方式每天平均销售此品牌汽车 3 辆, 估计其月纯收入 (纯收入 = 总利润 - 上交税款) 的平均值。



考点: 概率统计

解析: (1)  $a = 45$   $P(A) = \frac{7}{20}$   $P(B) = \frac{9}{20}$   $P(C) = \frac{1}{5}$

该汽车经销商从中获得利润不大于 2 万的概率为  $P = P(A) + P(B) = \frac{4}{5}$

(2)  $\bar{x} = 1 \cdot \frac{7}{20} + 2 \cdot \frac{9}{20} + 3 \cdot \frac{1}{5} = 1.85$

(3) 每月均利润为  $x = 30 \times 3 \times 1.85 = 166.5$  (万元)

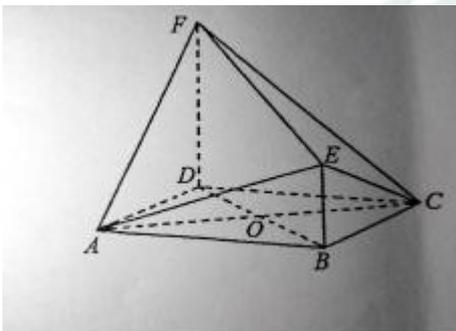
上交的税款为  $x = 100 \times 0.01 + 50 \times 0.02 + 16.5 \times 0.04 = 2.66$  (万元)

收入为  $166.5 - 2.66 = 163.84$  (万元)

19.如图,在几何体 ABCDEF 中,四边形 ABCD 是菱形,  $BE \perp$  平面 ABCD,  $DF \parallel BE$  且  $DF = 2BE = 2, EF = 3$ .

(1) 证明: 平面 ACF  $\perp$  平面 BEFD;

(2) 若  $\cos \angle BAD = \frac{1}{5}$ , 求几何体 ABCDEF 的体积.



考点: 线面垂直; 面面垂直; 棱锥体积

解析: (1)  $\because$  四边形 ABCD 是菱形,  $\therefore AC \perp BD$

又  $BE \perp$  面 ABCD,  $\therefore BE \perp AC$

$BD \cap BE = B, \therefore AC \perp$  面 BEFD

又  $AC \subset$  面 ACF  $\therefore$  平面 ACF  $\perp$  平面 BEFD

(2) 易知四边形  $BDEF$  为直角梯形, 且  $BD = 2\sqrt{2}$ ,  $S_{BDFE} = \frac{1}{2}(1+2) \cdot 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

在  $\triangle ABD$  中, 由余弦定理知,  $AB = AD = \sqrt{5}$ , 则  $AO = \sqrt{3}$ , 即点  $A$  到平面  $BDFE$  的距离,

由 (1) 知, 点  $A, C$  关于平面  $BDFE$  对称, 所以  $V_{ABCDEF} = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot S_{BDFE} \cdot AO = 2\sqrt{6}$ .

20. 已知直线  $l: y = kx + m$  与椭圆  $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$  相交于  $A, P$  两点, 与  $x$  轴、 $y$  轴分别相交于点  $N$  和点  $M$ , 且  $BM \perp AN$ , 点  $Q$  是点  $P$  关于  $x$  轴的对称点,  $QM$  的延长线交椭圆于点  $B$ , 过点  $A, B$  分别作  $x$  轴的垂线, 垂足分别为  $A_1, B_1$ .

(1) 若椭圆  $C$  的左、右焦点与其短轴的一个端点是正三角形的三个顶点, 点  $D\left(1, \frac{3}{2}\right)$  在椭圆  $C$  上, 求椭圆  $C$  的方程;

(2) 当  $k = \frac{1}{2}$  时, 若点  $N$  平分线段  $A_1B_1$ , 求椭圆  $C$  的离心率.

考点: 椭圆方程; 离心率; 直线与椭圆位置关系

解析: (1) 由题意得  $a = 2c$ ,  $b = \sqrt{3}c$

又因为点  $D\left(1, \frac{3}{2}\right)$  在椭圆上, 代入方程得  $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$

(2) 由题可知  $M(0, m)$   $N(-2m, 0)$   $P(2m, 2m)$   $Q(2m, -2m)$

设  $A(x_1, y_1)$   $B(x_2, y_2)$

$$\text{联立} \begin{cases} y = \frac{1}{2}x + m \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \end{cases}, \left(\frac{a^2}{4} + b^2\right)x^2 + a^2mx + a^2m^2 - a^2b^2 = 0$$

$$\text{则} \begin{cases} 2m + x_1 = -\frac{a^2m}{\frac{a^2}{4} + b^2} \\ 2m \cdot x_1 = \frac{a^2m^2 - a^2b^2}{\frac{a^2}{4} + b^2} \end{cases}, x_1 = -\frac{a^2m}{\frac{a^2}{4} + b^2} - 2m$$

$k_{QM} = -\frac{3}{2}$ , 所以直线  $QM$  为  $y = -\frac{3}{2}x + m$

21. 已知函数  $f(x) = 2\ln x + ax + \frac{1}{x} (a \in \mathbb{R})$  在  $x = 2$  处的切线过点  $(-4, 2\ln 2)$ .

(1) 讨论函数  $f(x)$  的单调性;

(2) 若不等式  $\frac{2\ln x}{1-x^2} > m - \frac{1}{x}$  恒成立, 求实数  $m$  的取值范围.

**考点:** 导数的几何意义, 单调性, 恒成立问题

**解析:** (1) 由题易知  $f(x)$  的定义域为  $(0, +\infty)$ ,  $f'(x) = \frac{2}{x} + a - \frac{1}{x^2}$

设切线的斜率为  $k$ , 则有  $k = f'(2) = a + \frac{3}{4}$ , 又  $f(2) = 2\ln 2 + 2a + \frac{1}{2}$

所以切线方程为:  $y = \left(a + \frac{3}{4}\right)(x-2) + 2\ln 2 + 2a + \frac{1}{2}$

又因为点  $(-4, 2\ln 2)$  在切线上, 将点代入切线方程得  $a = -1$ .

则  $f(x) = 2\ln x - x + \frac{1}{x}$ , 故  $f'(x) = -\frac{(x-1)^2}{x^2}$ ,

易知  $f'(x) \leq 0$  在  $(0, +\infty)$  上恒成立, 所以  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减.

(2) 要证  $\frac{2\ln x}{1-x^2} > m - \frac{1}{x}$ , 即证  $m < \frac{2\ln x}{1-x^2} + \frac{1}{x}$  恒成立

所以  $m < \frac{1}{1-x^2} \left(2\ln x + \frac{1-x^2}{x}\right)$

令  $g(x) = \frac{1}{1-x^2}$ , 又  $f(x) = 2\ln x - x + \frac{1}{x} = 2\ln x + \frac{1-x^2}{x}$

由 (1) 知  $f(x)$  在  $(0, +\infty)$  上单调递减, 又  $f(1) = 0$

所以, 当  $x \in (0, 1)$  时,  $f(x) > 0, g(x) > 0$ , 所以  $g(x)f(x) > 0$ ;

当  $x \in (1, +\infty)$  时,  $f(x) < 0, g(x) < 0$ , 所以  $g(x)f(x) > 0$ ;

综上, 当  $x \in (0, +\infty)$  时,  $g(x)f(x) > 0$ , 所以  $m \leq 0$ .

22 在直角坐标系  $xOy$  中, 曲线  $C_1$  的参数方程为  $\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos \varphi \\ y = \sin \varphi \end{cases}$ , 其中  $\varphi$  为参数, 曲线  $C_2: x^2 + y^2 - 2y = 0$ , 以原点  $O$  为极点,  $x$

轴的正半轴为极轴建立极坐标系, 射线  $l: \theta = \alpha (\rho \geq 0)$  与曲线  $C_1, C_2$  分别交于点  $A, B$  (均异于原点  $O$ )

(1) 求曲线  $C_1, C_2$  的极坐标方程;

(2) 当  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  时, 求  $|OA|^2 + |OB|^2$  的取值范围;

**考点:** 极坐标与参数方程转化, 取值范围问题;

**解析:** (1)  $C_1$  的普通方程为  $\frac{x^2}{2} + y^2 = 1$ ,  $C_1$  的极坐标方程为  $\rho^2 + \rho^2 \sin^2 \theta - 2 = 0$

$C_2$  的极坐标方程为  $\rho = 2 \sin \theta$

(2) 联立  $\theta = \alpha (\rho \geq 0)$  与  $C_1$  的极坐标方程得  $|OA|^2 = \frac{2}{1 + \sin^2 \alpha}$

联立  $\theta = \alpha (\rho \geq 0)$  与  $C_2$  的极坐标方程得  $|OB|^2 = 4 \sin^2 \alpha$

则  $|OA|^2 + |OB|^2 = \frac{2}{1 + \sin^2 \alpha} + 4 \sin^2 \alpha = \frac{2}{1 + \sin^2 \alpha} + 4(1 + \sin^2 \alpha) - 4$

$t = 1 + \sin^2 \alpha$ ,  $t \in (1, 2)$ ,

则  $|OA|^2 + |OB|^2 = \frac{2}{t} + 4t - 4$ , 在  $(1, 2)$  上单调递增,

$\therefore |OA|^2 + |OB|^2 \in (2, 5)$ .

23. 已知函数  $f(x) = |x-a| + \frac{1}{2a}$  ( $a \neq 0$ )

(1) 若不等式  $f(x) - f(x+m) \leq 1$  恒成立, 求实数  $m$  的最大值

(2) 当  $a < \frac{1}{2}$  时, 函数  $g(x) = f(x) + |2x-1|$  有零点, 求实数  $a$  的取值范围.

考点: 不等式恒成立问题, 构造函数

解析: (1)  $|x-a| + \frac{1}{2a} - |x-a+m| - \frac{1}{2a} \leq |x-a-x+a-m| = |m|$

$\therefore f(x) - f(x+m) \leq 1$ ,  $\therefore |m| \leq 1$ ,  $m$  的最大值为 1

(2)  $g(x) = f(x) + |2x-1|$

$$\text{即 } g(x) = \begin{cases} 3x + \frac{1}{2a} - a - 1, & x \geq \frac{1}{2} \\ -x + \frac{1}{2a} - a + 1, & a \leq x < \frac{1}{2} \\ -3x + a + \frac{1}{2a} + 1, & x < a \end{cases}$$

$g(x)$  在  $x = \frac{1}{2}$  处取到最小值, 即  $3 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2a} - a - 1 \leq 0$ ,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{2a} - a \leq 0$ , 通分后的  $\frac{(2a+1)(a-1)}{2a} \geq 0$

解集为  $\{a | -\frac{1}{2} \leq a < 0, a \geq 1\}$  与题中  $a < \frac{1}{2}$  取交集得  $\{a | -\frac{1}{2} \leq a < 0\}$